



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

**GEOMETRIA ESFÉRICA: PROPOSTA DE ATIVIDADES EM
CONEXÃO COM A GEOGRAFIA**

por

Luciane Heim¹

sob orientação do

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT DM-UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto / 2013
Recife – PE

¹O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Ficha catalográfica

G934u Heim, Luciane
Geometria esférica: proposta de atividades em conexão
com a geografia / Luciane Heim. – Recife, 2013.
76 f. : il.

Orientador: Jorge Antonio Hinojosa Vera.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) –
Universidade Federal Rural de Pernambuco. Departamento
de Matemática, Recife, 2013.
Referências.

1. Geometria esférica 2. Geometria não-euclidiana
3. Coordenada geográfica I. Hinojosa, Jorge, A., orientador
II. Título

CDD 510



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Geometria Esférica: Proposta de Atividades em conexão com a Geografia.

por

Luciane Heim

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Matemática, defendida e aprovada por unanimidade em 28/08/2013 pela Comissão Examinadora.

Orientador

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera (PROFMAT, DM-UFRPE)

Banca Examinadora

Prof.ª. Dr.ª. Isis Gabriella de Arruda Quintero Silva (DM-UFRPE)

Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva (DM-UFRPE)

Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera (DM-UFPB)

Agosto/2013
Recife-PE

DEDICATÓRIA

Ao meu marido e à minha filha, que estiveram sempre ao meu lado nesta jornada, tornando minha vida, a cada dia que passa, mais repleta de felicidade.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Alexandre (in memorian) e Lorena, professores que foram meus maiores mestres, ensinando-me a trilhar meu próprio caminho.

Ao meu marido José Ricardo, que foi meu maior incentivador, não deixando que eu desistisse quando as dificuldades surgiam, e que se alegrava comigo a cada conquista.

À minha filha Emanuele que, mesmo pequenina, entendeu meus períodos de ausência, dando-me seus melhores abraços quando eu retornava, renovando minhas forças depois de horas de estudo.

Aos meus professores do PROFMAT – UFRPE, pelos muitos ensinamentos e pelo entusiasmo e dedicação para com nossa turma.

Em especial, ao meu orientador, Prof. Jorge Antonio Hinojosa Vera, por acreditar no meu trabalho, apesar das dificuldades, e por todas as suas palavras sempre visando meu crescimento.

Aos meus colegas de trabalho do Colégio Militar do Recife, por entenderem minhas necessidades e pelo apoio recebido.

À CAPES, pelo financiamento da minha bolsa de mestrado e de muitos mestrados que ainda virão.

Aos amigos, colegas de curso do PROFMAT, por serem uma turma maravilhosa, com a qual dei boas risadas, