



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



José Ribamar de Souza Neves

Poliedros Arquimedianos

RECIFE
2017



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



José Ribamar de Souza Neves

Poliedros Arquimedianos

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Bárbara Costa da Silva
Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Nunes Machado Júnior

RECIFE
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Nome da Biblioteca, Recife-PE, Brasil

N518p Neves, José Ribamar de Souza
Poliedros Arquimedianos / José Ribamar de Souza Neves. – 2017.
97 f. : il.

Orientadora: Bárbara Costa da Silva.
Coorientador: Ricardo Nunes Machado Júnior.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco,
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Recife, BR-PE, 2017.
Inclui referências e apêndice(s).

1. Poliedros arquimedianos 2. Poliedros regulares 3. Truncamento
4. Snubimento 5. Oficina. I. Silva, Bárbara Costa da, orient. II. Ricardo Machado
Júnior, Nunes, coorient. III. Título

CDD 510

JOSE RIBAMAR DE SOUZA NEVES

Poliedros Arquimedianos

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 28/07/2017

BANCA EXAMINADORA

Prof^a Dr^a Bárbara Costa da Silva (Orientador(a)) – UFRPE

Prof. Dr. Ricardo Nunes Machado Junior (Coorientador(a)) – UFRPE

Prof. Dr. Antonio Fernando Pereira de Sousa – DMAT– UFPE

Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva – PROFMAT/UFRPE

Este trabalho é dedicado àquelas pessoas que fazem ou fizeram parte da minha família, e algumas delas infelizmente eu nem pude conhecer. Vamos começar assim: primeiramente eu dedico ao meu pai e à minha mãe, duas figuras maravilhosas e muito importantes em minha vida, sem dúvidas! É pena que meu pai, um grande maranhense, não esteja mais aqui comigo. Dedico aos meus irmãos Marcos, Silvana e Sílvio. Também às minhas sobrinhas Luiza, Júlia e Stela; não posso esquecer-me dos meus tios Alice e Miguel Pedrosa (o qual também não se encontra mais entre nós). E também ao meu tio Chico (infelizmente nunca o conheci) e a minha tia Gilda (apesar de viva e morando no Rio de Janeiro, eu nunca a conheci). É oportuno atribuir também este trabalho aos meus tios e tias, irmãos e irmãs do meu pai, que também eu nunca os conheci. E por último, mas igualmente digno, oferto também aos meus avôs e avós, maternos e paternos, que infelizmente já tinham falecido quando eu nasci. Dito isso, esta dedicatória é, pelo menos, alguma coisa que fiz por eles.

Agradecimentos

Agradeço à minha professora orientadora Bárbara Costa, pela inestimável ajuda e paciência em vários momentos de convivência. Sem ela, esse trabalho se tornaria muito mais difícil. Agradeço ao professor coorientador Ricardo Machado, pela grande ajuda nas construções das figuras através do Inkscape e do SageMath. Agradeço também aos professores Clessius e Tarciana Maria, pela atenção, pelo carinho e pela ajuda em vários momentos de desespero no latex. Agradeço a Cláudia Costa pelas construções dos Poliedros, ao professor Geraldo Baracho, pela tradução do resumo, aos professores Anny e Eduardo Alves, por algumas correções e ao professor de Filosofia, Jeferson, por alguns esclarecimentos sobre Platão. Agradeço também ao meu amigo Henrique Araújo, pelas várias quintas-feiras que ele passou me ajudando durante o curso. Obviamente que outros amigos não poderiam ficar de fora: Ao Dr. Frederico Freitas pelo carinho e pela ajuda em algumas correções, à Izabelly Cristina, a José Roberto Araújo, ao mestre Fide Vinícius Tiné, a Robertson, à Dra. Marília Souto Maior (amiga sem igual), a Fabíola Tiné, a Gaudêncio Tadeu, a Flavinho (o mago), ao Dr. Marcelo Bouwman, a Afonso Celso, a Marcílio Santos, a Roberto Antunes, ao futuro Dr. Luziano Pereira e a André Paegle, grande amigo e grande professor de Matemática. Agradeço também ao meu irmão e amigo Otávio Araújo, que faz muita falta nessas horas difíceis em que vivemos e que nos deixou não faz muito tempo. Um detalhe, não menos importante, a maioria dos meus amigos citados são enxadristas.

*"O sol, com todos aqueles planetas
que giram à sua volta e dele
dependem, ainda pode amadurecer
um cacho de uvas como se nada
mais existisse a fazer no universo"*

(Galileu Galilei)

*"Uma vez um matemático me falou que o verdadeiro prazer não está
em achar a verdade, mas sim em procurar por ela"*

(Leon Tolstoy)

Declaração

Eu, José Ribamar de Souza Neves, declaro para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título Poliedros Arquimedianos, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito a processos administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como a professora orientadora Bárbara Costa da Silva, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 28 de julho de 2017.

Assinatura: _____

Resumo

O tema desta dissertação é **Poliedros Arquimedianos (ou semirregulares)**, sólidos que são obtidos através de operações (truncamentos e snubiamentos) feitas sobre os poliedros regulares convexos. Até onde se sabe, tais poliedros foram estudados por Arquimedes há mais de 2000 anos, porém foi o astrônomo e matemático alemão Johann Kepler quem os nomeou e provou a existência de apenas 13 (treze), com exceção de uma classe de prismas e de anti-prismas. O nosso principal objetivo é propor um material teórico completo sobre a teoria dos poliedros arquimedianos para que possa ser utilizado por professores de Matemática do ensino médio e também para alunos do curso de graduação de Licenciatura em Matemática, assim como também apresentar alguns resultados obtidos através da execução de uma oficina sobre esse tema. A partir dos resultados obtidos na parte prática da oficina, principalmente, acreditamos que este tema, bastante lúdico, além de estimular a imaginação e a criatividade dos alunos, realmente pode ser introduzido a partir do ensino médio, através de exemplos e exercícios similares aos que serão propostos neste trabalho. Neste trabalho mostraremos também como construir alguns poliedros com a utilização do Sagemath, programa de Software livre (e de código aberto), criado especialmente para trabalhar na área de Matemática.

Palavras-chave: Poliedros arquimedianos, Poliedros regulares, Truncamento, Snubiamiento, Oficina.

Abstract

The subject of this dissertation is Archimedean (or semi-regular) polyhedra, solid that are obtained through operations (truncation and snub) made on regular convex polyhedra. As far as we know, such polyhedra were studied by Archimedes over 2000 years ago, but it was the German astronomer and mathematician Johann Kepler who named them and proved the existence of only 13 (thirteen), except for a class of prisms and anti-prisms. Our main objective is to propose a complete theoretical material on the Archimedean polyhedron theory so that it can be used by high school mathematics teachers as well as for undergraduate students in Mathematics, as well as to present some results obtained through an implementation of a workshop on this topic. From the results obtained in the practical part of the workshop, mainly, we believe that this theme, quite playful, besides stimulating the imagination and the creativity of the students, can really be introduced from high school, through examples and exercises similar to those that will be proposed in this work. In this work we will also show how to construct some polyhedra with the use of Sagemath, a program of free (and open source) software, specially designed to work in the area of Mathematics.

Keywords: Archimedean polyhedrons, Regular polyhedra, Truncation, Snubiamento, Workshop

Lista de ilustrações

Figura 1 – Platão	26
Figura 2 – Octaedro	27
Figura 3 – Hexaedro Regular(cubo)	27
Figura 4 – Não é um poliedro	27
Figura 5 – Octaedro	28
Figura 6 – Não é um poliedro	28
Figura 7 – Decaedro	28
Figura 8 – Selo suíço comemorativo dos 300 anos do nascimento de Euler	30
Figura 9 – Projeção de P sobre S	31
Figura 10 – Tetraedro	31
Figura 11 – Pequeno dodecaedro estrelado de Kepler-Poinsot	31
Figura 12 – Poliedro Não Euleriano	32
Figura 13 – Poliedro não convexo	32
Figura 14 – Poliedro convexo	33
Figura 15 – Poliedro convexo planificado	33
Figura 16 – Dividindo em triângulos	34
Figura 17 – Retirando triângulos	34
Figura 18 – 4 triângulos	34
Figura 19 – 2 triângulos	34
Figura 20 – Um triângulo	34
Figura 21 – ($m = 5$)	37
Figura 22 – ($m = 3$)	37
Figura 23 – ($m = 3$)	37
Figura 24 – Tetraedro Regular	38
Figura 25 – Hexaedro Regular	38
Figura 26 – Octaedro Regular	38
Figura 27 – Dodecaedro Regular	38
Figura 28 – Icosaedro Regular	39
Figura 29 – Dual-cubo-octaedro	39
Figura 30 – Paralelepípedo oblíquo	40
Figura 31 – Tronco de pirâmide	40
Figura 32 – Estátua de bronze de Arquimedes localizada no Observatório Archen- hold, em Berlim. Ela foi apresentada ao público em 1972	41
Figura 33 – Icosaedro Truncado	42
Figura 34 – Bola de futebol da copa de 1970	42
Figura 35 – Prisma Octogonal Regular	43

Figura 36 – Anti-Prisma Hexagonal Regular	43
Figura 37 – Reunindo 6 triângulos equiláteros	43
Figura 38 – Arranjo da forma XXY	44
Figura 39 – Arranjo HHY	46
Figura 40 – Arranjo OOY	47
Figura 41 – Arranjo DDY	48
Figura 42 – Arranjo da forma XXYY	50
Figura 43 – Arranjo da forma XXYZ	50
Figura 44 – Arranjo da forma XYXZ	51
Figura 45 – Cuboctaedro(corte tipo-1)	55
Figura 46 – Cubo Truncado(corte tipo-2)	55
Figura 47 – Truncando o octaedro	56
Figura 48 – Cuboctaedro	56
Figura 49 – Truncando o dodecaedro	57
Figura 50 – Icosidodecaedro	57
Figura 51 – Truncado o tetraedro	57
Figura 52 – Tetraedro Truncado	57
Figura 53 – Truncado o cubo	58
Figura 54 – Cubo Truncado	58
Figura 55 – Truncado o octaedro	58
Figura 56 – Octaedro Truncado	58
Figura 57 – Truncado o dodecaedro	59
Figura 58 – Dodecaedro Truncado	59
Figura 59 – Truncado o icosaedro	59
Figura 60 – Icosaedro Truncado	59
Figura 61 – Cuboctaedro Truncado (ou grande rombicuboctaedro)	60
Figura 62 – Vista de um Cuboctaedro a partir de um dos vértices	60
Figura 63 – Icosidodecaedro Truncado (ou grande rombicosidodecaedro)	61
Figura 64 – Expansão das faces do cubo	61
Figura 65 – Rombicuboctaedro	61
Figura 66 – Rombicosidodecaedro (ou pequeno rombicosidodecaedro)	62
Figura 67 – Cubo snub (ou cuboctaedro snub)	62
Figura 68 – Dodecaedro snub (ou icosidodecaedro snub)	63
Figura 69 – Rombicuboctaedro	64
Figura 70 – Icosidodecaedro	64
Figura 71 – Segmento de reta AB	68
Figura 72 – Segmento	69
Figura 73 – Fluxograma-2	70
Figura 74 – Face Triangular	71

Figura 75 – Tetraedro Truncado	71
Figura 76 – Face Quadrada	71
Figura 77 – Cubo Truncado	71
Figura 78 – Face Pentagonal	72
Figura 79 – Dodecaedro Truncado	72
Figura 80 – Fluxograma-1	73
Figura 81 – Expansão do cubo	74
Figura 82 – Rombicuboctaedro	74
Figura 83 – Expansão do dodecaedro	74
Figura 84 – Rombicosidodecaedro	74
Figura 85 – Foto da oficina	78
Figura 86 – Foto da oficina	79
Figura 87 – Foto da oficina	80
Figura 88 – Foto da oficina	80
Figura 89 – Cuboctaedro(01)	87
Figura 90 – Icosidodecaedro(02)	87
Figura 91 – Tetraedro truncado(03)	87
Figura 92 – Cubo truncado(04)	87
Figura 93 – Octaedro truncado(05)	88
Figura 94 – Dodecaedro truncado(06)	88
Figura 95 – Icosaedro truncado(07)	88
Figura 96 – Icosidodecaedro truncado(08)	88
Figura 97 – Cuboctaedro truncado(09)	89
Figura 98 – Rombicuboctaedro(10)	89
Figura 99 – Rombicosidodecaedro(11)	89
Figura 100 – Cubosnub(12)	89
Figura 101 – Dodecaedrosnub(13)	90

Sumário

	Introdução	23
1	POLIEDROS DE PLATÃO	25
1.1	Um pouco da História	25
1.2	Poliedros	27
1.3	Relação de Euler	30
1.4	Poliedros Regulares	35
1.5	O que é um poliedro de Platão	39
2	POLIEDROS ARQUIMEDIANOS	41
2.1	Os treze poliedros arquimedianos	42
2.1.1	Poliedros arquimedianos com $m = 3$	44
2.1.2	Poliedros arquimedianos com $m = 4$	49
2.1.3	Poliedros arquimedianos com $m = 5$	53
2.2	Obtendo os Poliedros Arquimedianos	55
2.2.1	Operações sobre os Poliedros	55
2.3	Poliedros arquimedianos - Leonardo da Vinci	64
3	USANDO O PROGRAMA SAGEMATH	65
3.1	O que é o Sage	65
3.2	Uma breve introdução sobre o Sage	65
3.3	Encontrando um ponto P em um segmento AB	68
3.4	Fluxograma para truncamento	69
3.5	Truncando os poliedros regulares	70
3.6	Fluxograma para expansão	72
3.7	Expansão	74
4	OFICINA ARQUIMEDIANA	77
4.1	Introdução	77
4.2	A oficina	78
4.3	Lista de exercícios	81
4.4	Questionário	84
4.5	As planificações	86
	Conclusão	91

5	APÊNDICE	93
	REFERÊNCIAS	97

Introdução

Muitas pessoas deparam-se com poliedros no dia a dia e, na maioria das vezes, nem se dão conta de que essas figuras geométricas fazem parte do mundo da Matemática. Obviamente que muitas pessoas já ouviram falar no cubo e no paralelepípedo, provavelmente os dois poliedros mais conhecidos que existem. Esses sólidos já vêm sendo abordados há muito tempo nos conteúdos programáticos das escolas de todo Brasil e fazem parte dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, os PCNEM ¹, conteúdo de grande importância de geometria espacial, que é visto no segundo ano do ensino médio. Esse tema é milenar e vem sendo estudado por matemáticos durante séculos. Basta lembrar, por exemplo, das pirâmides do Egito, um dos poliedros mais fotografados e vistos de toda a história. O foco de nosso trabalho será sobre “poliedros arquimedianos” (também conhecidos como poliedros semirregulares), figuras geométricas que foram estudadas por Leonardo da Vinci, Arquimedes (por volta do ano III-a.C), e outros grandes matemáticos do passado. Queremos propor que esse tema pode muito bem ser aplicado a alunos do ensino básico, em particular alunos do segundo e terceiro ano do ensino médio.

Para um melhor entendimento dos poliedros arquimedianos, faz-se necessário um conhecimento prévio dos poliedros regulares de Platão. Nessa parte do trabalho, fizemos uma revisão da teoria de poliedros, que servirá de embasamento para o próximo capítulo, tema principal de nosso estudo. Neste capítulo, fizemos um apanhado histórico e teórico sobre os poliedros regulares de Platão. Provaremos a relação de Euler de forma geométrica, com certeza uma das relações mais importantes de toda a geometria, senão uma das mais importantes de toda a Matemática. Faremos também uma prova, algébrica e geométrica, da existência dos cinco poliedros regulares de Platão: Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro. Por sinal, essa mesma ideia que usaremos para provar os cinco poliedros regulares também será usada, no próximo capítulo, para provarmos os 13 poliedros arquimedianos.

O capítulo dois, e o mais importante, trata dos poliedros arquimedianos, objetivo principal de nosso trabalho. Assim como ocorre com os poliedros de Platão, os poliedros arquimedianos também estão presentes no cotidiano das pessoas. Não é tão difícil encontrar um desses poliedros pelo caminho. Um exemplo clássico desses poliedros é a famosa bola de futebol da copa do mundo de 1970. Quem nunca se deparou com uma bola de futebol com esse formato arquimediano no dia a dia? Existem até joias e pingentes que possuem esse formato de poliedro arquimediano. Eles também estão presentes em questões de concursos e de vestibulares por todo Brasil.

¹ <http://cptstatic.s3.amazonaws.com/pdf/cpt/pcn/ciencias-da-natureza-matematica-e-suas-tecnologias-mais.pdf>

O interessante é que existem apenas 13 (treze) poliedros arquimedianos, com exceção dos prismas e dos anti-prismas, e é neste capítulo que faremos uma prova geométrica dessa afirmação. Mostraremos também que eles são obtidos, direta ou indiretamente, por operações feitas sobre os Poliedros Regulares. Essas operações podem ser truncamento (cortes), que são de dois tipos, ou através de uma snubificação, operação que consiste em afastar todas as faces de um poliedro regular (rotacionando-as ou não) e preenchendo os espaços vazios resultantes com polígonos regulares – triângulos, quadrados, pentágonos, etc. Quando não houver rotação entre as faces afastadas, a snubificação é conhecida como expansão e o preenchimento entre as arestas é feito com quadrados. No caso de haver rotação entre as faces afastadas, o preenchimento entre as arestas é feito com triângulos equiláteros. Curiosamente, é possível obter nove desses poliedros através de truncamentos, dois através de expansão e dois por snubimento.

No penúltimo capítulo, utilizamos o Sagemath, e com este programa conseguiremos construir qualquer tipo de poliedro, desde que se conheça, antecipadamente, todos os seus vértices, pois o Sage possui um comando para gerar poliedros a partir de seus vértices. Entretanto, para a construção dos cinco poliedros regulares de Platão isso não será necessário, pois já existem comandos específicos no próprio Sage para esse propósito. Porém, não existe nenhum comando no Sage para a construção dos poliedros arquimedianos. Por sinal, estes poliedros são construídos a partir dos poliedros regulares, ou seja, sabendo-se os vértices de um poliedro regular, conseguiremos, usando teoria vetorial, encontrar os vértices do poliedro arquimediano que se deseja construir. Para essa finalidade, criamos duas implementações (um para truncamento e outro para expansão), feitas no próprio Sage, que servem para encontrar todos os vértices de um poliedro arquimediano, com exceção do Cubo snub e do Dodecaedro snub (os únicos que são construídos por snubimento).

No capítulo quatro, último capítulo de nosso trabalho, trata de uma oficina realizada na UFRPE, no dia 18/10/2016, com 18 alunos da graduação. A oficina teve duração de 4 horas e foi dividida da seguinte forma: Na primeira parte, com duração de 01h30min, houve uma apresentação da teoria dos poliedros de Platão e de Arquimedes, e ao final desta apresentação, foi entregue a cada grupo uma lista com 13 (treze) problemas para que eles resolvessem em sala. Na segunda parte da oficina, a turma foi dividida em grupos de três a cinco alunos, onde cada grupo recebeu as planificações dos 13 (treze) poliedros arquimedianos e destas, cada grupo escolheu apenas uma das planificações para que fosse feita a construção (desenho, corte e montagem) das peças. Durante todo o trabalho, fizemos um registro fotográfico e também observamos a interação e participação dos alunos nas atividades propostas. No final deste capítulo encontra-se um questionário, entregue a cada aluno, para avaliação da oficina.

1 Poliedros de Platão

1.1 Um pouco da História

A nossa pesquisa histórica feita sobre este capítulo advém de informações extraídas do livro de Howard Eves (1), do livro de Gregoria Guillén Soler (2), do livro de Rodolfo Lopes (3) e também do livro de Daniel Cordeiro (4).

Platão nasceu em Atenas (427 a.C. ? - 347 a.C.) e é considerado um dos grandes filósofos de toda história. Foi discípulo de Sócrates (469 - 399 a.C.) e mestre de Aristóteles (c.384 - 322 a.C.). Não se sabe ao certo a cronologia de sua obra, mas é sabido que ele escreveu muitos livros, entre eles temos: *A República*, *Teeteto*, *Timeu (um diálogo)*, *Hiparco (um diálogo)*, *Sofista (um diálogo)*, *Apologia de Sócrates*, entre tantos outros. Ele também foi o fundador da “Academia”, em Atenas, a primeira instituição de educação superior do ocidente.

Platão foi um dos maiores admiradores da Matemática em sua época, isso pode ser observado na sua vida e obra. Por exemplo, na entrada da **Academia** estava escrito

Que não entre quem não saiba geometria

Outro exemplo pode ser encontrado no livro **A República**, onde ele defende que o filósofo deve saber matemática porque ela tem um efeito muito grande na elevação da mente compelindo-a a raciocinar sobre entidades abstratas, ou seja, para ele, a Matemática era a chave para a compreensão e o entendimento de um pensamento mais abrangente e, por isso, todos deveriam estudar e aprender Matemática.

Segundo Daniel Cordeiro (4)

“(...)Até onde se sabe, ele não fez nenhuma descoberta na área de matemática, entretanto, sua admiração e sua maneira de tratar a Matemática, dando-lhe importância como parte vital do pensamento filosófico e da Educação, contribuiu para que a Matemática alcançasse a grande reputação que obteve no mundo Ocidental. Ele dizia que a Matemática era a chave para a compreensão do universo.”

A Matemática possui muitos ramos e entre esses ramos, tudo indica que Platão tinha uma maior predileção pela geometria, mas especificamente pelas construções dos poliedros regulares e semirregulares (estudados por Arquimedes).

A história dos poliedros regulares é confusa e se perde na teia de fios do passado. Não se sabe exatamente, a partir de que ano, os cinco poliedros regulares ficaram conhecidos. Muitos associam a Platão, mas o que se sabe é que Platão apenas mostra como construí-los

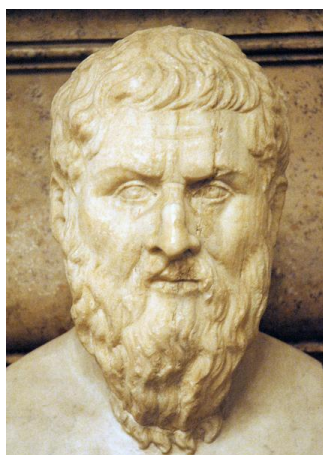
reunindo triângulos, quadrados e pentágonos para formar suas faces. Também é sabido que, em seu livro *Timeu*, Platão faz uma citação desses poliedros e, por este motivo, receberam esse nome de poliedros platônicos. Há também uma tendência de se atribuir a descoberta à escola de Pitágoras, mesmo sabendo que o objeto mais antigo com a forma de dodecaedro é atribuído a períodos antes de Pitágoras.

Esses sólidos tiveram um tratamento matemático inicial no livro XIII dos *Elementos* de Euclides. O primeiro comentário desse livro trata dos poliedros, de maneira errada, como se eles fossem de Platão. Mas se sabe que o tetraedro, o cubo e o dodecaedro se devem aos pitagóricos, ao passo que o octaedro e o icosaedro se devem a Teeteto.

No trabalho de Platão, misticamente *Timeu* associou os quatro sólidos mais fáceis de construir (Tetraedro, Cubo, Octaedro e Icosaedro) com os quatro elementos primordiais da natureza, Terra, Fogo, Ar e Água, respectivamente. O Dodecaedro ele associou ao Universo.

Johann Kepler (1571-1630), que era astrônomo, matemático e numerologista, deu uma explicação bastante engenhosa para as associações de *Timeu*. Ele assumiu que, desses cinco sólidos, considerando-se a mesma área de superfície, o Tetraedro é o sólido de menor volume e o Icosaedro o de maior volume. Essas relações de volume – superfície são qualidades de secura (coisa seca) e umidade, respectivamente, e como o fogo é o mais seco dos quatro elementos e a água o mais úmido, o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Associa-se o cubo com a terra porque o cubo possui maior estabilidade quando apoiado sobre uma das faces. O octaedro rodopia facilmente quando segurado pelos vértices opostos usando apenas dois dedos (o indicador e o polegar). Por isso ele possui a instabilidade do ar, ou seja, ele é associado ao ar. E por último, o dodecaedro, que ele associou ao universo, pelo fato deste possuir 12 signos astrológicos do zodíaco e o dodecaedro possuir 12 faces.

Figura 1 – Platão

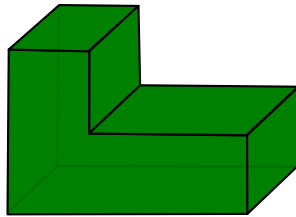


Fonte: Internet

1.2 Poliedros

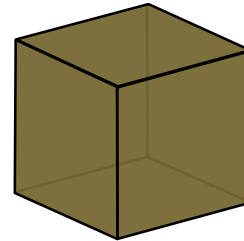
Nesta seção falaremos sobre Poliedros. O termo **Poliedro** tem sua origem no idioma grego: póly (vários) + hedra (faces). Isto é, refere-se às figuras geométricas que possuem várias faces. Vejamos dois exemplos de poliedros nas figuras 2 e 3.

Figura 2 – Octaedro



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 3 – Hexaedro Regular(cubo)



Fonte: Produzido pelo autor

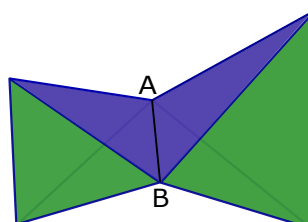
Precisamos agora definir o que é um poliedro. Existem várias formas de se definir um objeto. Às vezes, um pequeno detalhe pode mudar totalmente a ideia do objeto, e poliedros não fogem a essa regra. Podemos definir poliedros com diversos níveis de generalidade. Não há nenhum motivo especial, mas adotaremos a definição abaixo.

Definição 1.1. Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces, onde:

- i.* Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
- ii.* A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.
- iii.* É sempre possível, caminhando sobre as faces, ir de um ponto de uma a um ponto qualquer de outra sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado de aresta do poliedro e, cada vértice de uma face é um vértice do poliedro. Observe que a figura 4 não é considerado um poliedro, pois não obedece o item *i* da nossa definição, ou seja, a aresta AB pertence a mais de duas faces.

Figura 4 – Não é um poliedro



Fonte: Produzido pelo autor

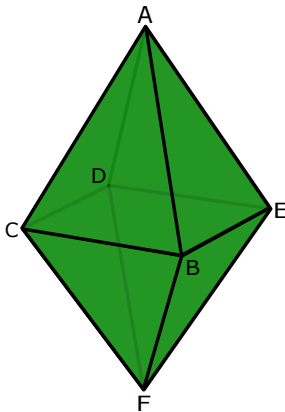
Na figura 5, se escolhermos duas faces quaisquer desse poliedro, se verifica facilmente o item *ii* de nossa definição, ou seja, a interseção de duas faces quaisquer ou é vazia ou é um ponto ou é uma aresta. Vejamos alguns exemplos:

$$Face(ABC) \cap Face(ABE) = Aresta(AB)$$

$$Face(ABC) \cap Face(ADE) = Vertice(A)$$

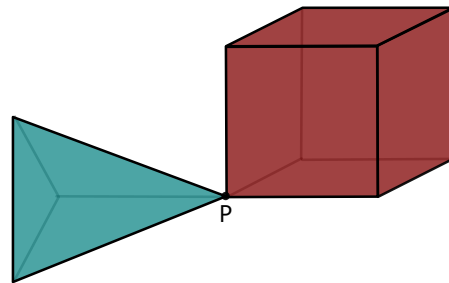
$$Face(ABC) \cap Face(DEF) = \phi$$

Figura 5 – Octaedro



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 6 – Não é um poliedro



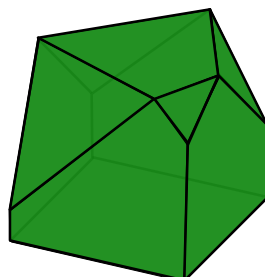
Fonte: Produzido pelo autor

Observe que a figura 6 também não é um poliedro, pois não satisfaz o item *iii* da definição.

A partir de agora denotaremos A , F e V como sendo, respectivamente, número de arestas, número de faces e número de vértices de um poliedro, e m e n como sendo, respectivamente, número arestas por vértice e número de arestas por face.

Dado um poliedro com A Arestas, F Faces e V Vértices e seja F_n o número de faces do tipo n , e seja V_m o número de vértices do tipo m . O poliedro da figura 7 é um **decaedro** e possui 4 faces triangulares, 2 faces quadrangulares e 4 faces pentagonais, ou seja: $F_3 = 4$, $F_4 = 2$, $F_5 = 4$. Temos também que, em relação aos vértices, ele possui $V_3 = 8$, $V_4 = 4$.

Figura 7 – Decaedro



Fonte: Produzido pelo autor

O número total de faces e de vértices de um poliedro é a soma de todas as faces e vértices de cada tipo, respectivamente, ou seja, $F = \sum_{n \geq 3} F_n$ e $V = \sum_{m \geq 3} V_m$. Como cada aresta é comum a exatamente duas faces e também a dois vértices, teremos

$$2A = \sum_{n \geq 3} nF_n \quad \text{e} \quad 2A = \sum_{m \geq 3} mV_m.$$

Em particular, se todas as faces de um poliedro possuir o mesmo número de lados n , e em todos os vértices concorrer o mesmo número de arestas m , então valem as relações

$$2A = nF \quad \text{e} \quad 2A = mV$$

Na figura 7, por exemplo, $F_3 = 4, F_4 = 2, F_5 = 4, V_3 = 8, V_4 = 4$. Logo,

$$2A = \sum_{n=3}^5 nF_n = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + 5 \cdot F_5 = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 40 \Rightarrow A = 20$$

$$2A = \sum_{m=3}^4 mV_m = 3 \cdot V_3 + 4 \cdot V_4 = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4 = 40 \Rightarrow A = 20$$

A partir dessas duas relações, podemos deduzir duas desigualdades bastante conhecidas para poliedros.

Proposição 1.2. *Seja \mathcal{P} um poliedro com A arestas, F faces e V vértices. Então*

- a) $2A \geq 3F$
- b) $2A \geq 3V$

Demonstração. a) Sabemos que $n \geq 3$. Dessa forma, $nF_n \geq 3F_n$. Logo,

$$2A = \sum_{n \geq 3} nF_n \geq \sum_{n \geq 3} 3F_n = 3 \sum_{n \geq 3} F_n = 3F \Rightarrow 2A \geq 3F$$

Observe que a igualdade só vai ocorrer quando $F_i = 0, \forall i \geq 4$, ou seja, se o poliedro possuir apenas faces triangulares, ou seja, se $n = 3$.

b) Sabemos que $m \geq 3$. Dessa forma, $mV_m \geq 3V_m$. Logo,

$$2A = \sum_{m \geq 3} mV_m \geq \sum_{m \geq 3} 3V_m = 3 \sum_{m \geq 3} V_m = 3V \Rightarrow 2A \geq 3V$$

Observe que a igualdade só vai ocorrer quando $V_i = 0, \forall i \geq 4$, ou seja, se $m = 3$. □

A soma dos ângulos internos de um polígono qualquer de n lados é dado pela fórmula $S_n = 180^\circ(n - 2)$. Para calcularmos a soma S dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro qualquer, precisamos inicialmente saber a quantidade de faces de

cada tipo (F_n) que o poliedro possui. Observe que a soma dos ângulos internos de todas as faces de n lados de um poliedro é dada por $F_n S_n$. Portanto, a soma S é dada pela expressão $S = \sum_{n \geq 3} F_n S_n$. Por exemplo, no poliedro da figura 7, temos 4 faces triangulares ($F_3 = 4$), 2 faces quadrangulares ($F_4 = 2$) e 4 faces pentagonais ($F_5 = 4$), portanto, $S = F_3 \cdot S_3 + F_4 \cdot S_4 + F_5 \cdot S_5 = 4 \cdot 180^\circ(3 - 2) + 2 \cdot 180^\circ(4 - 2) + 4 \cdot 180^\circ(5 - 2) = 3600^\circ$.

Mostraremos agora uma fórmula para calcular a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro com A Arestas e F Faces.

Proposição 1.3. *A soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro é dada pela fórmula $S = 360^\circ(A - F)$.*

Demonstração. A soma dos ângulos internos de um polígono qualquer é dado por $S_n = 180^\circ(n - 2)$, onde $n \geq 3$. Seja um poliedro com F faces, V vértices e A arestas.

$$S = \sum_{n \geq 3} F_n S_n = \sum_{n \geq 3} F_n 180(n - 2) = 180 \cdot \left(\sum_{n \geq 3} n F_n - 2 \sum_{n \geq 3} F_n \right)$$

$$S = 180(2A - 2F) \Rightarrow S = 360^\circ(A - F) \quad \square$$

1.3 Relação de Euler

O matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783) escreveu, em 14 de novembro de 1750, uma carta para seu amigo e matemático Christian Goldbach (1690–1764) comentando sobre a relação $F + V - A = 2$, uma propriedade geral de estereometria (geometria dos sólidos) e um ano mais tarde, aproximadamente, ele fez essa demonstração. Em sua homenagem, essa propriedade é conhecida como fórmula ou relação de Euler para os poliedros que são homeomorfos a uma esfera (homeo = mesmo, morfo = forma). Anos depois, Henri Poincaré percebeu que essa fórmula era um dos pilares centrais da topologia. O interessante é que Descartes, em 1639, percebeu que essa relação era válida para os cinco poliedros regulares convexos, mas ele não deu muita importância a esse fato.

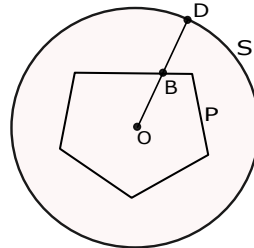
Figura 8 – Selo suíço comemorativo dos 300 anos do nascimento de Euler



Fonte: internet

Dizemos que duas figuras B e D são homeomorfas quando existe uma transformação contínua $f : B \rightarrow D$ cuja inversa $f^{-1} : D \rightarrow B$ também é contínua. Neste caso dizemos que f é um homeomorfismo de B sobre D . Poincaré mostrou que se o poliedro \mathcal{P} com V_P vértices, A_P arestas e F_P faces é homeomorfo a um poliedro S com V_S vértices, A_S arestas e F_S faces então $F_P + V_P - A_P = F_S + V_S - A_S$. Ou seja, ele percebeu que $F + V - A$ é um invariante topológico¹. É comum escrever $X(P) = F + V - A$, onde $X(P)$ é conhecido como *característica de Euler-Poincaré do poliedro \mathcal{P}* . Sabemos que $X(S) = 2$ quando S for uma esfera. Logo, toda superfície homeomorfa a uma esfera tem característica de Euler-Poincaré igual a 2. Com isso, fica fácil perceber que todo poliedro convexo \mathcal{P} tem característica igual a 2, pois se projetarmos cada ponto do poliedro \mathcal{P} sobre a superfície de uma esfera localizada convenientemente, teremos um homeomorfismo $f : \mathcal{P} \rightarrow S$ (ver figura 9), no entanto, esse tema não é o objeto central de nosso trabalho.

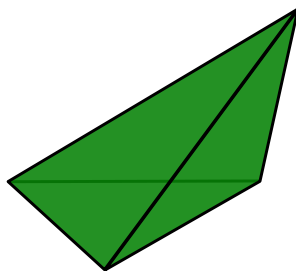
Figura 9 – Projeção de P sobre S



Fonte: Produzido pelo autor

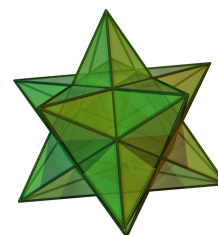
Suponha que tenhamos um poliedro cujas faces são elásticas e bem flexíveis. Suponha também que seja possível injetar ar dentro deste poliedro até que ele fique com o formato de uma esfera. Se isso acontecer, então podemos dizer que esse poliedro é homeomorfo a esfera. Ou seja, vai existir uma bijeção entre os pontos da superfície do poliedro e os pontos da superfície da esférica. Isto significa que a superfície do poliedro coincidirá com a superfície da esfera. Essa é uma maneira intuitiva e simples de explicarmos o homeomorfismo a uma esfera.

Figura 10 – Tetraedro



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 11 – Pequeno dodecaedro estrelado de Kepler-Poinsot

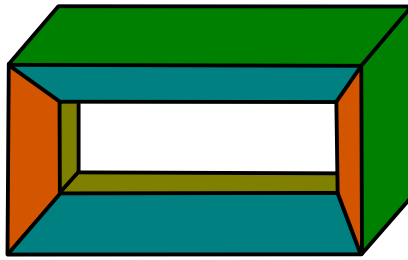


Fonte: internet

¹ Em topologia, um invariante topológico é uma propriedade de um espaço topológico que é invariante sob um homeomorfismo

É fácil perceber que, tanto o tetraedro da figura-10 quanto o pequeno dodecaedro estrelado de Kepler-Poinsot (figura-11), ambos são homeomorfos à esfera, ou seja, se “inflarmos” esses dois poliedros eles ficarão com o formato de uma esfera. Porém, existem sólidos que quando “inflados” não obedecem a essa regra. Por exemplo, o sólido da figura 12 não é homeomorfo à esfera, pois quando inflado ele se transforma num toro (uma boia com o formato de uma câmara de ar), que não obedece a relação de Euler.

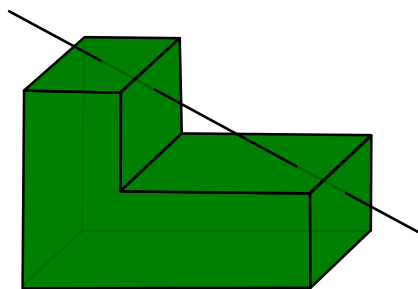
Figura 12 – Poliedro Não Euleriano



Fonte: Produzido pelo autor

Homeomorfismo é um tema que pode ser estudado com profundidade, mas esse não é o objetivo de nosso trabalho. Limitaremos apenas ao estudo dos poliedros convexos e não convexos. Ao leitor interessado sobre esse tema, indicamos a referência (6). Todo poliedro limita uma região do espaço chamada de interior do poliedro. Dado um poliedro, um ponto do espaço ou é exterior ao poliedro, ou pertence ao poliedro, ou é interior ao poliedro. Uma reta é secante a um poliedro quando possui pontos interiores ao poliedro. Um poliedro é chamado de *convexo* quando qualquer reta secante possui exatamente (apenas) dois pontos em comum com o poliedro. E quando isso não acontece ele é conhecido com *não convexo*. Observe que a figura 13 é um exemplo de poliedro não convexo, pois a reta r intersecta o poliedro em mais de dois pontos.

Figura 13 – Poliedro não convexo

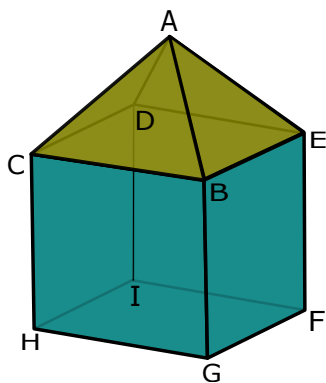


Fonte: Produzido pelo autor

Teorema 1.4 (A Relação de Euler para poliedros convexos). *Em todo poliedro convexo com F faces, V vértices e A arestas, vale a relação $F + V - A = 2$.*

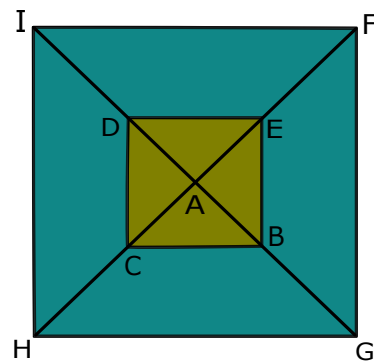
Demonstração. Faremos a prova do teorema de Euler partindo de um poliedro convexo. Mas existem poliedros não convexos que a relação de Euler é satisfeita. Não há nenhuma razão especial, mas mostraremos aqui a demonstração que foi feita pelo matemático francês Cauchy (1789-1857). A ideia dessa demonstração geométrica pode ser encontrada no livro de Courant (5). Para isso, vamos usar um poliedro convexo oco (ver figura 14), onde todas as faces são superfícies elásticas. Vamos retirar a face $FGHI$ desse poliedro oco, e através desse buraco (face $FGHI$), vamos esticar esse poliedro e colocá-lo numa superfície plana (ver figura 15). É como se virássemos uma máscara de mergulhador pelo avesso.

Figura 14 – Poliedro convexo



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 15 – Poliedro convexo planificado



Fonte: Produzido pelo autor

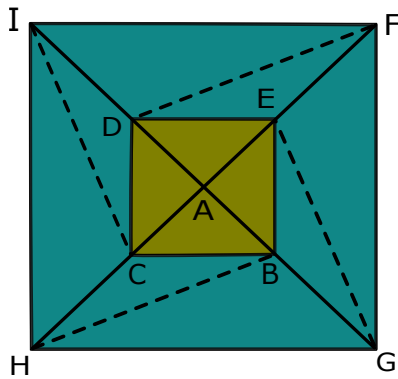
Com isso, é fácil perceber que as faces e os ângulos do poliedro irão se modificar. Afinal de contas, houve uma deformação da figura original. Observe que, com essa deformação, a quantidade de arestas e de vértices permanecem constante e o número de faces diminui de uma unidade em relação ao poliedro original (já que uma face foi retirada).

Queremos mostrar que, para a figura planificada (ver figura 16) (depois da retirada da face inicial), a relação ficará $F - 1 + V - A = 1$ e, portanto, $F + V - A = 2$. Primeiramente iremos triangularizar todas as faces da figura que se encontra no plano, da seguinte forma: os polígonos que não são triângulos, traçaremos uma diagonal. Cada vez que a gente traça uma diagonal o número de faces e o número de arestas aumentem de apenas uma unidade, sem alterar o valor da expressão $F + V - A$.

Vamos traçando diagonais até que todas as faces da figura se transformem em triângulos. Devemos observar que alguns desses triângulos terão um ou dois lados na borda da figura. Se o triângulo escolhido tiver apenas um lado na borda, então, vamos retirar esse lado (que está na borda) e a face do triângulo. Agora, se o triângulo escolhido tiver dois lados na borda, vamos retirar esses dois lados (que estão na borda), o vértice e a face do triângulo. Vamos escolher um triângulo qualquer da borda. Por exemplo, do triângulo BHG (ver figura 16), removeremos o lado GH e também a face, deixando apenas os vértices B, H, G e os lados BH e BG. Repete-se o processo para os outros triângulos (EFG, DFI e CHI). Observe que a remoção de uma aresta da borda de um triângulo do tipo CHI

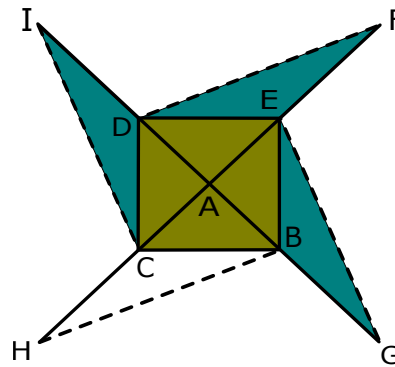
diminui o número de arestas e o número de faces de 1 unidade, sem alterar o valor de $F + V - A$, ou seja, $F - 1 + V - (A - 1) = F - 1 + V - A + 1 = F + V - A$. Porém, a remoção de um triângulo do tipo BCH (ver figura 17), removeremos a face, os dois lados (BH e CH) e o vértice H. A remoção desse tipo de triângulo diminui o número de faces e o número de vértices de 1 unidade, e também diminui o número de arestas de 2 unidades, novamente o valor da expressão $F + V - A$ permanece o mesmo, ou seja, $F - 1 + V - 1 - (A - 2) = F - 1 + V - 1 - A + 2 = F + V - A$.

Figura 16 – Dividindo em triângulos



Fonte: Produzido pelo autor

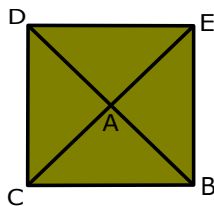
Figura 17 – Retirando triângulos



Fonte: Produzido pelo autor

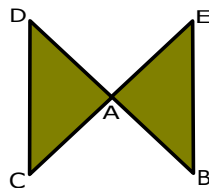
Depois de removidos os triângulo da borda, chegaremos na figura 18, onde teremos quatro triângulos. Usando o mesmo procedimento, e removendo uma face e uma aresta (aresta BC do triângulo ABC), e depois fazendo a mesma coisa com o triângulo ADE, chegaremos na figura 19. Observe que até agora, $F + V - A$ vem permanecendo constante.

Figura 18 – 4 triângulos



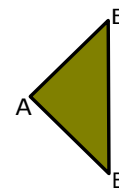
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 19 – 2 triângulos



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 20 – Um triângulo



Fonte: Produzido pelo autor

Escolhendo adequadamente essa sequência, podemos ficar removendo triângulos com lados na borda, até finalmente chegarmos a um único triângulo (ver figura 20), com seus 3 lados, 3 vértices e 1 face, onde $F + V - A = 1 + 3 - 3 = 1$. Vimos que, apagando triângulos constantemente, até restar um único triângulo, o valor de $F + V - A$ permanece constante. Portanto, na figura plana original, $F + V - A$ deve ser também igual a 1. Como esse poliedro tinha perdido uma face, então, concluímos que $F - 1 + V - A = 1$, portanto $F + V - A = 2$ para o poliedro original completo. E assim concluímos a nossa demonstração. \square

O interessante é que Euler achava que o seu teorema era válido para todos os sólidos, mas sabemos que isso não é verdade. Um exemplo desse poliedro se encontra na figura 12, onde temos uma espécie de moldura, e nessa figura temos 16 faces, 16 vértices e 32 arestas. É fácil verificar que esse sólido não obedece a relação de Euler ($F + V - A = 2$) pois, $16 + 16 - 32 = 0 \neq 2$.

“Muito provavelmente Euler (o qual nunca se deu ao trabalho de definir precisamente **poliedro**) não considerava como poliedros os sólidos, como o da figura 12, para os quais seu teorema é falso.” Elon Lages (8)

Corolário 1.5. *Seja \mathcal{P} um poliedro convexo com A arestas, V vértices e F faces. Então*

a) *A soma dos ângulos internos de todas as faces de \mathcal{P} é dado por $S = 360(V - 2)$*

b) $2A \geq 3F \geq 6 + A$

c) $2A \geq 3V \geq 6 + A$

Demonstração. a) Sabemos que a relação de Euler 1.4 ($A - F = V - 2$) é válida para todos os poliedros convexos, e que a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro qualquer, é dada por $S = 360^\circ(A - F)$. Como \mathcal{P} é um poliedro convexo, então também é válida a fórmula $S = 360^\circ(V - 2)$.

b) Sabemos que $2A \geq 3V$ (1.2). Dessa forma, $3A \geq 3V + A \Rightarrow 3A - 3V \geq A \Rightarrow 3(A - V) \geq A$. Como \mathcal{P} é um poliedro convexo, então $A - V = F - 2$, logo, $3(F - 2) \geq A$. Portanto, $3F \geq 6 + A$

c) Sabemos que $2A \geq 3F$ (1.2). Dessa forma, $3A \geq 3F + A \Rightarrow 3A - 3F \geq A \Rightarrow 3(A - F) \geq A$. Como \mathcal{P} é um poliedro convexo, então $A - F = V - 2$, logo, $3(V - 2) \geq A$. Portanto, $3V \geq 6 + A$ □

1.4 Poliedros Regulares

Os cinco poliedros regulares convexos são conhecidos desde a antiguidade e são chamados de sólidos platônicos. São a pirâmide triangular regular, o cubo, o octaedro regular, o dodecaedro regular e o icosaedro regular. Existem também os poliedros regulares não convexos, conhecidos como os poliedros de Kepler-Poinsot² (ver figura 11)

Definição 1.6. Um poliedro convexo é regular quando suas faces são polígonos regulares congruentes e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Em seguida, mostraremos, de duas maneiras diferentes (geometricamente e algebricamente), uma prova da existência de apenas cinco poliedros regulares convexos.

² São poliedros estrelados e existem apenas quatro, mas não é objeto de nosso estudo

A primeira prova, a geométrica, foi feita por Euclides (no século III a.C.), e nessa demonstração ele usou como ferramenta apenas a proposição 1.7 a seguir. Essa demonstração encontra-se no livro XIII (**Os Elementos**). É bom lembrar que àquela época, a demonstração foi feita usando apenas a geometria e construções geométricas, ou seja, a famosa relação de Euler ainda não era de conhecimento da Matemática. Isso só veio a acontecer, anos mais tarde, graças a Descartes e a Euler. A segunda demonstração, a algébrica, encontra-se em vários livros de matemática e é bastante conhecida por alunos e professores. Essa sim foi feita com a utilização da relação de Euler (1.4).

Proposição 1.7. *A soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértice de um poliedro é sempre menor do que 360° .*

Teorema 1.8. *Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.*

A demonstração feita por Euclides é bastante interessante. Ele usou como ferramenta a proposição 1.7 (que se encontra em um de seus livros), e um pouco de criatividade nas construções das figuras.

Demonstração. (Geométrica)

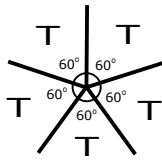
Primeiramente devemos lembrar que as faces de um poliedro regular são polígonos regulares congruentes e em todos os vértices são congruentes (concorrem o mesmo número de arestas).

Se colocarmos seis (6) triângulos equiláteros(T) em torno de um vértice, a soma dos ângulos internos em torno desse vértice será de 360° ($6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$), ou seja, os 6 triângulos estariam em um mesmo plano. Por esse motivo só podemos ter, no máximo, 5 triângulos equiláteros(T) em torno de um mesmo vértice: $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ < 360^\circ$ (ver figura 21). Portanto, concluímos que $m \leq 5$.

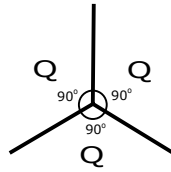
Do mesmo modo, se colocarmos quatro (4) quadrados(Q) em torno de um vértice, a soma dos ângulos internos em torno desse vértice seria de 360° ($4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$), ou seja, os 4 quadrados estariam em um mesmo plano. Por isso, só é possível construir 3 quadrados(Q) em torno de um mesmo vértice: $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ < 360^\circ$ (ver figura 22). Neste caso, $m = 3$.

Se colocarmos quatro (4) pentágonos regulares(P) em torno de um vértice, a soma dos ângulos internos em torno desse vértice seria de 432° ($4 \cdot 108^\circ = 432^\circ > 360^\circ$). Logo, só é possível colocarmos 3 pentágonos regulares em torno de um mesmo vértice: $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$ (ver figura 23). Também neste caso, $m = 3$.

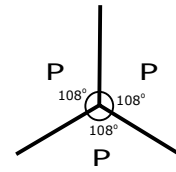
Se colocarmos três (3) hexágonos regulares em torno de um vértice, a soma dos ângulos internos em torno desse vértice será $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$, ou seja, os três (3) hexágonos regulares estariam em um mesmo plano. logo, não é possível construir poliedros em que as faces em torno de um vértice sejam formadas unicamente por polígonos regulares que tenha seis ou mais lados. Portanto, os únicos polígonos regulares que podem ser construídos em torno de um vértice são Triângulos(T), Quadrados(Q) e Pentágonos(P).

Figura 21 – ($m = 5$)

Fonte: Produzido pelo autor

Figura 22 – ($m = 3$)

Fonte: Produzido pelo autor

Figura 23 – ($m = 3$)

Fonte: Produzido pelo autor

Arranjo de polígonos em torno do vértice	Soma dos ângulos	Poliedro resultante
TTT (3 triângulos)	180°	Tetraedro
TTTT (4 triângulos)	240°	Octaedro
TTTTT (5 triângulos)	300°	Icosaedro
TTTTTT... (6 triângulos ou mais)	$\geq 360^\circ$	Não existe
QQQ (3 quadrados)	270°	Hexaedro
QQQQ... (4 quadrados)	$\geq 360^\circ$	Não existe
PPP (3 pentágonos)	324°	Dodecaedro
PPPP... (4 pentágonos ou mais)	$\geq 432^\circ$	Não existe

□

Demonstração. (Algébrica)

Nesta demonstração, usaremos como ferramenta a famosa relação de Euler. Esta é uma demonstração bastante conhecida e foi feita baseada na que se encontra no livro de Elon Lages (8).

Seja n o número de lados de cada face de um poliedro e m o número de arestas que concorrem no mesmo vértice. Como foi visto anteriormente, $2A = nF = mV$, donde $V = \frac{nF}{m}$. Usando a famosa relação de Euler ($A+2 = F+V$) e as duas relações acima, temos

$$A + 2 = F + V \Rightarrow \frac{nF}{2} + 2 = F + \frac{nF}{m} \Rightarrow mnF + 4m = 2mF + 2nF$$

$$2mF + 2nF - mnF = 4m \Rightarrow F(2m + 2n - mn) = 4m \Rightarrow F = \frac{4m}{2m + 2n - mn}.$$

É preciso que se tenha $2m + 2n - mn > 0 \Rightarrow 2n > m(n - 2) \geq 3(n - 2)$, pois $m \geq 3$.

Ou seja, $2n > 3(n - 2) \Rightarrow n < 6$, logo, $2 < n < 6$. Portanto, $n = 3, n = 4, n = 5$

$$\text{a) Para } n = 3 \Rightarrow F = \frac{4m}{2m + 2n - mn} = \frac{4m}{6 - m} > 0 \Rightarrow 3 \leq m < 6$$

$$m = 3 \Rightarrow F = 4(\text{Tetraedro})$$

$$m = 4 \Rightarrow F = 8(\text{Octaedro})$$

$$m = 5 \Rightarrow F = 20(\text{Icosaedro})$$

b) Para $n = 4 \Rightarrow F = \frac{4m}{2m + 2n - mn} = \frac{4m}{8 - 2m} > 0 \Rightarrow 3 \leq m < 4$

$m = 3 \Rightarrow F = 6(\text{Hexaedro})$

c) Para $n = 5 \Rightarrow F = \frac{4m}{2m + 2n - mn} = \frac{4m}{10 - 3m} > 0 \Rightarrow 3 \leq m < \frac{10}{3}$

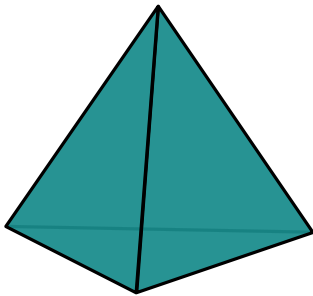
$m = 3 \Rightarrow F = 12(\text{Dodecaedro})$

□

Características dos cinco Poliedros Regulares

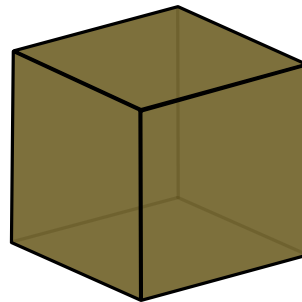
Nome	Faces(F)	Vértices(V)	Arestas(A)	n	m	arranjo dos vértices
Tetraedro	4	4	6	3	3	TTT
Hexaedro	6	8	12	4	3	QQQ
Octaedro	8	6	12	3	4	TTTT
Dodecaedro	12	20	30	5	3	PPP
Icosaedro	20	12	30	3	5	TTTTT

Figura 24 – Tetraedro Regular



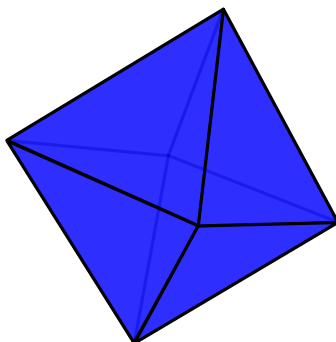
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 25 – Hexaedro Regular



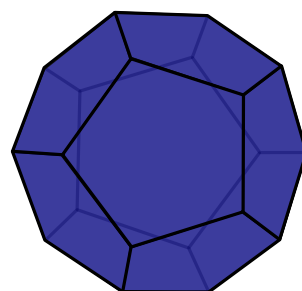
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 26 – Octaedro Regular



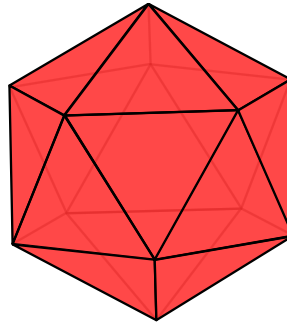
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 27 – Dodecaedro Regular



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 28 – Icosaedro Regular

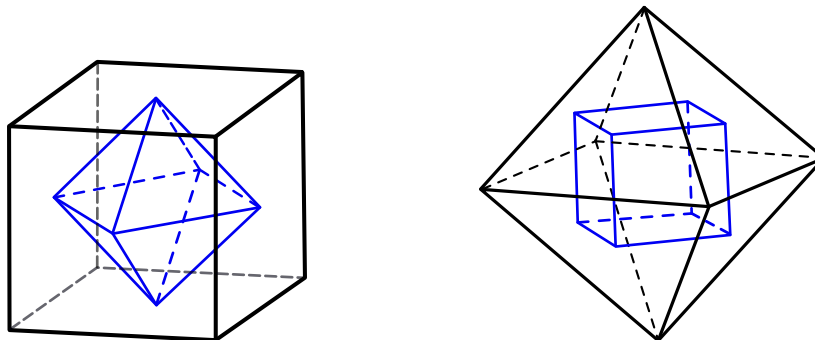


Fonte: Produzido pelo autor

Poliedros duais

Dois poliedros são duais quando o número de vértices de um deles é igual ao número de faces do outro. Por exemplo, o Cubo e o Octaedro são poliedros duais (ver figura abaixo). O dual de um poliedro regular é o poliedro que se obtém unindo-se por segmentos de reta os centros das faces consecutivas do poliedro dado.

Figura 29 – Dual-cubo-octaedro



Fonte: Produzido pelo autor

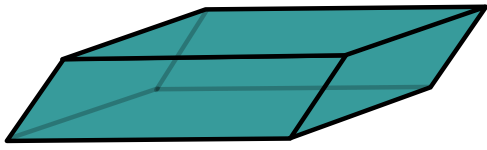
1.5 O que é um poliedro de Platão

Definição 1.9. Um poliedro convexo é denominado poliedro de Platão quando:

- i.* Todas as faces possuem o mesmo número de lados (ou seja, todas as faces possuem o mesmo valor para n).
- ii.* Em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas (ou seja, todos os vértices possuem o mesmo valor para m).

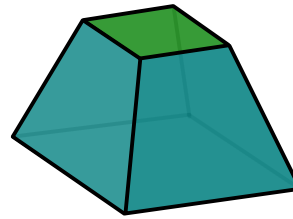
Nas figuras 30 e 31 temos dois exemplos de poliedros de Platão. Observe que todas as faces possuem um mesmo valor para n , e todos os vértices possuem o mesmo valor para m .

Figura 30 – Paralelepípedo oblíquo



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 31 – Tronco de pirâmide



Fonte: Produzido pelo autor

Obs: *Todo poliedro Regular é de Platão mas nem todo poliedro de Platão é Regular.*

2 Poliedros Arquimedianos

Arquimedes é natural de Siracusa, cidade grega situada na ilha da Sicília. É frequentemente considerado o maior matemático da antiguidade e um dos maiores de todos os tempos ao lado de Newton, Euler e Gauss. Nasceu por de volta 287 a.C. e morreu em 212 a.C. Não se conhece muita coisa sobre sua vida. Sabe-se que ele foi inventor, engenheiro, matemático, físico e astrônomo. Era filho de astrônomo e possuía alto prestígio junto ao rei Hierão. Na física, contribuiu com o estudo da hidrostática e também da estática, tendo descoberto a lei da alavanca e a lei do empuxo, que leva o seu nome. Ele também foi inventor de várias máquinas, entre elas a bomba de parafuso e algumas armas para uso militar. Na matemática, ele utilizou o método da exaustão para o cálculo da área sob um arco de parábola, utilizando a soma de uma série infinita, além de ter demonstrado uma fórmula para o cálculo do volume da esfera e da área da superfície. Por sinal, esta é considerada sua demonstração favorita, tanto é que em seu túmulo foi colocado uma escultura contendo essa demonstração.

É sabido que ele passou pouco tempo na universidade de Alexandria (Egito), e lá se encontrava com seus amigos Cônon, Dositeo e Eratóstenes. Os dois primeiros eram sucessores de Euclides e o último foi bibliotecário da universidade de Alexandria, e muitas de suas descobertas foram compartilhadas com esses três amigos. A ele se deve o estudo dos poliedros semirregulares, que também são conhecidos como poliedros arquimedianos, nome que foi dado em sua homenagem.

Figura 32 – Estátua de bronze de Arquimedes localizada no Observatório Archenhold, em Berlim. Ela foi apresentada ao público em 1972



Fonte: [Internet](#)

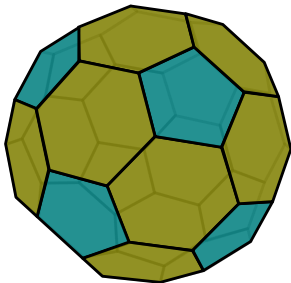
2.1 Os treze poliedros arquimedianos

Nesta parte do trabalho vamos definir poliedros arquimedianos e mostrar que existem apenas 13 desses poliedros, a menos dos prismas e anti-prismas. Foi o astrônomo e matemático alemão Johann Kepler quem os nomeou e também foi ele quem provou a existência dos únicos 13(treze). Na essência, a demonstração que faremos tem a mesma ideia da que foi usada no livro de Gregória Soler (2), sendo que neste trabalho procuramos fazer com que ela ficasse mais acessível.

Definição 2.1. Os poliedros arquimedianos são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo, e todos os seus vértices são congruentes, ou seja, existe o mesmo arranjo de polígonos em torno de cada vértice, exceto pela rotação.

Na figura 33, temos um exemplo de poliedro arquimediano, o **Icosaedro Truncado**. Esse poliedro possui 32 faces, e todos os vértices são da forma HHP , ou seja, em torno de cada vértice existem 2 hexágonos regulares e um pentágono regular. Na figura 34 temos uma bola de futebol com o formato de um Icosaedro truncado, que foi introduzida pela primeira vez na copa de 1970. Esta bola possui 32 gomos (12 pentágonos e 20 hexágonos).

Figura 33 – Icosaedro Truncado



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 34 – Bola de futebol da copa de 1970



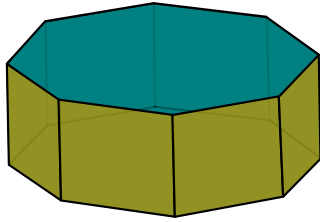
Fonte: Internet

Um **prisma** é um poliedro que possui duas faces paralelas e congruentes (as bases) e cujas faces laterais são paralelogramos. Um **anti-prisma** é um poliedro que possui duas faces paralelas e congruentes (as bases) e cujas faces laterais são triângulos. Existem infinitos **prismas** e **anti-prismas**.

Os **prismas regulares** cujas faces laterais são quadrados, de acordo com a definição, são poliedros arquimedianos. Do mesmo modo, os **anti-prismas regulares** cujas faces laterais são triângulos equiláteros também são arquimedianos. No entanto, neste trabalho estamos interessados apenas em descrever os poliedros arquimedianos que não são prismas e nem anti-prismas regulares.

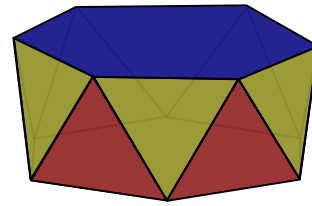
Nas figuras 35 e 36 temos um exemplo de um prisma e de um anti-prisma arquimediano, respectivamente.

Figura 35 – Prisma Octogonal Regular



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 36 – Anti-Prisma Hexagonal Regular



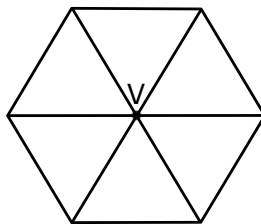
Fonte: Produzido pelo autor

Já sabemos, pela definição, que em torno de cada vértice de um poliedro arquimediano existe um mesmo arranjo de polígonos regulares e, além disso, todos os vértices possuem o mesmo valor para m (número de arestas que concorrem num mesmo vértice). Sabendo disso, vamos analisar os possíveis valores para m .

Lema 2.2. *Se \mathcal{P} é um poliedro arquimediano então os possíveis valores de m (número de arestas que concorrem no mesmo vértice de \mathcal{P}) são 3, 4 ou 5.*

Demonstração. Seja V um vértice de \mathcal{P} e seja S_V a soma dos ângulos em torno de V . Note que para $m \geq 6$ qualquer arranjo de polígonos em torno de um vértice, terá soma dos ângulos internos maior do que ou igual a 360° . Ora, se a soma dos ângulos de 6 triângulos em torno de um vértice V é 360° (ver figura 37) então, aumentando o número de lados e/ou a quantidade de polígonos em torno de V , teremos que a soma dos ângulos internos dos polígonos em torno de V será maior do que ou igual a 360° . \square

Figura 37 – Reunindo 6 triângulos equiláteros



Fonte: Produzido pelo autor

A partir de agora, iremos provar a existência dos 13 poliedros arquimedianos, a menos dos prismas e anti-prismas. Faremos essa prova observando, para cada valor de m , os possíveis arranjos de polígonos em torno de cada vértice do poliedro.

Nas demonstrações a seguir iremos sempre observar os dois itens abaixo, condições fundamentais para a construção de um poliedro arquimediano.

1. Cada vértice possui um mesmo arranjo de polígonos. Como consequência, todos os vértices possuem o mesmo valor para m .
2. A soma S_V dos ângulos em torno de um vértice V deve ser menor do que 360° ($S_V < 360^\circ$).

Observação 2.3. Vamos simbolizar os polígonos regulares da seguinte forma:

T de Triângulo, **Q** de Quadrado, **P** de Pentágono, **H** de Hexágono, **O** de Octógono, **D** de Decágono e **d** de dodecágono. E vamos chamar **X**, **Y** e **Z** de polígonos regulares quaisquer.

Observação 2.4. Seja \mathcal{P} um poliedro arquimediano e suponha que em torno de cada vértice de \mathcal{P} o polígono regular **X**, de n lados, apareça uma única vez. Então, cada vértice de \mathcal{P} corresponde a um e somente um vértice de **X**, ou seja, $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n .

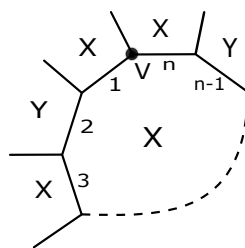
2.1.1 Poliedros arquimedianos com $m = 3$

Lema 2.5. *Seja \mathcal{P} um poliedro arquimediano tal que o número de arestas que concorrem no mesmo vértice seja 3 ($m = 3$). Então os possíveis arranjos de polígonos em torno de cada vértice são do tipo XXY ou do tipo XYZ . Além disso, temos*

- i.* Se o arranjo for do tipo XXY então o número de lados de X é par.
- ii.* Se o arranjo for do tipo XYZ então o número de lados de X, Y e Z é par.

Demonstração. *i.* Considere um polígono X de n lados, sendo n um número ímpar. Como a configuração desse poliedro é XXY , é preciso que, em cada lado do polígono X (polígono central), tenhamos, alternadamente, um polígono X e um polígono Y (ver figura 38). Lembrando que, as configurações XXY , YXX e YXX são iguais, por permutação circular.

Figura 38 – Arranjo da forma **XXY**



Fonte: Produzido pelo autor

Se o lado(1) receber o polígono X então todos os lados ímpares receberão o polígono X e todos os lados pares o Y . Como n é ímpar, o vértice V (vértice formado pelos lados 1 e n) será da forma XXX , contrariando a definição de poliedro arquimediano. O raciocínio seria o mesmo se o lado(1) iniciasse com o polígono Y . Neste caso o vértice formado pelo lado(1) e pelo lado(n) será da forma XYX .

- ii.* Suponha que o polígono X tenha número ímpar de lados. Como a configuração desse poliedro é XYZ , é preciso que em cada lado do polígono X (polígono central),

tenhamos, alternadamente, um polígono Y e um Z . Usando o mesmo argumento anterior, verifica-se que um dos vértices de X ficará com a configuração diferente.

□

Observação 2.6. Todo prisma regular de base Y , que é um poliedro arquimediano, possui a configuração em torno de cada vértice do tipo QQY , como podemos observar na Figura 35. Note também que Y pode ser qualquer polígono regular. De fato, qualquer polígono regular Y possui ângulo interno $\theta < 180^\circ$. Portanto, $S_V = 90^\circ + 90^\circ + \theta < 90^\circ + 90^\circ + 180^\circ$, ou seja, $S_V < 360^\circ$. Com isso, teremos uma infinidade de arranjos para esse caso: QQT , QQP , QQH , etc.

Lema 2.7. *Seja \mathcal{P} um poliedro arquimediano tal que, em cada vértice, o arranjo de polígonos é da forma XYZ ($m = 3$). Considere n_X, n_Y e n_Z o número de lados de cada um desses polígonos. Então*

$$\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y} + \frac{1}{n_Z} > \frac{1}{2}$$

Demonstração. Sejam i_X, i_Y, i_Z os ângulos internos dos polígonos X, Y, Z , respectivamente. Logo, em torno de um vértice V teremos $S_V < 360^\circ$, ou seja, $S_V = i_X + i_Y + i_Z < 360^\circ$.

$$\begin{aligned} \frac{180^\circ(n_X - 2)}{n_X} + \frac{180^\circ(n_Y - 2)}{n_Y} + \frac{180^\circ(n_Z - 2)}{n_Z} &< 360^\circ \\ \frac{(n_X - 2)}{n_X} + \frac{(n_Y - 2)}{n_Y} + \frac{(n_Z - 2)}{n_Z} &< 2 \\ 1 - \frac{2}{n_X} + 1 - \frac{2}{n_Y} + 1 - \frac{2}{n_Z} < 2 &\Rightarrow \frac{2}{n_X} + \frac{2}{n_Y} + \frac{2}{n_Z} > 1 \\ \text{Portanto, } \frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y} + \frac{1}{n_Z} &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

Proposição 2.8. *Para $m = 3$, teremos 7 possíveis arranjos de polígonos em torno de cada vértice V de um poliedro arquimediano.*

Demonstração. Começaremos analisando os possíveis arranjos do tipo XXY . Pelo Lema 2.5, o número de lados de X tem que ser par e pela observação 2.6 deduzimos que $n_X \geq 6$.

Vamos analisar agora caso a caso observando o lema 2.7.

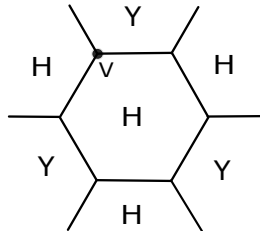
- O arranjo **HHY**

Esse arranjo só pode acontecer se Y for um triângulo equilátero ou um quadrado ou um pentágono regular (ver figura 39). Observe que

$$\frac{1}{n_H} + \frac{1}{n_H} + \frac{1}{n_Y} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{n_Y} > \frac{1}{2} \Rightarrow n_Y < 6.$$

Logo, $n_Y = 3$, $n_Y = 4$ ou $n_Y = 5$

Figura 39 – Arranjo **HHY**



Fonte: Produzido pelo autor

Temos então as seguintes configurações: **HHT**, **HHQ** e **HHP**. Vamos calcular o número de faces, vértices e arestas destes arranjos.

1. O arranjo **HHT**

Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares e y faces hexagonais. Pela observação 2.4 temos

$$V = 3x. \text{ Sendo } m = 3 \text{ então, } A = \frac{3V}{2} = \frac{9x}{2}.$$

$$\text{Por outro lado, temos que } A = \frac{3x + 6y}{2}. \text{ Assim } \frac{3x + 6y}{2} = \frac{9x}{2} \Leftrightarrow x = y.$$

$$\text{Pelo teorema de Euler, } F + V = A + 2, \text{ temos } x + y + 3x = \frac{9x}{2} + 2.$$

$$\text{Logo, } x + x + 3x = \frac{9x}{2} + 2 \Leftrightarrow x = 4 = y. \text{ Portanto, } \boxed{A=18, F=8, V=12}.$$

2. O arranjo **HHQ**

Suponha que o poliedro tenha x faces quadradas e y faces hexagonais. Pela observação 2.4 temos

$$V = 4x. \text{ Sendo } m = 3 \text{ então, } A = \frac{3V}{2} = \frac{12x}{2} = 6x.$$

$$\text{Por outro lado, temos que } A = \frac{4x + 6y}{2} = 2x + 3y.$$

$$\text{Assim } A = 2x + 3y = 6x \Leftrightarrow 4x = 3y$$

$$\text{Pelo teorema de Euler, } F + V = A + 2, \text{ temos } x + y + 4x = 6x + 2.$$

$$\text{Logo, } x + \frac{4x}{3} + 4x = 6x + 2 \Leftrightarrow x = 6 \text{ e } y = 8. \text{ Portanto, } \boxed{A=36, F=14, V=24}$$

3. O arranjo **HHP**

Suponha que o poliedro tenha x faces pentagonais e y faces hexagonais. Pela observação 2.4 temos

$$V = 5x. \text{ Sendo } m = 3 \text{ então } A = \frac{3V}{2} = \frac{15x}{2}$$

$$\text{Por outro lado, temos que } A = \frac{5x + 6y}{2} = \frac{15x}{2}$$

Assim, $5x + 6y = 15x \Leftrightarrow 3y = 5x$. Pelo teorema de Euler, $F + V = A + 2$,

$$\text{temos } x + y + 5x = \frac{15x}{2} + 2 \Leftrightarrow x + \frac{5x}{3} + 5x = \frac{15x}{2} + 2 \Rightarrow x = 12 \text{ e } y = 20.$$

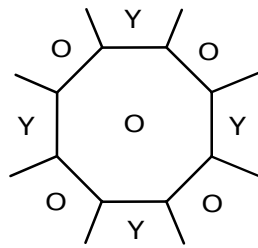
$$\text{Portanto } \boxed{A=90, F=32, V=60}$$

- O arranjo **OOY**

Esse arranjo só pode acontecer se Y for um triângulo equilátero (ver figura 40).

$$\frac{1}{n_O} + \frac{1}{n_O} + \frac{1}{n_Y} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{n_Y} > \frac{1}{2} \Rightarrow n_Y < 4. \text{ Logo, } n_Y = 3.$$

Figura 40 – Arranjo **OOY**



Fonte: Produzido pelo autor

Temos então a configuração **OOT**. Vamos calcular o número de faces, vértices e arestas deste arranjo. Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares e y faces octogonais. Pela observação 2.4 temos

$$V = 3x. \text{ Sendo } m = 3 \text{ então } A = \frac{3V}{2} = \frac{9x}{2}. \text{ Por outro lado, temos que } A = \frac{3x + 8y}{2} = \frac{9x}{2}.$$

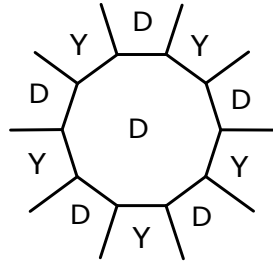
Assim, $3x + 8y = 9x \Leftrightarrow 3x = 4y$. Pelo teorema de Euler, $F + V = A + 2$, temos $x + y + 3x = \frac{9x}{2} + 2$. Logo, $x + \frac{3x}{4} + 3x = \frac{9x}{2} + 2 \Rightarrow x = 8 \text{ e } y = 6$. Portanto,

$$\boxed{A=36, F=14, V=24}$$

- O arranjo **DDY**

Esse arranjo só pode acontecer se Y for um triângulo equilátero (ver figura 41).

$$\frac{1}{n_D} + \frac{1}{n_D} + \frac{1}{n_Y} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{n_Y} > \frac{1}{2} \Rightarrow n_Y < \frac{10}{3}. \text{ Logo, } n_Y = 3.$$

Figura 41 – Arranjo **DDY**

Fonte: Produzido pelo autor

Temos então a configuração **DDT**. Vamos calcular o número de faces, vértices e arestas deste arranjo. Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares e y faces decagonais. Pela observação 2.4 temos

$$V = 3x. \text{ Sendo } m = 3 \text{ então } A = \frac{3V}{2} = \frac{9x}{2}. \text{ Por outro lado, temos que } A = \frac{3x + 10y}{2} = \frac{9x}{2}$$

Assim, $3x + 10y = 9x \Leftrightarrow 3x = 5y$. Pelo teorema de Euler, $F + V = A + 2$,

$$\text{temos } x + y + 3x = \frac{9x}{2} + 2 \Leftrightarrow x + \frac{3x}{5} + 3x = \frac{9x}{2} + 2 \Rightarrow x = 20 \text{ e } y = 12.$$

Portanto, $\boxed{A=90, F=32, V=60}$

O arranjo **ddY** (dodecágono-dodecágono-Y) não é possível de construir.

De fato, $S_V = 150^\circ + 150^\circ + 60^\circ = 360^\circ$, o que não pode acontecer.

Considere agora o arranjo em torno de um vértice do tipo **XYZ**

(os três polígonos regulares são diferentes). Usando o lema 2.7 verificamos que as configurações possíveis são:

- O arranjo **QHO**

Neste caso, $S_V = 90^\circ + 120^\circ + 135^\circ = 345^\circ < 360^\circ$.

Suponha que o poliedro tenha x quadrados, y hexágonos e z octógonos. Pela observação 2.4 temos

$$V = 4x = 6y = 8z, \text{ então } A = \frac{3V}{2} = 6x.$$

$$\text{Por outro lado, temos que } A = \frac{4x + 6y + 8z}{2} = 6x$$

Assim, $2x + 3y + 4z = 6x$. Pelo teorema de Euler, $F + V = A + 2$,

$$\text{temos } x + y + z + 4x = 6x + 2 \Leftrightarrow x + \frac{2x}{3} + \frac{x}{2} + 4x = 6x + 2 \Rightarrow x = 12, y = 8, z = 6$$

Portanto, $\boxed{A=72, F=26, V=48}$

- O arranjo **QHD**

Neste caso, $S_V = 90^\circ + 120^\circ + 144^\circ = 354^\circ < 360^\circ$

Suponha que o poliedro tenha x quadrados, y hexágonos e z decágonos.

Pela observação 2.4 temos

$$V = 4x = 6y = 10z \text{ então } A = \frac{3V}{2} = 6x.$$

$$\text{Por outro lado, temos que } A = \frac{4x + 6y + 10z}{2} = 6x$$

Assim, $2x + 3y + 5z = 6x$. Pelo teorema de Euler, $F + V = A + 2$,

$$\text{temos } x + y + z + 4x = 6x + 2 \Leftrightarrow x + \frac{2x}{3} + \frac{2x}{5} + 4x = 6x + 2 \Rightarrow x = 30, y = 20, z = 12$$

Portanto, $\boxed{A=180, F=62, V=120}$

Observe que o arranjo **QHd** (Quadrado-Hexágono-dodecágono) não é possível, pois, $S_V = 90^\circ + 120^\circ + 150^\circ = 360^\circ$. \square

A tabela abaixo faz um resumo de algumas informações importantes que foram vistas e demonstradas nessa subseção

N	Arranjo dos vértices	S_V	F	V	A
1	HHT	300°	8	12	18
2	HHQ	330°	14	24	36
3	HHP	348°	32	60	90
4	OOT	330°	14	24	36
5	DDT	348°	32	60	90
6	QHO	345°	26	48	72
7	QHD	354°	62	120	180

2.1.2 Poliedros arquimedianos com $m = 4$

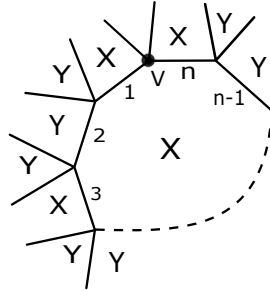
Lema 2.9. *Seja \mathcal{P} um poliedro arquimediano tal que o número de arestas que concorrem no mesmo vértice seja 4 ($m = 4$). Então os possíveis arranjos de polígonos em torno de cada vértice são do tipo $XXX Y$, $XYXY$ ou do tipo $XYXZ$. Além disso, se o arranjo for do tipo $XYXZ$ então o número de lados de X é par.*

Demonstração. Usando análise combinatória podemos notar que os casos possíveis de arranjos são $XXX Y$, $XXYY$, $XYXY$, $XXYZ$, $XYXZ$ e $XYZT$. Vamos mostrar que, pelas hipóteses do problema, os casos $XXYY$, $XXYZ$ e $XYZT$ não podem acontecer.

A distribuição $XXYY$ só é possível se o número de lados de X e Y for par. De fato, suponha que X tenha um número ímpar de lados n , então em torno de X (polígono central) distribuiremos os polígonos X e Y levando-se em consideração o tipo de arranjo.

Se o lado(1) receber o polígono X então todos os lados ímpares receberão o polígono X e todos os lados pares o Y. Como n é ímpar, o vértice **V** (formado pelos lados 1 e n) será da forma **XXYX**, contrariando a definição de poliedro arquimediano (figura 42). O mesmo argumento ocorre se o lado(1) iniciar com o polígono Y. Portanto, X e Y tem um número par de lados. Usando polígonos com menor ângulo interno possível, teremos o arranjo QQHH, que não será possível, pois, pela proposição 1.7, $S_V = 90^\circ + 90^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 420^\circ > 360^\circ$.

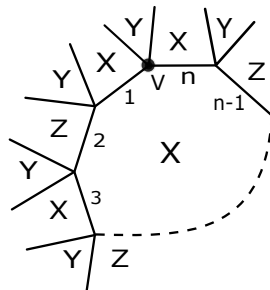
Figura 42 – Arranjo da forma **XXYY**



Fonte: Produzido pelo autor

Na distribuição **XXYZ** só é possível se X, Y e Z tiverem número de lados par. Vamos raciocinar com X no centro. Se o lado(1) receber o polígono X então todos os lados ímpares receberão o polígono X e todos os lados pares o Z. Como n é ímpar, o vértice **V** (formado pelos lados 1 e n) será da forma **XXYX**, contrariando a definição de poliedro arquimediano (figura 43). Da mesma forma, se o lado(1) iniciar com o polígono Z, o vértice V (formado pelos lados 1 e n) será da forma **XZYZ** e todos os outros vértices serão da forma **XXYZ**, o que também não pode acontecer. Portanto, n tem que ser par. Usando polígonos com menor ângulo interno possível, teremos o arranjo QQHO, que também não será possível, pois, pela proposição 1.7, $S_V = 90^\circ + 90^\circ + 120^\circ + 135^\circ = 435^\circ > 360^\circ$.

Figura 43 – Arranjo da forma **XXYZ**

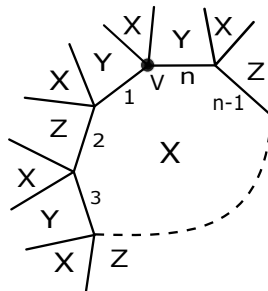


Fonte: Produzido pelo autor

A distribuição **XYZT** não pode acontecer, pois, usando polígonos com menor ângulo interno possível, teremos o arranjo TQPH cuja soma S_V dos ângulos internos é $S_V = 60^\circ + 90^\circ + 108^\circ + 120^\circ = 376^\circ > 360^\circ$.

A distribuição $XYXZ$, X tem que ter número de lados par e Y, Z pode ser par ou ímpar. Suponha, por contradição, que o polígono X tenha número ímpar de lados, ou seja, n é ímpar. Fixando X no centro, e alternando X, Y e Z entre os lados do polígono central (figura 44), observe que os arranjos de todos os vértices serão da forma $XYXZ$, exceto o vértice V (formado pelas arestas 1 e n). Fixando Y ou Z no centro, segue o mesmo raciocínio. Logo, n tem que ser par.

Figura 44 – Arranjo da forma $XYXZ$



Fonte: Produzido pelo autor

□

Observação 2.10. Todo anti-prisma regular de base Y , que é um poliedro arquimediano, possui a configuração em torno de cada vértice do tipo $TTYT$, como podemos observar na Figura 36. Note também que Y pode ser qualquer polígono regular. De fato, qualquer polígono regular Y possui ângulo interno $\theta < 180^\circ$. Portanto $S_V = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + \theta < 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 180^\circ$, ou seja, $S_V < 360^\circ$. Com isso, teremos uma infinidade de arranjos para esse caso: $TTTQ, TTTP, TTTH$, etc.

Proposição 2.11. Para $m = 4$, teremos 4 possíveis arranjos de polígonos em torno de cada vértice V de um poliedro arquimediano.

Pelo lema 2.9 os possíveis arranjos de nesse caso são $XXXY, XYXY, XYXZ$.

- O arranjo **XXXY**

Pela observação 2.10, $n_X \geq 4$. Daí, $3 \cdot 90^\circ + i_Y \leq S_V < 360^\circ \Rightarrow i_Y < 90^\circ \Rightarrow n_Y = 3$.

Temos então a configuração **QQQT**

Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares e y faces quadradas.

Pela observação 2.4 temos

$$V = 3x. \text{ Sendo } m = 4 \text{ então, } A = \frac{4V}{2} = 6x.$$

$$\text{Por outro lado, temos que } A = \frac{3x + 4y}{2} = 6x \Leftrightarrow 9x = 4y.$$

$$\text{Pelo teorema de Euler, } F + V = A + 2, \text{ temos } x + y + 3x = 6x + 2$$

Assim, $x + \frac{9x}{4} + 3x = 6x + 2 \Leftrightarrow x = 8$ e $y = 18$.

Portanto, $\boxed{A=48, F=26, V=24}$

• O arranjo **XYXY**

Suponha que o número de lados do polígono X seja maior do que ou igual a 6, ou seja $i_X \geq 120^\circ$, logo pela proposição 1.7, temos que

$$2 \cdot 120^\circ + 2i_Y \leq S_V = 2i_X + 2i_Y < 360^\circ \Rightarrow i_Y < 60^\circ,$$

o que é um absurdo. Dessa forma, o número de lados dos polígonos X e Y não pode ser maior do que ou igual a 6

Portanto, X ou Y só podem ser T , Q , P . Percebe-se também que não podemos ter $QPQP$ (ou $PQPQ$), pois, nesse caso $S_V = 2 \cdot 90^\circ + 2 \cdot 108^\circ = 396^\circ > 360^\circ$. Portanto, as únicas configurações possíveis são $TQTQ$ e $TPTP$.

1. O arranjo **TQTQ**

Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares e y faces quadradas.

Observe que cada vértice do poliedro possui dois triângulos e dois quadrados, logo cada vértice do triângulo e cada vértice do quadrado estão sendo contado duas vezes, portanto, $V = \frac{3x}{2} = \frac{4y}{2} \Rightarrow 3x = 4y$. Sendo $m = 4$, então, $A = \frac{4V}{2} = 2V = 3x = 4y$.

Pelo teorema de Euler, $F + V = A + 2$, temos $x + y + \frac{3x}{2} = 3x + 2$

Logo, $x + \frac{3x}{4} + \frac{3x}{2} = 3x + 2 \Leftrightarrow x = 8$ e $y = 6$. Portanto, $\boxed{A=24, F=14, V=12}$

2. O arranjo **TPTP**

Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares e y faces pentagonais

Observe que cada vértice do poliedro possui dois triângulos e dois pentágonos, logo cada vértice do triângulo e cada vértice do pentágono estão sendo contado duas vezes, portanto, $V = \frac{3x}{2} = \frac{5y}{2} \Rightarrow 3x = 5y$. Sendo $m = 4$, então, $A = \frac{4V}{2} = 2V = 3x = 5y$.

Pelo teorema de Euler, $F + V = A + 2$, temos $x + y + \frac{3x}{2} = 3x + 2$

Logo, $x + \frac{3x}{5} + \frac{3x}{2} = 3x + 2 \Leftrightarrow x = 20$ e $y = 12$. Portanto, $\boxed{A=60, F=32, V=30}$

- O arranjo **XYXZ**

Já foi mostrado que o número de lados de X é par. Pela proposição 1.7, temos que $2 \cdot 90^\circ + i_Y + i_Z \leq S_V < 360^\circ \Rightarrow i_Y + i_Z < 180^\circ$. A única possibilidade possível é $i_Y = 60^\circ$ e $i_Z = 108^\circ$, ou vice-versa. Portanto, a única configuração possível é QTQP que, por permutação circular, é igual a QPQT.

Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares, y faces quadrados e z faces pentagonais. Pela observação 2.4 temos

$$V = 3x = 5z = \frac{4y}{2} = 2y. \text{ Sendo } m = 4, A = \frac{4V}{2} = 2V = 6x = 4y = 10z.$$

Pelo teorema de Euler, $F + V = A + 2$, temos $x + y + z + 3x = 6x + 2$

$$\text{Logo, } y + z = 2x + 2 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} + \frac{3x}{5} = 2x + 2 \Leftrightarrow x = 20, y = 30, z = 12$$

Portanto, $\boxed{A=120, F=62, V=60}$

A tabela abaixo faz um resumo de algumas informações importantes que foram vistas e demonstradas nessa subseção

N	Arranjo dos vértices	S_V	F	V	A
1	QQQT	330°	26	24	48
2	TQTQ	300°	14	12	24
3	TPTP	336°	32	30	60
4	QTQP	348°	62	60	120

2.1.3 Poliedros arquimedianos com $m = 5$

Proposição 2.12. Para $m = 5$, teremos 2 possíveis arranjos de polígonos em torno de cada vértice V de um poliedro arquimediano.

Demonstração. Em torno de cada vértice do poliedro, teremos 5 polígonos. Sabemos que $S_V < 360^\circ$ e que o polígono regular de menor ângulo interno é o triângulo equilátero, portanto o menor valor para a soma dos ângulos em torno de um vértice de um poliedro arquimediano deve ser $240^\circ + i_X$, que é equivalente ao arranjo de 4 triângulos equiláteros mais um polígono X . Ou seja, $240^\circ + i_X \leq S_V < 360^\circ \Rightarrow i_X \leq 120^\circ$, portanto, $4 \leq n_X \leq 5$. Concluimos que, para $m = 5$, não teremos nenhum polígono com mais de cinco lados.

Suponha que cada vértice do poliedro tenha x faces triangulares, y faces quadradas e z faces pentagonais. Portanto,

$$\begin{cases} 60x + 90y + 108z < 360^\circ \\ x + y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 15y + 18z < 60^\circ \\ x + y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 15y + 18z < 60^\circ \\ -10x - 10y - 10z = -50 \end{cases}$$

Somando membro a membro, teremos $5y+8z < 10$, cuja solução é dada por $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. A solução $(0, 0)$ será descartada, pois, neste caso $x = 5$, ou seja, teríamos todos os polígonos congruentes em torno de um vértice (5 triângulos equiláteros), o que não pode acontecer. Portanto, as únicas soluções são $(4, 1, 0)$, $(4, 0, 1)$, ou seja, 4 triângulos e 1 quadrado ou 4 triângulos e 1 pentágono.

□

- O arranjo **TTTTQ**

Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares e y faces quadradas

Pela observação 2.4 temos

$$V = 4y \text{ Sendo } m = 5, \text{ então, } A = \frac{5V}{2} = \frac{20y}{2} = 10y.$$

Pelo teorema de Euler, $F + V = A + 2$, temos $x + y + 4y = 10y + 2 \Leftrightarrow x = 5y + 2$

Por outro lado, temos que $A = \frac{3x + 4y}{2} = 10y \Leftrightarrow 3x = 16y$. Logo, $x = 32$, $y = 6$

Portanto, $\boxed{A=60, F=38, V=24}$

- O arranjo **TTTTP**

Suponha que o poliedro tenha x faces triangulares e y faces pentagonais Pela observação 2.4 temos

$$V = 5y. \text{ Sendo } m = 5, \text{ então, } A = \frac{5V}{2} = \frac{25y}{2}.$$

Pelo teorema de Euler, $F + V = A + 2$, temos $x + y + 5y = \frac{25y}{2} + 2 \Leftrightarrow 2x = 13y + 4$.

Por outro lado, temos que $A = \frac{3x + 5y}{2} = \frac{25y}{2} \Leftrightarrow 3x = 20y$. Logo, $x = 80$, $y = 12$

Portanto, $\boxed{A=150, F=92, V=60}$

A tabela abaixo faz um resumo de algumas informações importantes que foram vistas e demonstradas nessa subseção

N	Arranjo dos vértices	S_V	F	V	A
1	TTTTQ	330°	38	24	60
2	TTTTP	348°	92	60	150

Com isso, mostramos que existem 13 arranjos de polígonos em torno de cada vértice de um poliedro arquimedianos. Dos treze arranjos, temos que sete são do tipo $m = 3$, quatro do tipo $m = 4$ e dois $m = 5$. Para cada tipo de arranjo temos um determinado poliedro arquimediano. Mostraremos na próxima seção quais são esses poliedros.

2.2 Obtendo os Poliedros Arquimedianos

Exceto por uma classe de prismas e anti-prismas (ver figuras 35 e 36), existem apenas treze poliedros arquimedianos e mostraremos nesta seção que todos podem ser obtidos através de operações feitas sobre os poliedros regulares de Platão. Essas operações são truncamentos (cortes), que são de dois tipos, ou snubificação, operação que consiste em afastar todas as faces (rotacionando-as ou não) do poliedro primitivo e preenchendo os espaços vazios com polígonos regulares. Quando as faces são afastadas sem rotacionarmos, chamamos essa snubificação de expansão.

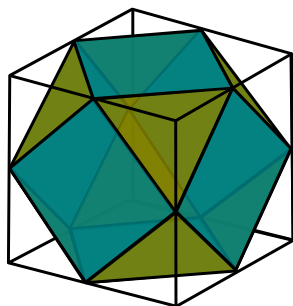
2.2.1 Operações sobre os Poliedros

Segundo o dicionário Aurélio (10): *Truncar* [Do lat. *truncare.*] V.t.d. 1. Separar do tronco. 2. Cortar parte de; mutilar. 3. Geom. Interceptar (sólido geométrico) por um plano secante.

Das várias formas que existem para se truncar um poliedro, utilizaremos apenas duas delas e vamos denominá-las de truncamento tipo-1 e tipo-2. No truncamento **tipo-1** o corte é feito pelos pontos médios das arestas que concorrem no mesmo vértice (ver figura 45) e no **tipo-2** o corte é feito de tal forma que a face do novo poliedro seja um polígono regular que tenha o dobro do número de lados da face do poliedro primitivo (antes do corte) (ver figura 46).

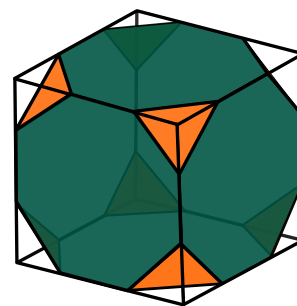
Independente do tipo de truncamento, cada vértice se transforma em uma nova face. Além disso, as partes retiradas sempre serão pirâmides regulares, onde o número de lados do polígono da base será igual ao número de arestas que concorrem num mesmo vértice (m), e o corte será perpendicular ao eixo de pirâmide.

Figura 45 – Cuboctaedro(corte tipo-1)



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 46 – Cubo Truncado(corte tipo-2)



Fonte: Produzido pelo autor

A **snubificação** de um poliedro regular é uma operação que consiste em afastar todas as faces desse poliedro, rotacionando-as ou não, e preenchendo os espaços vazios com polígonos regulares. No caso de haver rotação (normalmente é de 45 graus), essa operação é chamada simplesmente de snubificação.

Quando não houver rotação, a snubificação é conhecida como expansão. Os poliedros obtidos através de expansão são chamados de rombos, e os obtidos através de snubificação são chamados de snub.

Na **expansão**, entre as arestas afastadas, o preenchimento é feito com 1 (um) quadrado, e entre os vértices o preenchimento é feito com um polígono regular cujo número de lados é igual a m (número de arestas que concorrem no mesmo vértice).

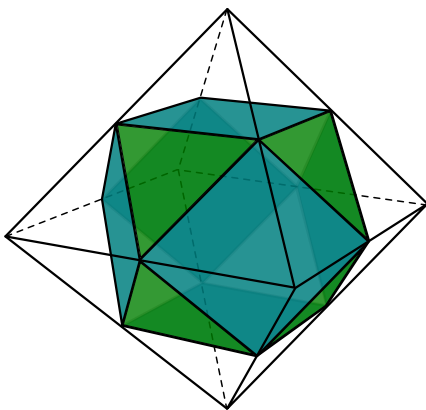
Na **snubificação**, entre as arestas afastadas, o preenchimento é feito com 2 (dois) triângulos equiláteros, e entre os vértices o preenchimento é feito com polígonos regulares: triângulos, quadrados ou pentágonos, dependendo do valor de m .

A partir de agora, mostraremos os poliedros arquimedianos obtidos por operações feitas sobre os poliedros de Platão, além de suas características principais.

01. Cuboctaedro

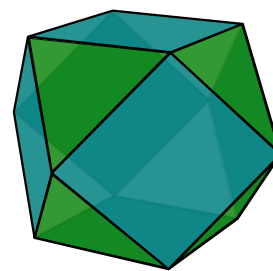
Fazendo o **truncamento tipo-1** no **cubo** ou no **octaedro regular**, obtemos o **cuboctaedro** (ver figuras 45 e 48). De fato o octaedro possui 8 faces triângulos equiláteros, 12 arestas, 6 vértices e $m = 4$, portanto após o truncamento vamos obter 8 faces triângulos equiláteros (mesma quantidade de faces do octaedro) mais 6 faces quadradas (que foi formada a partir dos 6 vértices do octaedro). Com isso teremos um total de 14 faces. Daí, $2A = 3F_3 + 4F_4 = 3 \times 8 + 4 \times 6 = 48$, logo, $A = 24$ e $V = A - F + 2 = 24 - 14 + 2 = 12$.

Figura 47 – Truncando o octaedro



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 48 – Cuboctaedro



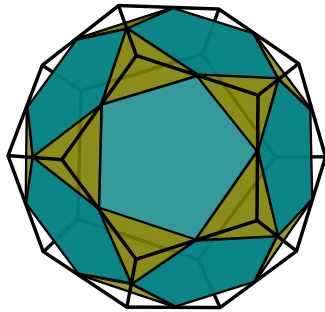
Fonte: Produzido pelo autor

02. Icosidodecaedro

Fazendo o **truncamento tipo-1** no **dodecaedro regular** ou no **icosaedro regular**, obtemos o **Icosidodecaedro** (ver figura 50). De fato o dodecaedro regular possui 12 faces pentágonos regulares, 30 arestas e 20 vértices e $m = 3$, portanto após o truncamento vamos obter 12 faces pentágono regulares (mesma quantidade de faces do dodecaedro) mais 20 faces triângulos equiláteros (que foi formada a partir dos 20 vértices do dodecaedro).

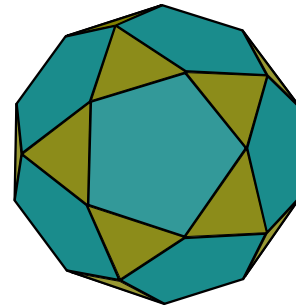
Com isso teremos um total de 32 faces. Daí, $2A = 3F_3 + 5F_5 = 3 \times 20 + 5 \times 12 = 120$, logo, $A = 60$ e $V = A - F + 2 = 60 - 32 + 2 = 30$.

Figura 49 – Truncando o dodecaedro



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 50 – Icosidodecaedro



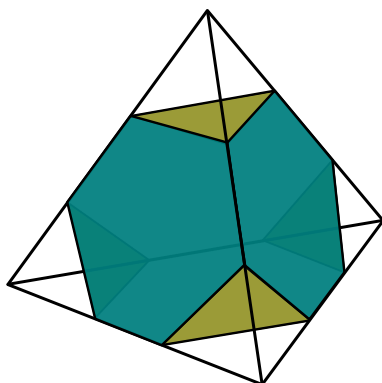
Fonte: Produzido pelo autor

Agora faremos o **truncamento tipo-2** nos 5 poliedros regulares e também no cuboctaedro e no icosidodecaedro. Lembrando que, no truncamento tipo-2, o corte é feito de tal forma que a face do novo poliedro seja um polígono regular que tenha o dobro do número de lados da face do poliedro primitivo (antes do corte). Uma coisa importante é que, toda vez que aparecer a palavra **truncado** no nome de um poliedro, é porque se trata do truncamento tipo-2.

03. Tetraedro Truncado

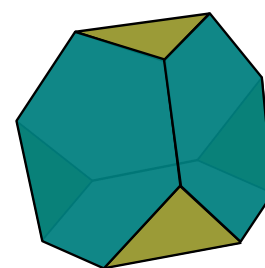
O **Tetraedro Truncado** (figura 52) é obtido através do truncamento tipo-2 feito no tetraedro regular (figura 51). O tetraedro regular possui 4 faces triangulares, 6 arestas, 4 vértices e $m = 3$, portanto, fazendo o truncamento tipo-2 nesse poliedro, obtemos 4 faces hexagonais (mesma quantidade do tetraedro) mais 4 faces triangulares (que foi formada a partir dos 4 vértices do tetraedro), formando um total de 8 faces. Daí, o número de arestas e o número de vértices são $2A = 3F_3 + 6F_6 = 6 \times 4 + 3 \times 4 = 36$, logo, $A = 18$ e $V = A - F + 2 = 18 - 8 + 2 = 12$.

Figura 51 – Truncando o tetraedro



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 52 – Tetraedro Truncado

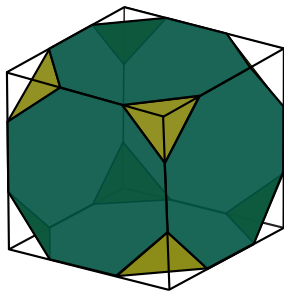


Fonte: Produzido pelo autor

04. Cubo Truncado

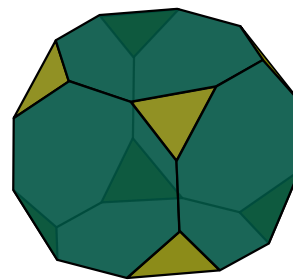
O **Cubo Truncado** (figura 54) é obtido através do truncamento tipo-2 feito no cubo (figura 53). O cubo possui 6 faces quadradas, 12 arestas, 8 vértices e $m = 3$, portanto, fazendo o truncamento tipo-2 neste poliedro, obtemos 6 faces octogonais (mesma quantidade das faces do cubo) mais 8 faces triangulares (que foi formada a partir dos 8 vértices do cubo), formando um total de 14 faces. Daí, o número de arestas e o número de vértices são $2A = 3F_3 + 8F_8 = 3 \times 8 + 8 \times 6 = 72$, logo, $A = 36$ e $V = A - F + 2 = 36 - 14 + 2 = 24$.

Figura 53 – Truncado o cubo



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 54 – Cubo Truncado

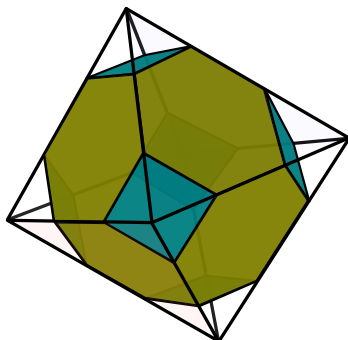


Fonte: Produzido pelo autor

05. Octaedro Truncado

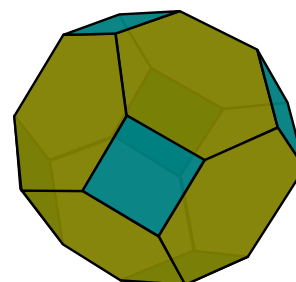
O **Octaedro Truncado** (figura 56) é obtido através do truncamento tipo-2 feito no octaedro regular (figura 55). O octaedro regular possui 8 faces triângulos, 12 arestas, 6 vértices e $m = 4$, portanto, fazendo o truncamento tipo-2 neste poliedro, obtemos 8 faces hexagonais (mesma quantidade das faces do octaedro) mais 6 faces quadradas (que foi formada a partir dos 6 vértices do octaedro), formando um total de 14 faces. Daí, o número de arestas e o número de vértices são $2A = 4F_4 + 6F_6 = 4 \times 6 + 6 \times 8 = 72$, logo, $A = 36$ e $V = A - F + 2 = 36 - 14 + 2 = 24$.

Figura 55 – Truncado o octaedro



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 56 – Octaedro Truncado

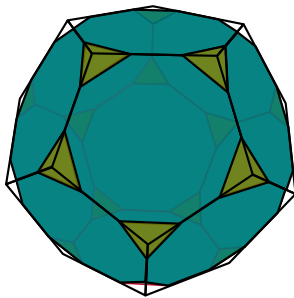


Fonte: Produzido pelo autor

06. Dodecaedro Truncado

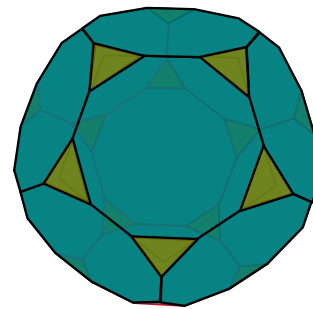
O **Dodecaedro Truncado** (figura 58) é obtido através do truncamento tipo-2 feito no dodecaedro regular (figura 57). O dodecaedro regular possui 12 faces pentagonais, 30 arestas, 20 vértices e $m = 3$, portanto, fazendo o truncamento tipo-2 neste poliedro, obtemos 12 faces decágonos regulares (mesma quantidade das faces pentagonais do dodecaedro) mais 20 faces triângulos equiláteros (que foi formada a partir dos 20 vértices do dodecaedro), formando um total de 32 faces. Daí, o número de arestas e o número de vértices são $2A = 3F_3 + 10F_{10} = 3 \times 20 + 10 \times 12 = 180$, logo, $A = 90$ e $V = A - F + 2 = 90 - 32 + 2 = 60$.

Figura 57 – Truncado o dodecaedro



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 58 – Dodecaedro Truncado

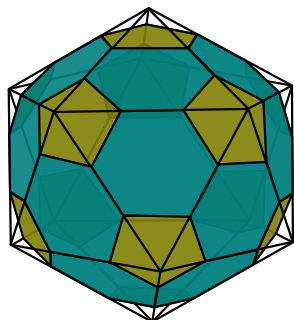


Fonte: Produzido pelo autor

07. Icosaedro Truncado

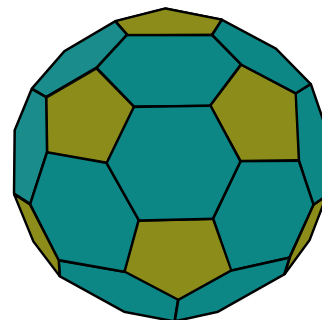
O **Icosaedro Truncado** (figura 60) é obtido através do truncamento tipo-2 feito no icosaedro regular (figura 59). O icosaedro regular possui 20 faces triangulares, 30 arestas, 12 vértices e $m = 5$, portanto, fazendo o truncamento tipo-2 neste poliedro, obtemos 20 faces hexágonos regulares mais 12 faces pentágonos regulares (que foi formada a partir dos 12 vértices do Icosaedro), formando um total de 32 faces. Daí, o número de arestas e o número de vértices são $2A = 5F_5 + 6F_6 = 5 \times 12 + 6 \times 20 = 180$, logo, $A = 90$ e $V = A - F + 2 = 90 - 32 + 2 = 60$.

Figura 59 – Truncado o icosaedro



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 60 – Icosaedro Truncado

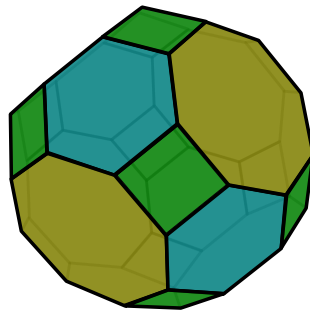


Fonte: Produzido pelo autor

08. Cuboctaedro Truncado

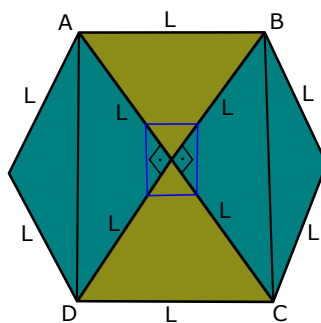
O **Cuboctaedro Truncado** (ver figura 61) é obtido através de um truncamento feito no cuboctaedro. O cuboctaedro (ver figura) possui 6 faces quadradas, 8 faces triângulos equiláteros, 24 arestas, 12 vértices e $m = 3$, portanto, fazendo o truncamento tipo-2 neste poliedro vamos obter 6 faces octogonais, 8 faces hexagonais e 12 faces **retangulares** (que foi formada a partir dos 12 vértices), totalizando 26 faces. O truncamento do cuboctaedro gera um poliedro que não é arquimediano, pois algumas de suas faces não são polígonos regulares (são retângulos), como mostra a figura 62. É fácil verificar que qualquer corte em torno de um vértice, perpendicular ao eixo da pirâmide, gera um retângulo. O quadrilátero $ABCD$ (figura 62), maior corte possível em torno do vértice, é um retângulo de lados medindo L e $L\sqrt{2}$. Qualquer outro corte em torno de um vértice, vai gerar retângulos de lados proporcionais a L e $L\sqrt{2}$.

Figura 61 – Cuboctaedro Truncado (ou grande rombicuboctaedro)



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 62 – Vista de um Cuboctaedro a partir de um dos vértices



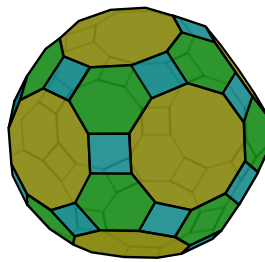
Fonte: Produzido pelo autor

Entretanto, fazendo um ajuste adequado, podemos transformá-lo em um poliedro arquimediano. Para isso, basta fazer com que as faces retangulares se transformem em quadrados. Daí, o número de arestas e o número de vértices são $2A = 4F_4 + 6F_6 + 8F_8 = 4 \times 12 + 6 \times 8 + 8 \times 6 = 144$, logo, $A = 72$ e $V = A - F + 2 = 72 - 26 + 2 = 48$.

09. Icosidodecaedro Truncado

O **Icosidodecaedro** possui 20 faces triângulos equiláteros, 12 pentágonos regulares, 60 arestas, 30 vértices e $m = 4$. Fazendo o truncamento tipo-2, vamos obter o **icosidodecaedro truncado** ou (**grande rombicosidodecaedro**) (ver figura 63), que possui 20 faces hexágonos, 12 faces decágonos e 30 faces **retângulos** (que foi formada a partir dos 12 vértices), totalizando 62 faces. Observe que o truncamento do icosidodecaedro gera um poliedro que não é arquimediano, pois algumas de suas faces não são regulares (são retângulos). Porém, fazendo um ajuste adequado, podemos transformá-lo em um poliedro arquimediano. Para isso, basta fazer com que as faces retangulares se transformem em quadrados. Daí, o número de arestas e o número de vértices são $2A = 4F_4 + 6F_6 + 10F_{10} = 4 \times 12 + 6 \times 20 + 10 \times 12 = 360$, logo, $A = 180$ e $V = A - F + 2 = 180 - 62 + 2 = 120$.

Figura 63 – Icosidodecaedro Truncado (ou grande rombicosidodecaedro)

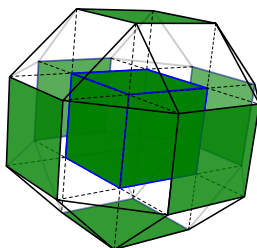


Fonte: Produzido pelo autor

10. Rombicuboctaedro

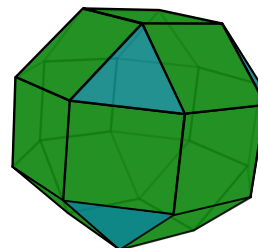
Fazendo a expansão no cubo (ver figura 64) ou no octaedro regular, obtemos o **rombicuboctaedro** (ver figura 65). Vamos raciocinar a partir do cubo, que possui 6 faces quadradas, 12 arestas, 8 vértices e $m = 3$. O mesmo raciocínio poderia ser feito com o octaedro. Com a expansão das faces do cubo, as 12 arestas formarão mais 12 quadrados. Teremos então 18 quadrados ($6 + 12 = 18$) e mais 8 triângulos equiláteros (já que são 8 vértices). Ficando um total de 26 faces. Daí, o número de arestas e o número de vértices são $2A = 3F_3 + 4F_4 = 3 \times 8 + 4 \times 18 = 96$, logo, $A = 48$ e $V = A - F + 2 = 48 - 26 + 2 = 24$.

Figura 64 – Expansão das faces do cubo



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 65 – Rombicuboctaedro

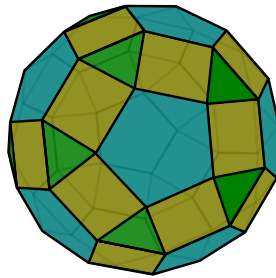


Fonte: Produzido pelo autor

11. Rombicosidodecaedro (ou pequeno rombosidodecaedro)

Fazendo a expansão no dodecaedro regular ou no icosaedro regular, obtemos o **rombosidodecaedro** (ou **pequeno rombosidodecaedro**) (ver figura 66). Vamos raciocinar a partir do dodecaedro regular, que possui 12 faces pentágonos regulares, 30 arestas, 20 vértices e $m = 3$. O mesmo raciocínio poderia ser feito com o icosaedro. Com a expansão das faces do dodecaedro, as 30 arestas formarão 30 quadrados e os 20 vértices formarão mais 20 triângulos equiláteros. Teremos então 12 faces pentágonos regulares, mais 30 faces quadrados e mais 20 triângulos equiláteros (já que são 20 vértices). Ficando um total de 62 faces. Daí, o número de arestas e o número de vértices são $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 = 3 \times 20 + 4 \times 30 + 5 \times 12 = 240$, logo, $A = 120$ e $V = A - F + 2 = 120 - 62 + 2 = 60$.

Figura 66 – Rombosidodecaedro (ou pequeno rombosidodecaedro)

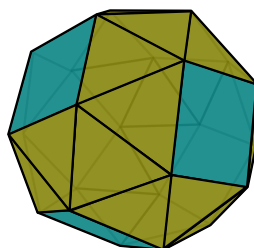


Fonte: Produzido pelo autor

12. Cubo snub (ou cuboctaedro snub)

Fazendo a snubificação no cubo ou no octaedro regular, obtemos o **cubo snub** (ou **cuboctaedro snub**) (ver figura 67). Vamos raciocinar a partir do cubo, que possui 6 faces quadradas, 12 arestas, 8 vértices e $m = 3$. O mesmo raciocínio poderia ser feito com o octaedro. Com a snubificação do cubo, teremos 24 triângulos equiláteros, que irão preencher os espaços vazios entre as arestas afastadas do cubo, 8 triângulos equiláteros, formados a partir dos vértices (pois $m = 3$), além dos 6 quadrados que já existiam, ficando um total de 38 faces. Daí, o número de arestas e o número de vértices são $2A = 3F_3 + 4F_4 = 3 \times 32 + 4 \times 6 = 120$, logo, $A = 60$ e $V = A - F + 2 = 60 - 38 + 2 = 24$.

Figura 67 – Cubo snub (ou cuboctaedro snub)

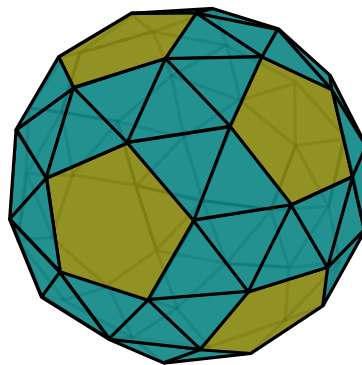


Fonte: Produzido pelo autor

13. Dodecaedro snub (ou icosidodecaedro snub)

Fazendo a snubificação no dodecaedro regular ou no icosaedro regular, obtemos o **dodecaedro snub** (ou **icosidodecaedro snub**) (ver figura 68). Vamos raciocinar a partir do dodecaedro, que possui 12 faces pentágonos regulares, 30 arestas, 20 vértices e $m = 3$. O mesmo raciocínio poderia ser feito com o icosaedro. Com a snubificação do dodecaedro, teremos 60 triângulos equiláteros, que irão preencher os espaços vazios entre as arestas afastadas do dodecaedro, 20 triângulos equiláteros, formados a partir dos vértices (pois $m = 3$), além dos 12 pentágonos regulares que já existiam, ficando um total de 92 faces. Daí, o número de arestas e o número de vértices são $2A = 3F_3 + 5F_5 = 3 \times 80 + 5 \times 12 = 300$, logo, $A = 150$ e $V = A - F + 2 = 150 - 92 + 2 = 60$.

Figura 68 – Dodecaedro snub (ou icosidodecaedro snub)



Fonte: Produzido pelo autor

observação: Fazendo o Truncamento tipo-1 no tetraedro regular, vamos obter o Octaedro Regular. Fazendo a Snubificação no tetraedro regular, vamos obter o Icosaedro Regular e fazendo a Expansão no tetraedro regular, obtemos o Cuboctaedro.

Na figura seguinte, temos uma tabela com informações que achamos importantes sobre os treze poliedros de Arquimedes. A tabela foi montada da seguinte forma: Primeiramente colocamos os poliedros obtidos com o corte tipo-1, depois os obtidos com o corte tipo-2, logo depois, vêm os obtidos por expansão e, por último, os obtidos através da snubificação. Observe na tabela que temos 2(dois) poliedros formados com o corte tipo-1, 7(sete) poliedros com o corte tipo-2, 2(dois) poliedros com a expansão e 2(dois) poliedros com a snubificação.

Características dos treze Poliedros de Arquimedes

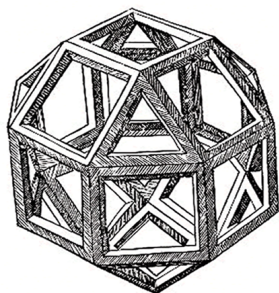
<i>n</i>	<i>nome do poliedro</i>	F	V	A	m	<i>As Faces</i>	<i>Arranjo de Polígonos</i>
1	Cuboctaedro	14	12	24	4	8T e 6Q	QTQT
2	Icosidodecaedro	32	30	60	4	20T e 12P	PTPT
3	Tetraedro Truncado	8	12	18	3	4T e 4H	HHT
4	Cubo Truncado	14	24	36	3	8T e 6O	OOT
5	Octaedro Truncado	14	24	36	3	6Q e 8H	HHQ
6	Dodecaedro Truncado	32	60	90	3	20T e 12D	DDT
7	Icosaedro Truncado	32	60	90	3	12P e 20H	HHP
8	Cuboctaedro Truncado	26	48	72	3	12Q, 8H e 6O	QHO
9	Icosidodecaedro Truncado(ou grande rombicosidodecaedro)	62	120	180	3	30Q, 20H e 12D	QHD
10	Rombicuboctaedro	26	24	48	4	8T e 18Q	TQQQ
11	Rombicosidodecaedro(ou pequeno rombicosidodecaedro)	62	60	120	4	20T, 30Q e 12P	TQPQ
12	Cubosnub(ou cuboctaedro snub)	38	24	60	5	32T e 6Q	TTTTQ
13	Dodecaedrosnub(ou icosidodecaedro snub)	92	60	150	5	80T e 12P	TTTTP

2.3 Poliedros arquimedianos - Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci nasceu na Itália em 15 de abril de 1452. É considerado um dos maiores pintores do Renascimento e um dos maiores gênios da humanidade. Foi brilhante nas ciências e na arte, e era um grande apaixonado pelas figuras geométricas. Em um dos livros de Luca Pacioli, *Divina Proportione*, editado em Florença em 1509, aparecem desenhos de poliedros, em particular arquimedianos, de autoria de Leonardo da Vinci (ver figuras 69 e 70). Por sinal, esse desenho do Rombicuboctaedro é a ilustração mais antiga que se conhece desse sólido.

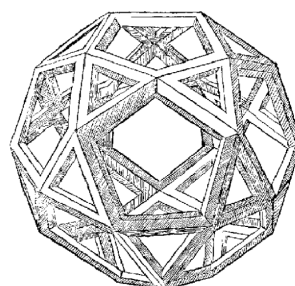
Leonardo da Vinci ficava impressionado quando o corte de dois sólidos diferentes resultava no mesmo corpo semirregular (arquimadiano). Por exemplo, o corte do dodecaedro e do icosaedro resulta no icosidodecaedro, formado por pentágonos regulares e triângulos equiláteros, de forma alternada.

Figura 69 – Rombicuboctaedro



Fonte: Internet

Figura 70 – Icosidodecaedro



Fonte: Internet

3 Usando o programa Sagemath

3.1 O que é o Sage

O SageMath é um software livre, de código aberto, criado em 2005. Ele foi criado como alternativa de código aberto a outros programas, como o Magma, Maple, Mathematica e MATLAB. Ele foi feito especialmente para trabalhar em algumas áreas da Matemática, tais como: álgebra, teoria dos números, computação numérica, geometria, criptografia, cálculo e áreas afins. Usar um software livre tem muitas vantagens, uma dessas vantagens é a garantia de que qualquer usuário será capaz de exibir e manipular o software sem a necessidade de aquisição de software proprietário. Além disso, qualquer pessoa poderá alterar o código fonte. Já com o software proprietário isso não é possível.

O foco principal deste capítulo é mostrar como utilizar o **SageMath** para a construção gráfica dos poliedros arquimedianos. A partir dos vértices, podemos construir qualquer poliedro convexo com este programa, pois o Sage possui um comando que gera o menor poliedro possível a partir dos vértices. Partindo dos poliedros regulares (Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro), temos como encontrar, usando a teoria vetorial, os vértices de um poliedro arquimediano a partir da equação $P - A = t.(B - A)$, onde A e B são vértices conhecidos e $t \in R$ é um parâmetro. Para um determinado valor de t ($0 \leq t \leq 1$), o programa vai gerar um determinado poliedro arquimediano. Neste capítulo, mostraremos como construir todos os poliedros arquimedianos, com exceção do cubo snub e do dodecaedro snub.

3.2 Uma breve introdução sobre o Sage

Sequem alguns comandos e operações que foram usados no Sagemath para nossa implementação de construção de poliedros.

Listas

Listas são estruturas capazes de armazenar sequência de elementos em uma ordem definida. Diferente da maioria de outros sistemas computacionais, os elementos de uma lista são indexados a partir do zero ($e(0)$). Os elementos de uma lista ficam entre colchetes e separados por vírgula. $Lista = [e_0, e_1, \dots, e_i]$. Vejamos um exemplo no Sage:

```
sage: L=[4,5,6,7,8,10,11,4,4,4,4]
```

O comando `len(L)` determina o número de itens de L. Vejamos um exemplo:

```
sage: len(L)
```

Os comandos `append` e `remove` são usados, respectivamente, para adicionar e remover elementos de uma lista. Vejamos um exemplo:

```
sage: a=[]
sage: a.append(2)
sage: a.append(23)
sage: a.append(34);a
[2,23,34]
sage: a.remove(23);a
[2,34]
```

Vetores

Um vetor de coordenadas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ é construído a partir do comando `vector([x_1, x_2, x_3, \dots, x_n])`. Vejamos um exemplo:

```
sage: v=vector([2,4,-8]); v
(2, 4, -8)
```

Vejamos algumas operações com vetores implementados no próprio Sage:

01. Soma de vetores: $v + w$

Exemplo:

```
sage: v=vector([1,2,7]); w=vector([-2,-3,8]); v+w
(-1, -1, 15)
```

02. Subtração de vetores: $v - w$

Exemplo:

```
sage: v=vector([1,2,7]); w=vector([-2,-3,8]); v-w
(3, 5, -1)
```

03. Produto vetorial: $v \times w$

Exemplo:

```
sage: v=vector([1,2,7]); w=vector([-2,-3,8]); v.cross_product(w)
(37, -22, 1)
```

04. Norma de um vetor: $\|v\|$

Exemplo:

```
sage: v=vector([1,2,3]); v.norm()
sqrt(14)
```

05. Produto escalar entre dois vetores: $\langle v, w \rangle$

Exemplo:

```
sage: v=vector([1,2,7]); w=vector([-2,-3,8]); v*w
48
```

06. Produto de um vetor por escalar: $k.v$

Exemplo:

```
sage: k=var('k')
sage: v=vector([1,2,7]); k*v
(k, 2k, 7k)
```

07. Ângulo entre dois vetores: $\theta = \arccos\left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}\right)$

Exemplo:

```
sage: v=vector([1,0,1]); w=vector([0,1,1])
sage: acos((v*w)/(norm(v)*norm(w)))
pi/3
```

Poliedros

Seguem alguns comandos usados para Poliedros:

`tetrahedron()`: comando para construir um tetraedro.

`cube()`: comando para construir um cubo.

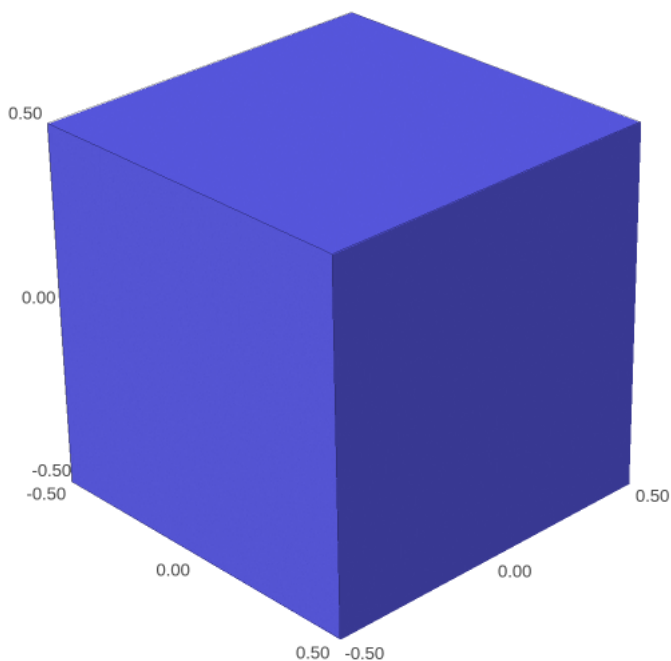
`octahedron()`: comando para construir um octaedro.

`dodecahedron()`: comando para construir um dodecaedro.

`icosahedron()`: comando para construir um icosaedro.

Para exemplificar, mostraremos como criar um cubo e como obter a lista de vértices e de faces.

```
sage: cube()
```

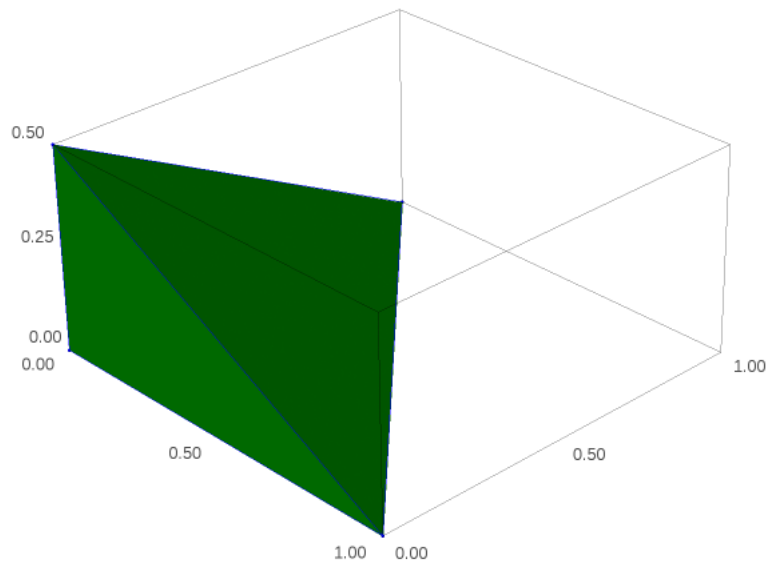


```
sage: cube().vertex_list() # o sage mostra todos os vértices do cubo.
[(0.5,0.5,0.5),(-0.5,0.5,0.5),(-0.5,-0.5,0.5),(0.5,-0.5,0.5),
(0.5,0.5,-0.5),(-0.5,0.5,-0.5), (0.5,-0.5,-0.5),(-0.5,-0.5,-0.5)]
```

```
sage: cube().face_list() # o sage mostra a lista das faces do cubo.
[[ (0.5, 0.5, 0.5), (-0.5, 0.5, 0.5), (-0.5, -0.5, 0.5), (0.5, -0.5, 0.5) ],
 [ (0.5, 0.5, 0.5), (0.5, 0.5, -0.5), (-0.5, 0.5, -0.5), (-0.5, 0.5, 0.5) ],
 [ (0.5, 0.5, 0.5), (0.5, -0.5, 0.5), (0.5, -0.5, -0.5), (0.5, 0.5, -0.5) ],
 [ (-0.5, 0.5, -0.5), (0.5, 0.5, -0.5), (0.5, -0.5, -0.5), (-0.5, -0.5, -0.5) ],
 [ (0.5, -0.5, -0.5), (0.5, -0.5, 0.5), (-0.5, -0.5, 0.5), (-0.5, -0.5, -0.5) ],
 [ (-0.5, -0.5, 0.5), (-0.5, 0.5, 0.5), (-0.5, 0.5, -0.5), (-0.5, -0.5, -0.5) ]]
```

`plot(polyhedron(lista de coordenadas))`: Comando para gerar qualquer poliedro a partir dos vértices. Vejamos a plotagem de um poliedro a partir de 4 vértices:

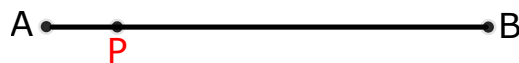
```
sage: plot(Polyhedron([1,0,0], [0,1,0], [0,0,0], [0,0,1/2]))
sage: plot(Polyhedron(vertices), aspect_ratio=(1,1,1))
```



3.3 Encontrando um ponto P em um segmento AB

Dado um segmento de reta AB , queremos encontrar um ponto P , $P \in AB$ (ver figura 71), conhecendo-se os pontos A , B e um parâmetro $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$

Figura 71 – Segmento de reta AB



Fonte: Produzido pelo autor

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB} \quad (\text{Parametrização de um segmento de reta})$$

$$P - A = t \cdot (B - A) \Rightarrow \boxed{P = A + t \cdot (B - A)}$$

$$\text{Para } t = 0 \Rightarrow P = A + 0 \cdot (B - A) \Rightarrow P = A$$

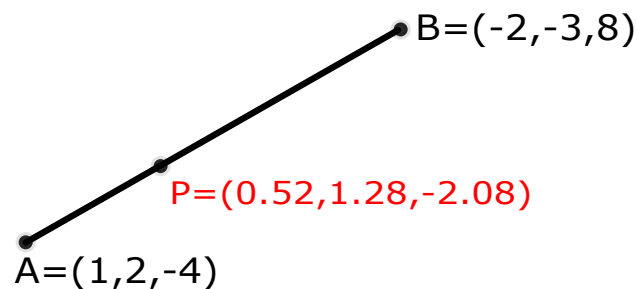
$$\text{Para } t = 1 \Rightarrow P = A + 1 \cdot (B - A) \Rightarrow P = B$$

É fácil perceber que todo vértice de uma face qualquer de um poliedro também é vértice do poliedro, e vice-versa, e que as faces primitivas (face do poliedro antes do corte) só podem ser triângulos equiláteros, quadrados ou pentágonos regulares. A partir dessas faces primitivas, temos como encontrar os novos vértices das faces do poliedro truncado. Para cada tipo de face, faremos o cálculo dos novos vértices; as outras faces seguem o mesmo raciocínio. Para encontrarmos os novos vértices, primeiramente precisamos saber qual é o valor do parâmetro t na equação $P = A + t.(B - A)$. Para o corte tipo-1, temos que $t = 1/2$ (no ponto médio) e para o corte tipo-2, temos que $0 < t < 1/2$.

Vejamos um exemplo no Sage: sejam os pontos $A = (1, 2, -4)$ e $B = (-2, -3, 8)$. Vamos encontrar um ponto P do segmento AB , tal que $t = 0,24$

```
sage: A=vector([1,2,-4]); B=vector([-2,-3,8]); A+0.24*B
(0.5200000000000000, 1.2800000000000000, -2.0800000000000000)
```

Figura 72 – Segmento

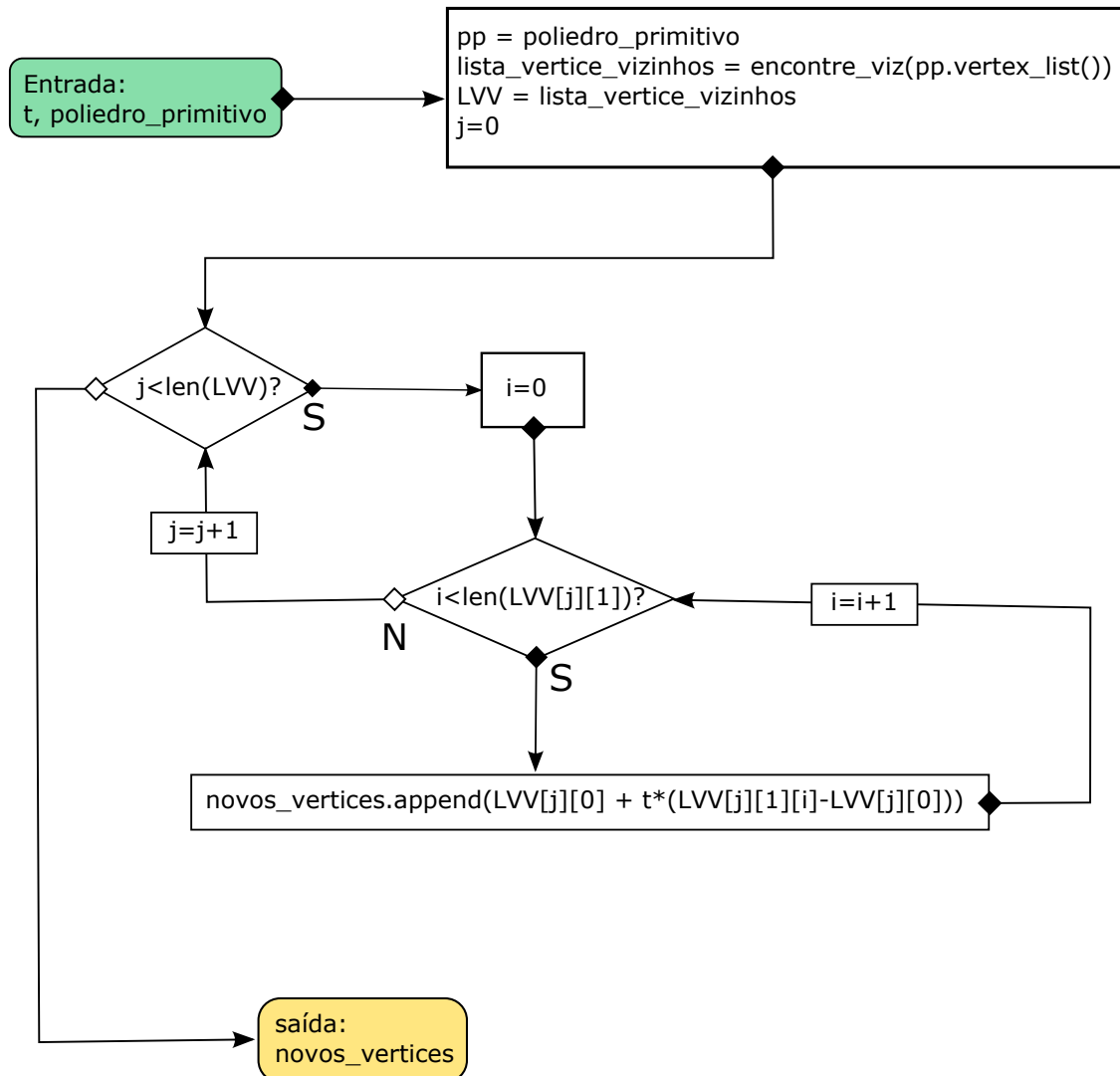


Fonte: Produzido pelo autor

3.4 Fluxograma para truncamento

O fluxograma da figura 73 representa um algoritmo desenvolvido para a construção de poliedros formados através do TRUNCAMENTO. Para isso, primeiramente, precisamos de um poliedro primitivo para fazermos o truncamento, e também de um valor para o parâmetro t , $t \in R$. Com essas duas informações, o programa construirá um poliedro. Porém, para se construir um poliedro arquimediano, precisamos que o poliedro primitivo seja regular e que o parâmetro t tenha um valor específico, variando entre 0 e $1/2$ ($0 < t < \frac{1}{2}$).

Figura 73 – Fluxograma-2



Fonte: Produzido pelo co-orientador

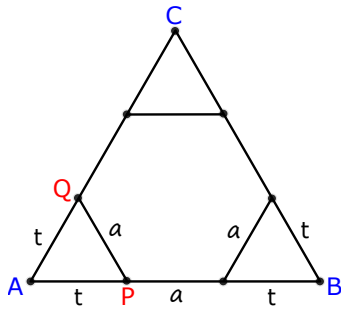
O código fonte do fluxograma para truncamento (fluxograma acima) encontra-se no apêndice.

3.5 Truncando os poliedros regulares

Na figura 74, temos a face triângulo equilátero. Esta face aparece no Tetraedro, Octaedro, Icosaedro, Cuboctaedro e Icosidodecaedro. Depois de truncarmos estes sólidos, a face que é triangular se transforma em um hexágono regular, ou seja, todos os vértices do triângulo deixam de existir e surgem novos vértices (do hexágono). Então, a partir dos vértices do triângulo equilátero ABC de lado L (já conhecido), queremos encontrar todos os vértices do hexágono regular inscrito nesse triângulo. Para isso, primeiramente precisamos encontrar o valor de t na equação $P = A + t.(B - A)$. Faremos o cálculo apenas para o

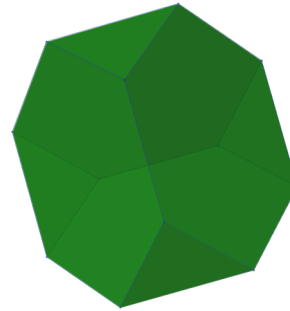
vértice P ; os outros seguem o mesmo procedimento. Na figura 74 temos os vértices A e B e queremos encontrar o novo vértice P . Precisamos saber apenas quem é o parâmetro t na equação $P = A + t.(B - A)$. É fácil ver que o triângulo APQ é equilátero, logo, $t = a = \frac{L}{3}$. Fazendo $L = 1$ (lado da face triangular), temos que $P = A + \frac{1}{3}.(B - A) = \frac{1}{3}.(2A + B)$.

Figura 74 – Face Triangular



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 75 – Tetraedro Truncado

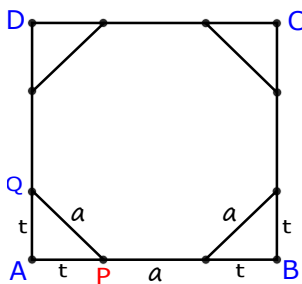


Fonte: Implementado no Sage

Com a nossa implementação de corte de poliedros feita no Sage, e usando como parâmetros $t=0,3333$ e `poliedro=tetrahedron()`, obtemos a figura 75.

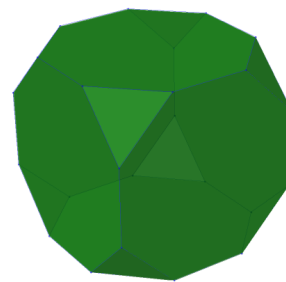
Na figura 76, temos a face quadrada $ABCD$ de lado L . Esta face quadrada aparece no Hexaedro (cubo) e no Cuboctaedro. Depois de truncarmos esses dois sólidos, a face quadrada se transforma num octógono regular inscrito. Queremos encontrar todos os vértices desse octógono regular. Faremos o cálculo apenas para o vértice P ; os outros seguem o mesmo procedimento.

Figura 76 – Face Quadrada



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 77 – Cubo Truncado



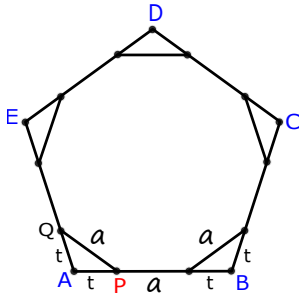
Fonte: Implementado no Sage

Conhecemos os vértices A e B e queremos encontrar o vértice P . Para isso, precisamos descobrir quem é o parâmetro t na equação $P = A + t.(B - A)$. Observe que $AB = 2t + a = L$. Usando o teorema de Pitágoras no triângulo APQ , temos que $a = t\sqrt{2}$. Portanto, $t = \frac{L}{2 + \sqrt{2}} = \frac{1(2 - \sqrt{2})}{2} \cong 0,2929$.

Com a nossa implementação de corte de poliedros feita no Sage, e usando como parâmetros $t=0,2929$ e `poliedro=cube()`, obtemos a figura 77.

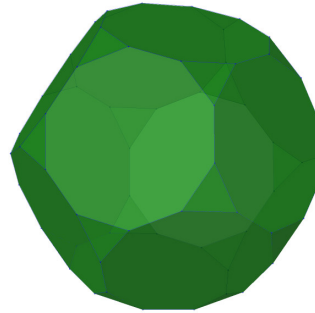
Na figura 78 conhecemos os vértices do pentágono $ABCDE$ de lado L . Esta face pentagonal aparece apenas no Dodecaedro regular (poliedro primitivo). Depois de truncarmos o dodecaedro regular, a face pentagonal se transforma num decágono regular inscrito. Queremos encontrar todos os vértices desse decágono regular. Faremos o cálculo apenas para o vértice P ; os outros seguem o mesmo procedimento.

Figura 78 – Face Pentagonal



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 79 – Dodecaedro Truncado



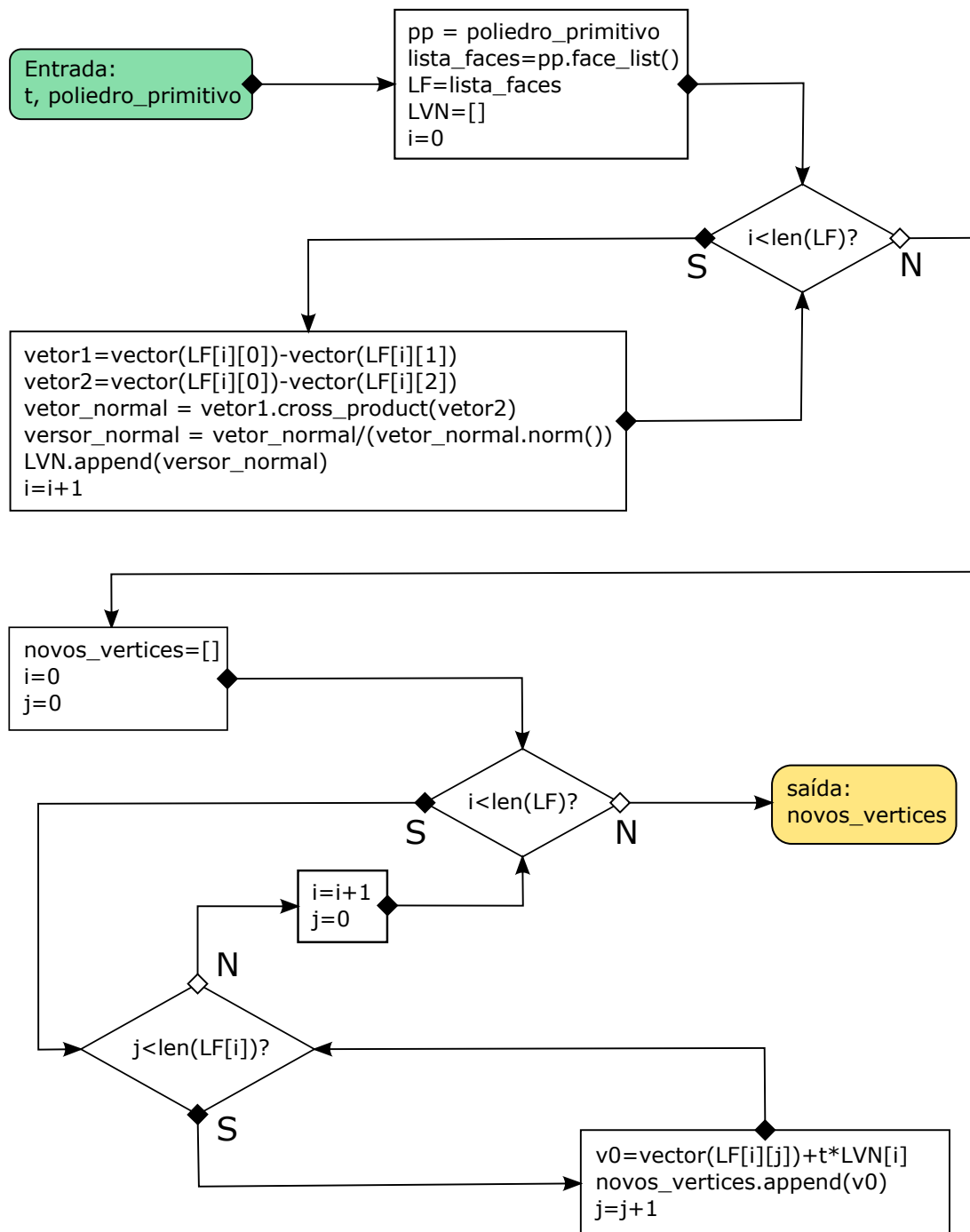
Fonte: Implementado no Sage

Conhecemos os vértices A e B e queremos encontrar o vértice P . Para isso, precisamos descobrir quem é o parâmetro t na equação $P = A + t.(B - A)$. Observe que $AB = 2t + a = L$. O ângulo interno do pentágono é 108° e o $\cos(108^\circ) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Usando a lei dos cossenos no triângulo APQ (ver figura 78), temos que $a^2 = t^2 + t^2 - 2 \cdot t \cdot t \cdot \cos(108^\circ) \Rightarrow t = 1 \cdot \frac{4-\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{5-\sqrt{5}} \cong 0,2764$. Com a nossa implementação de corte de poliedros feita no Sage, e usando como parâmetros $t=0,2764$ e `poliedro=dodecahedron()`, obtemos a figura 79.

3.6 Fluxograma para expansão

O fluxograma da figura 80 representa um algoritmo desenvolvido para a construção de poliedros formados através da EXPANSÃO (os ROMBOS). Para isso, primeiramente, precisamos de um poliedro primitivo, e também de um valor qualquer para o parâmetro t , $t \in R$. Com essas duas informações, o programa construirá algum poliedro por expansão. Porém, para se construir um poliedro arquimediano, precisamos que o poliedro primitivo seja regular e que o parâmetro t tenha um valor específico, variando entre 0 e 1 ($0 < t < 1$). Inicialmente o programa encontra os vetores normais de cada face do poliedro primitivo e normaliza-os. Com isso, sabendo-se os vértices de uma face, o vetor normal e o parâmetro t , conseguiremos encontrar todos os vértices (das novas faces) do poliedro arquimediano.

Figura 80 – Fluxograma-1



Fonte: Produzido pelo co-orientador

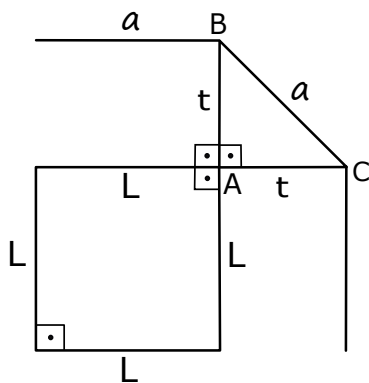
O código fonte do fluxograma para expansão (fluxograma acima) encontra-se no apêndice.

3.7 Expansão

A expansão é uma operação que consiste em afastar todas as faces de um poliedro regular de t unidades, sem fazer rotação. Vamos mostrar, nesta seção, como encontrar esse valor de t para a expansão do cubo e do dodecaedro.

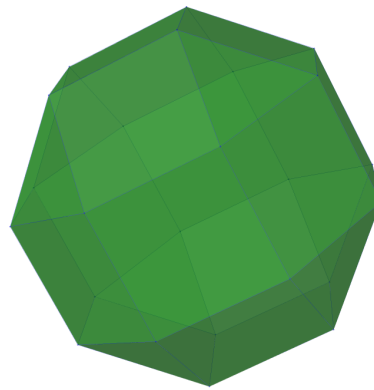
A) Expansão do cubo

Figura 81 – Expansão do cubo



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 82 – Rombicuboctaedro

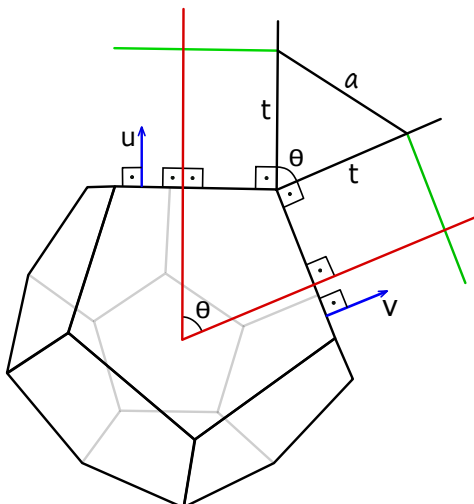


Fonte: Implementado no Sage

Com a expansão do cubo (figura 81), temos que $a = L$. No triângulo retângulo ABC da figura acima temos que: $t^2 + t^2 = a \Rightarrow t = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cong 0,7071a$. No caso, usamos um Cubo cuja aresta $L = 1$ (lado do quadrado). Com a nossa implementação de expansão de poliedros feita no Sage, e usando como parâmetros $t=0.7071$ e `poliedro=cube()`, obtemos a figura 82.

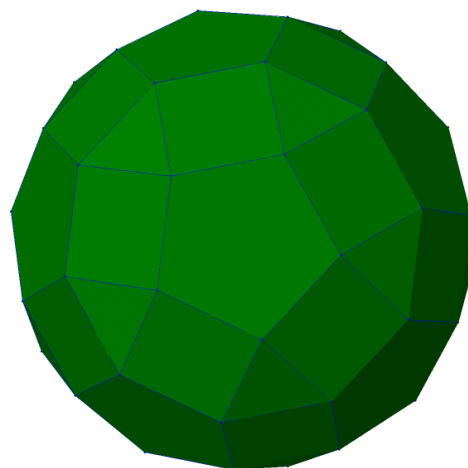
B) Expansão do dodecaedro

Figura 83 – Expansão do dodecaedro



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 84 – Rombicosidodecaedro



Fonte: Implementado no Sage

Usando a lei dos cossenos no triângulo da figura 83 temos que:

$$a^2 = t^2 + t^2 - 2 \cdot t \cdot t \cdot \cos\theta \Rightarrow a^2 = 2 \cdot t^2 - 2 \cdot t^2 \cos\theta \Rightarrow t = a \cdot \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos\theta)}}$$

Para encontrarmos o $\cos\theta$, faremos o produto escalar entre os vetores u e v :

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Com a nossa implementação de expansão de poliedros feita no Sage, e usando como parâmetros $\tau=0.6787$ e `poliedro=dodecaedro()`, obtemos a figura 84.

4 Oficina arquimediana

4.1 Introdução

Este capítulo IV trata de uma oficina feita na tentativa de comprovar um de nossos objetivos, ou seja, que poliedros arquimedianos podem ser inseridos e abordados no contexto do ensino básico. “Vygotsky, na Rússia, e Bruner, nos Estados Unidos, concordaram que as experiências no mundo real constituem o caminho para a criança construir seu raciocínio”. (9)

Uma oficina é uma ferramenta pedagógica onde o participante adquire conhecimento através da experiência prática, sendo um importante meio na construção de saberes. É na oficina que se produz o conhecimento prático e teórico, de forma ativa e reflexiva. A oficina também poderia ser vista como o local de sedimentação de um estudo teórico prévio. “Piaget deixou claro que o conhecimento se dá pela ação refletida sobre o objeto.” (9)

Este é um tema em que o lúdico pode ser trabalhado como uma ferramenta pedagógica de ensino e aprendizagem, ou seja, podemos usá-lo para que os alunos aprendam através das construções e montagens; aprender se divertindo, aprender brincando, aprender fazendo e observando o mundo físico (mundo real).

*Definição da palavra **lúdico** (adjetivo):*

Feito através de jogos, brincadeiras, atividades criativas. Que faz referência a jogos ou brinquedos: brincadeiras lúdicas. Divertido; que tem o divertimento acima de qualquer outro propósito. Que faz alguma coisa simplesmente pelo prazer em fazê-la.

Disponível em: <https://www.dicio.com.br/ludico/>, página consultada em 30/03/2017.

Segundo Lorenzato (9)

“Muitos foram os educadores famosos que, nos últimos séculos, ressaltaram a importância do apoio visual ou visual-tátil como facilitador para a aprendizagem. Assim, por exemplo, por volta de 1650, Comenius escreveu que o ensino deveria dar-se do concreto para o abstrato, justificando que o conhecimento começa pelos sentidos e que só se aprende fazendo. Locke, em 1680, dizia da necessidade da experiência sensível para alcançar o conhecimento. Cerca de cem anos depois, Rousseau recomendou a experiência direta sobre os objetos, visando à aprendizagem.”

O interessante é que os sólidos arquimedianos, por si só, tem essa característica estética recreativa; uma beleza plástica e visual que fascina e faz com que o aluno queira manuseá-la e queira brincar de fazer montagem. São essas brincadeiras que precisamos resgatar. Temos que trazer, na medida do possível, o divertimento para dentro da sala

de aula. O brincar, como ferramenta educativa, talvez seja, na maioria das situações, a melhor forma de aprendizagem. “Arquimedes revelou o modo pelo qual fazia descobertas matemáticas e confirmou a importância das imagens e dos objetos no processo de construção de novos saberes.” (9)

4.2 A oficina

A nossa oficina teve a participação de 18 alunos e foi dividida entre parte teórica e parte prática. Na parte teórica, apresentada através de *slides* (com duração de duas horas), vimos resumidamente boa parte dos poliedros de Platão e de Arquimedes.

Primeiramente, de forma breve, abordamos os poliedros regulares de Platão. Mostramos duas relações importantes para poliedros regulares: $A = nF/2$ (entre arestas e faces) e $A = mV/2$ (entre arestas e vértices), vimos a relação de Euler para poliedros convexos e apresentamos os cinco poliedros regulares de Platão: Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro.

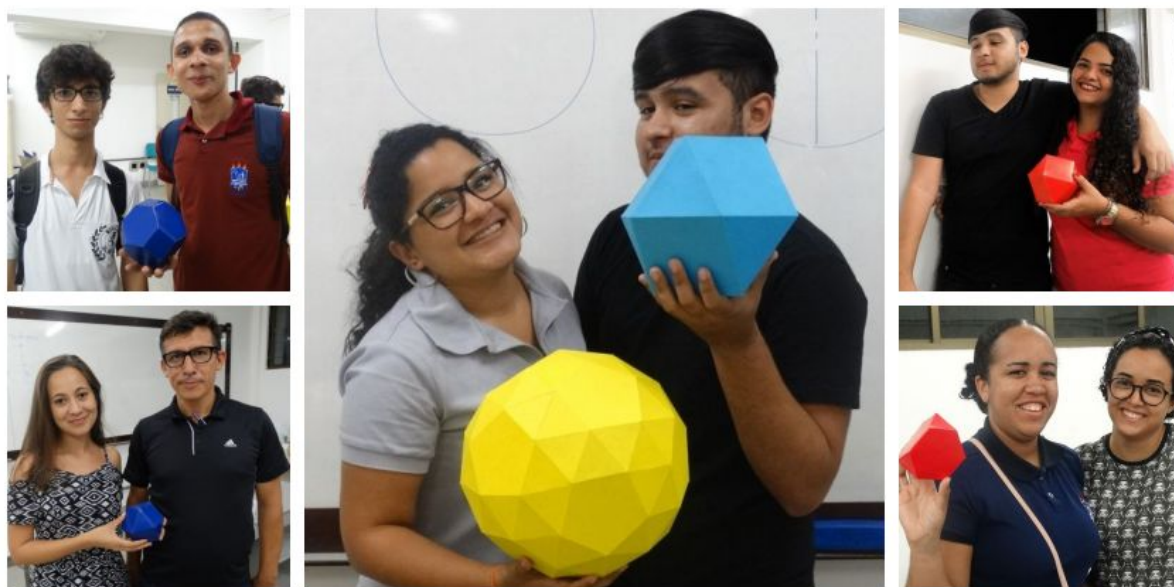
Figura 85 – Foto da oficina



Em seguida, abordamos os poliedros de Arquimedianos, tema central de nosso trabalho. Fizemos uma breve introdução, falando sobre o personagem Arquimedes e depois definindo os poliedros arquimedianos. Mostramos os prismas e anti-prismas (classes de poliedros arquimedianos) e fizemos um breve comentário sobre essas duas classes. Mostramos como se obtém um poliedro arquimediano através de Truncamento (os dois tipos), da expansão (rombo) e do snubimento. Mostramos aos alunos os poliedros de Arquimedes tanto através de slides como através de modelos construídos com papel cartão. Falamos sobre a formação dos nomes de cada poliedro e o tipo de cada corte. Apresentamos um vídeo mostrando a construção de um poliedro através da expansão e através do snubimento.

Em seguida, entregamos a cada aluno uma ficha com 13 problemas sobre poliedros arquimedianos (4.3) para que fosse resolvida em sala. Após essa atividade, iniciamos a parte prática (construção e montagem) da oficina.

Figura 86 – Foto da oficina



Fonte: Departamento de Matemática da UFRPE

A parte prática teve duração de aproximadamente duas horas. Os alunos formaram grupos de 3 ou 4 alunos, e cada grupo recebeu caneta, folha de papel cartão, cola, tesoura, régua, compasso e transferidor, como também as 13 planificações(4.5). Foi sugerido que cada grupo escolhesse uma das treze planificações. Antes de começar a montagem do sólido, cada grupo teve que redesenhar de forma ampliada a planificação no papel cartão. Neste momento se fez necessário uma intervenção sobre a construção de polígonos regulares semelhantes (usando régua, compasso e transferidor). Depois disso, foi iniciada a construção e montagem das peças. Ao final da oficina, eles receberam um questionário(4.4) cujo resultado se encontra na seção.

Figura 87 – Foto da oficina



Fonte: Departamento de Matemática da UFRPE

Figura 88 – Foto da oficina



Fonte: Departamento de Matemática da UFRPE

4.3 Lista de exercícios

Lista de Exercícios sobre poliedros arquimedianos

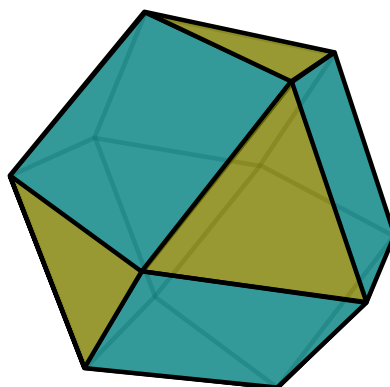
Aluno do PROFMAT: José Ribamar de Souza Neves

Professora orientadora: Dra. Bárbara Costa

Professor coorientador: Dr. Ricardo Machado

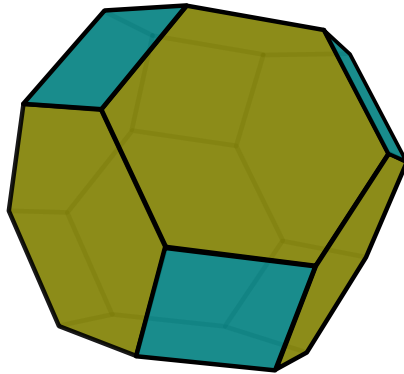
Data: 18/10/2016

01. No truncamento do tipo-1, se uma das faces do poliedro primitivo (antes de trincar) possuir n lados, quantos lados terá essa mesma face no poliedro truncado ?
02. No truncamento do tipo-2, se uma das faces do poliedro primitivo (antes de trincar) possuir n lados, quantos lados terá essa mesma face no poliedro truncado ?
03. No truncamento do tipo-1, se o poliedro primitivo (antes de trincar) tiver A arestas, quantos vértices terá o poliedro truncado ?
04. No truncamento do tipo-2, se o poliedro primitivo (antes de trincar) tiver A arestas, quantos vértices terá o poliedro truncado ?
05. Se o poliedro primitivo (antes de trincar) tiver F faces e V vértices, quantas faces terá o poliedro truncado? A resposta será mesma qualquer que seja o tipo de corte? Justifique sua resposta.
06. Os poliedros arquimedianos são obtidos por operações feitas sobre os Poliedros Regulares. Essas operações podem ser truncamento (cortes) de dois tipos ou através de uma snubificação (operação que consiste em afastar todas as faces do poliedro, e preencher os espaços vazios resultantes com polígonos regulares). Qual poliedro regular devemos fazer o truncamento do tipo-1 para obtermos o cuboctaedro da figura abaixo ? Existe algum outro poliedro regular que gera o cuboctaedro ? Caso exista, qual seria ?



Fonte: Produzido pelo autor

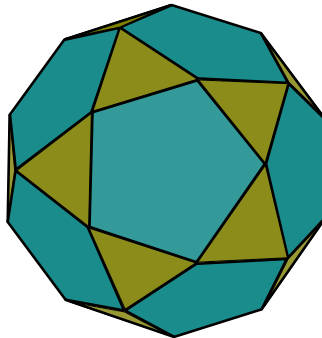
07. Encontre o poliedro regular cujo truncamento gera o poliedro da figura abaixo ?



Fonte: Produzido pelo autor

08. Quais são os dois poliedros regulares que, com o truncamento tipo-1, gera o poliedro da figura abaixo ?

Icosidodecaedro



Fonte: Produzido pelo autor

09. Fazendo o truncamento do tipo-1, quantos poliedros truncados podemos obter a partir dos poliedros regulares ? Quais são esses poliedros truncados ?

10. Fazendo o truncamento do tipo-2, quantos poliedros truncados podemos obter a partir dos poliedros regulares ? Quais são esses poliedros truncados ?

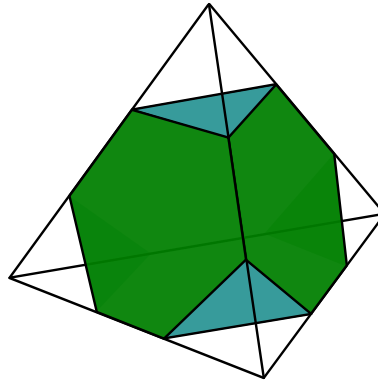
11. Observe o teorema: **“Existem apenas 5 poliedros regulares convexos”**.

Responda:

a) Quais são esses cinco poliedros ?

b) Demonstre esse teorema.

12. Através de um tetraedro regular de aresta medindo a , podemos obter o tetraedro truncado (figura colorida).



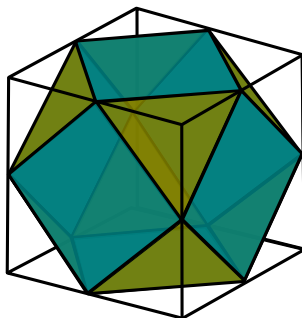
Fonte: Produzido pelo autor

Em relação ao **tetraedro truncado** da figura acima, calcule:

- O número de Arestas, Faces e Vértices;
- A mediada da aresta em função de a ;
- A área total em função de a ;
- O volume em função de a .

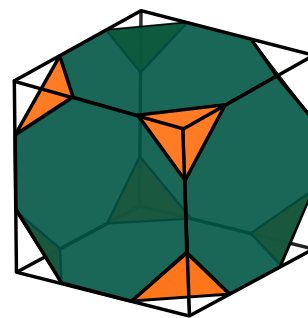
13. Através de um cubo de aresta medindo a , podemos obter o **Cuboctaedro** (figura-1), e também o **Cubo Truncado** (figura-2).

Figura-1



Fonte: Produzido pelo autor

Figura-2



Fonte: Produzido pelo autor

Em relação aos **poliedros** da figura acima, calcule:

- O número de Arestas, Faces e Vértices;
- A mediada da aresta em função de a ;
- A área total em função de a ;
- O volume em função de a .

No final tudo vai dar certo, se não deu certo até agora é por que ainda não chegou ao final.

Domingos Sabino (Pai de Fernando Sabino)

4.4 Questionário

Segue abaixo o questionário entregue aos alunos, assim como o percentual das respostas.

Palestrante: José Ribamar de Souza Neves (aluno do PROFMAT)

Professora orientadora: Bárbara Costa

Aluno(a)	
Curso	
Período	

01. Em relação à parte teórica da oficina

A teoria foi bem explicada?

Sim	100%
Razoavelmente	0%
Não	0%

Os exemplos apresentados pelo professor foram interessantes?

Sim	85,7%
Razoavelmente	14,3%
Não	0%

O objetivo de revisar a teoria sobre poliedros de Platão foi uma coisa válida?

Sim	100%
Razoavelmente	0%
Não	0%

O objetivo de dar a teoria sobre poliedros de Arquimedes foi uma coisa válida?

Sim	100%
Razoavelmente	0%
Não	0%

O objetivo de dar a teoria sobre poliedros de Arquimedes foi importante para a realização da oficina?

Sim	100%
Razoavelmente	0%
Não	0%

Teve alguma situação que exigiu cálculos avançados (integral, derivadas, etc) ?

Sim	14,3%
Razoavelmente	0%
Não	85,7%

Um aluno do ensino médio conseguiria entender a teoria abordada?

Sim	57,1%
Razoavelmente	42,9%
Não	0%

Um aluno do ensino médio poderia fazer parte dessa oficina?

Sim	100%
Razoavelmente	0%
Não	0%

02. Quanto ao palestrante

Demonstrou domínio suficiente sobre o assunto abordado?

Sim, o tempo todo	71,4%
Na maior parte do tempo	28,6%
Poucas vezes	0%
Nenhuma vez	0%

Criou um clima favorável à participação dos alunos da oficina?

Sim, o tempo todo	57,1%
Na maior parte do tempo	42,9%
Poucas vezes	0%
Nenhuma vez	0%

Utilizou exemplos ilustrativos interessantes para a compreensão da oficina ?

Sim, o tempo todo	71,4%
Na maior parte do tempo	28,6%
Poucas vezes	0%
Nenhuma vez	0%

O palestrante foi atencioso e procurou tirar as dúvidas dos participantes da oficina ?

Sim, o tempo todo	100%
Na maior parte do tempo	0%
Poucas vezes	0%
Nenhuma vez	0%

O relacionamento do palestrante com a turma foi adequado?

Sim, o tempo todo	85,7%
Na maior parte do tempo	14,3%
Poucas vezes	0%
Nenhuma vez	0%

03. Quanto ao desempenho dos participantes da oficina (auto-avaliação)

Cumpri as atividades propostas?

Sim, o tempo todo	57,1%
Na maior parte do tempo	42,9%
Poucas vezes	0%
Nenhuma vez	0%

Particpei da oficina e procurei tirar minhas dúvidas?

Sim, o tempo todo	57,1%
Na maior parte do tempo	42,9%
Poucas vezes	0%
Nenhuma vez	0%

Interagi com os colegas e participei das atividades em grupo?

Sim, o tempo todo	57,1%
Na maior parte do tempo	42,9%
Poucas vezes	0%
Nenhuma vez	0%

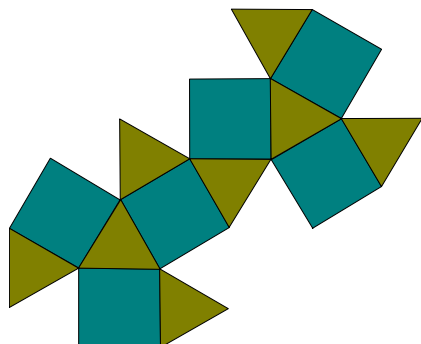
O questionário foi elaborado com o objetivo de avaliar a parte teórica, o palestrante e o desempenho dos participantes durante toda oficina. De um modo geral, os participantes responderam que a teoria foi bem estruturada e explicada, e que um aluno do ensino médio poderia fazer parte dessa oficina. Além disso, a auto-avaliação mostra que os alunos, na maior parte do tempo, ficaram interessados pelo conteúdo e prática proposta. Com isso, concluímos que a oficina foi bem satisfatória.

4.5 As planificações

Por definição, a superfície de um poliedro é formada por polígonos planos. Estes polígonos podem ser colocados sobre uma superfície plana de tal maneira que cada uma das faces do poliedro tenha pelo menos um lado em comum com outra face. Dessa forma, obtemos uma figura plana que é chamada de planificação da superfície do poliedro, ou simplesmente planificação do poliedro. Podemos formar arranjos de planificações de várias formas diferentes, desde que as faces estejam ligadas a pelo menos uma das arestas. Vejamos

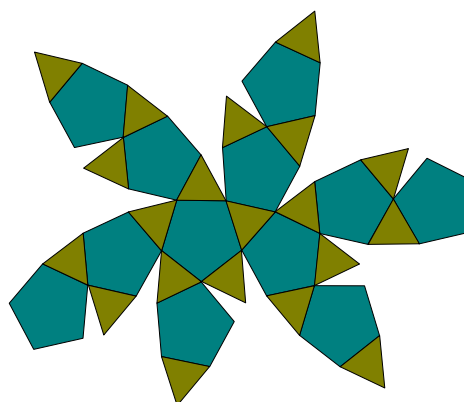
como fica uma das formas de planificações dos treze poliedros arquimedianos.

Figura 89 – Cuboctaedro(01)



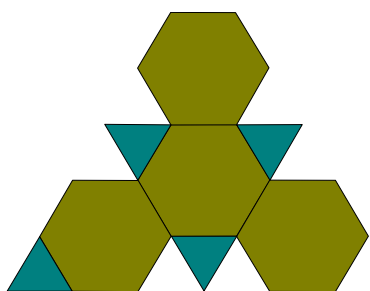
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 90 – Icosidodecaedro(02)



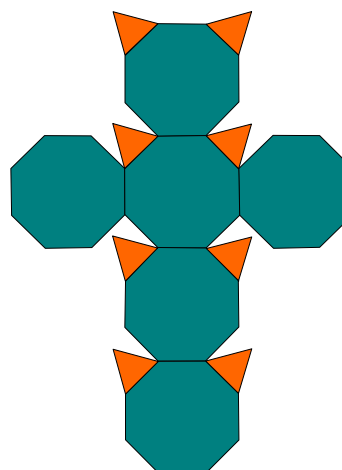
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 91 – Tetraedro truncado(03)



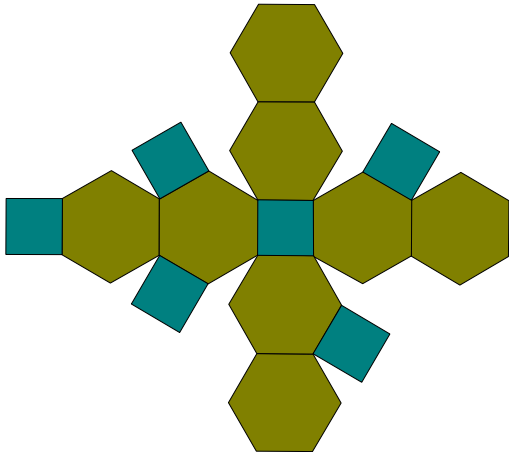
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 92 – Cubo truncado(04)



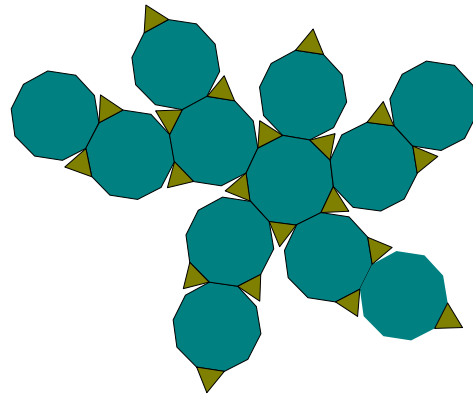
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 93 – Octaedro truncado(05)



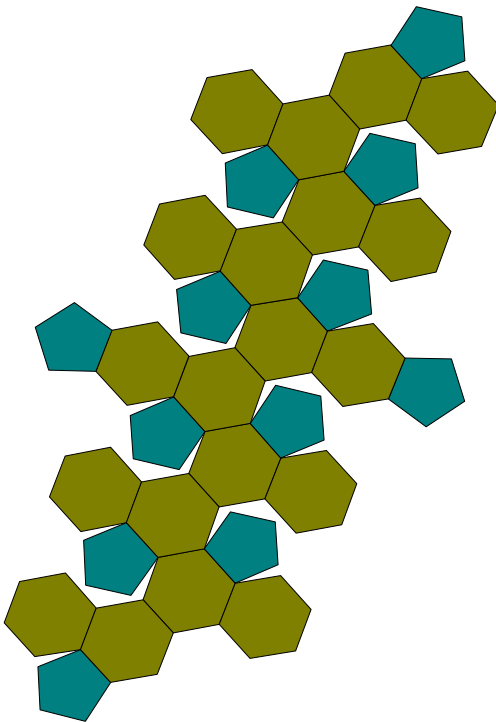
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 94 – Dodecaedro truncado(06)



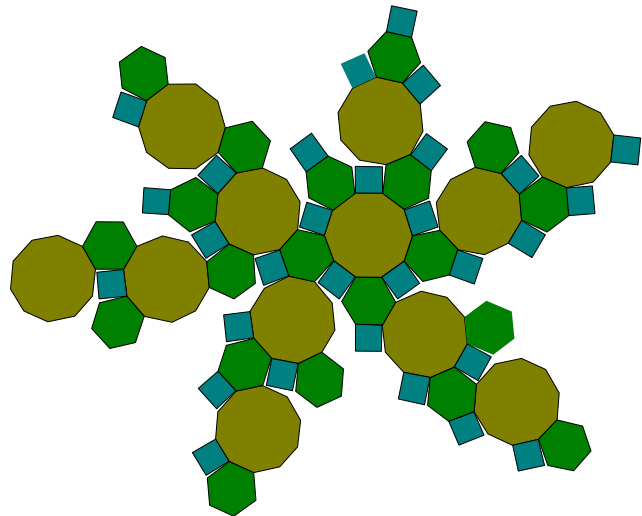
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 95 – Icosaedro truncado(07)



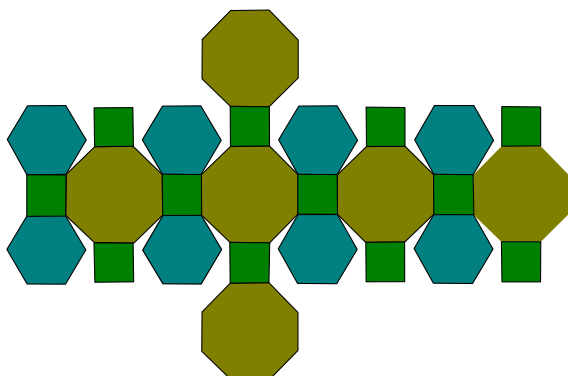
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 96 – Icosidodecaedro truncado(08)



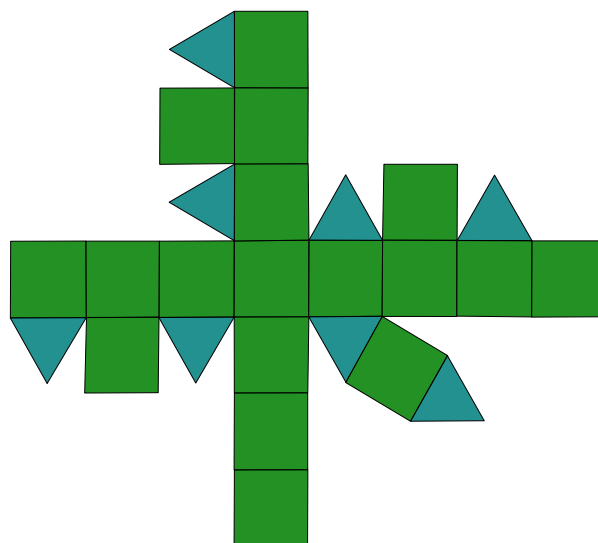
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 97 – Cuboctaedro truncado(09)



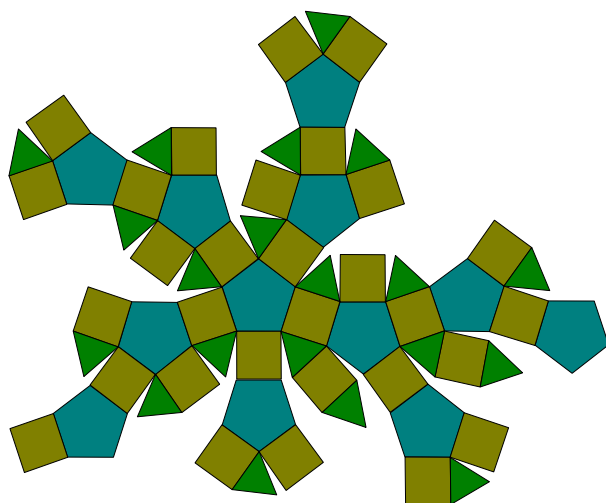
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 98 – Rombicuboctaedro(10)



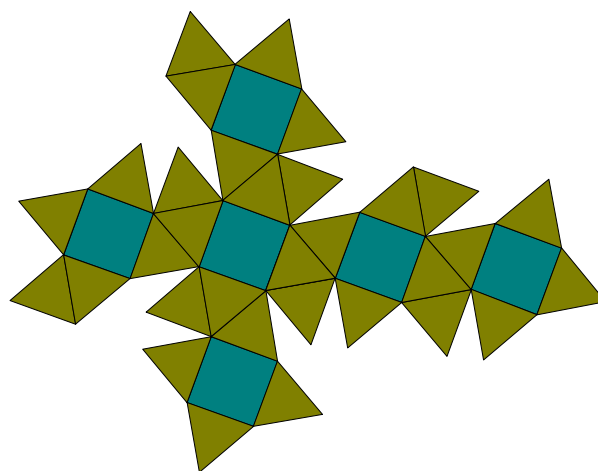
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 99 – Rombicosidodecaedro(11)



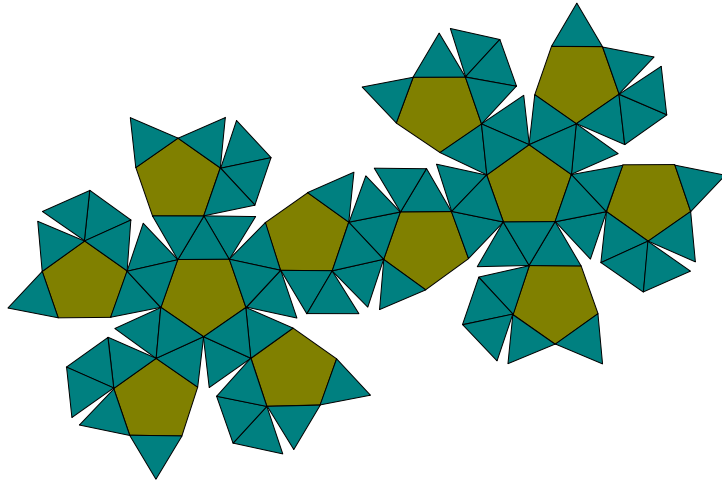
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 100 – Cubosnub(12)



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 101 – Dodecaedrosnub(13)



Fonte: Produzido pelo autor

Conclusão

Um dos objetivos do presente trabalho foi contribuir com um material teórico sobre poliedros arquimedianos, que possa ser aproveitado tanto por professores de Matemática do ensino médio quanto por alunos da graduação do curso de Licenciatura em Matemática.

Na parte teórica de nosso trabalho, dividida em dois capítulos, além de conseguirmos abordar a teoria dos Poliedros (de Platão e de Arquimedes), provamos a existência dos únicos cinco poliedros regulares de Platão. Além disso, demonstramos o Teorema de Euler para os poliedros convexos.

Por fim, usando o Teorema de Euler e uma propriedade de Euclides, presentes no livro XI (*Os Elementos*, de Euclides), fizemos a demonstração da existência dos únicos treze poliedros arquimedianos, com exceção, claro, de uma classe de prismas e de antiprismas. É a partir dos poliedros regulares de Platão que se chega, direta ou indiretamente, aos poliedros de Arquimedes (também conhecidos como poliedros semirregulares).

O outro objetivo seria apresentar os resultados de uma oficina, a partir de um questionário que foi entregue no final da parte prática aos alunos da graduação do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE).

A partir desses resultados, verificamos dois pontos relevantes: O primeiro é que foi bastante significativo entregarmos a cada aluno uma lista de exercícios (a lista continha 13 questões). Nela só inserimos questões de poliedros arquimedianos, cujo objetivo era tentar fortalecer a parte teórica vista na primeira parte da oficina, trazendo com isso um melhor entendimento e compreensão sobre esse tema. Percebemos também que, com os resultados obtidos através da lista de exercícios e com a facilidade com que os alunos tiveram na construção e na montagem das peças além do resultado obtido no questionário, concluímos que foi imprescindível aliar a teoria à prática.

O segundo ponto a considerar é que este tema, durante toda a oficina, não exigiu nenhum tipo de cálculo avançado (de nível superior), ou seja, qualquer aluno do ensino médio conseguiria entender e fazer parte de uma oficina como esta. E mais ainda, acreditamos até que alunos do fundamental-2 também poderiam fazer parte. Levantamos essa hipótese porque, em uma outra ocasião, fizemos uma oficina com alunos da OBMEP do fundamental-2 (do sétimo, oitavo e nono ano), e o resultado foi bastante satisfatório, porém não fizemos nenhum registro. Fica aqui apenas uma pequena síntese para que outros profissionais da área de Matemática procurem abrir mais o “leque” de opções e, com isso, possam verificar a partir de que série do fundamental-2 poderíamos promover uma oficina nesses moldes.

5 Apêndice

Abaixo seguem os códigos fontes dos programas de implementação feito no Sage-math para expansão e truncamento.

A) Programa para implementação de um poliedro através da expansão

```
def dilata_poli(t, poliedro_primitivo):

    t = RR(t)
    faces = poliedro_primitivo.face_list()
    LVN = []

    for i in range(len(faces)):
        vetor1 = (vector(faces[i][0])-vector(faces[i][1]))
        vetor2 = (vector(faces[i][0])-vector(faces[i][2]))
        vetor_normal = vetor1.cross_product(vetor2)
        versor_normal = vetor_normal/(vetor_normal.norm())
        LVN.append(versor_normal)

    novos_vertices=[]
    for i in range(len(faces)):
        for j in range(len(faces[i])):
            v0 = vector(faces[i][j])+t*LVN[i]
            novos_vertices.append(v0)

    return novos_vertices
```

B) Programa para implementação de um poliedro através do truncamento

```
def encontre_vizinhos(j,lista):

    lista_vec=[]
    for i in lista:
        lista_vec.append(vector(RR,i))

    bag_norm = []
```

```

bag_point=[]
for i in lista_vec:
    #print i
    temp = N(norm(lista_vec[j]-i),40)
    if temp!=0:
        bag_norm.append(temp)
        bag_point.append(i)

minimo = min(bag_norm)

vizinhos=[]
for i in range(len(bag_point)):
    if bag_norm[i] == minimo:
        vizinhos.append(bag_point[i])

return [lista_vec[j],vizinhos]

```

```

def encontre_viz_fim(lista):

    temp = []
    for i in range(len(lista)):
        temp.append(encontre_vizinhos(i,lista))

    return temp

```

```

def polyhedron_x(t, lista):

    lista_vertice_vizinhos = encontre_viz_fim(lista)
    LVV = lista_vertice_vizinhos

    novos_vertices=[]
    for j in range(len(LVV)):
        for i in range(len(LVV[j][1])):
            novos_vertices.append(LVV[j][0] + t*(LVV[j][1][i]-LVV[j][0]))

    novos_vertices_2 = []

```



```
for i in novos_vertices:
    if i not in novos_vertices_2:
        novos_vertices_2.append(i)

for i in novos_vertices_2:
    for j in novos_vertices_2:
        if i!= j:
            if (i-j).norm() < 0.000001:
                novos_vertices_2.remove(j)

return novos_vertices_2
```

Referências

- 1 EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- 2 SOLER, Gregoria Guillén. **Poliedros**. Madrid: Sínteses, 2007.
- 3 LOPES, Rodolfo; PLATÃO. **Timeu-Crítias**. Tradução do grego, introdução, notas e índices Coimbra, CECH, 2011.
- 4 CORDEIRO, Daniel. **Um convite à Matemática** 2ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- 5 COURANT, Richard e ROBBINS, Herbert. **O que é a Matemática?**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.
- 6 STEWART, Ian. **Dezessete Equações que mudaram o mundo**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- 7 LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática**. 5ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- 8 LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**. 6ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v.2
- 9 LORENZATO, Sérgio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. 3ª Ed. Rio de Janeiro: Editora Autores Associados, 2012.
- 10 FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Dicionário da língua portuguesa**. 5ª Ed. Curitiba: Positivo, 2010.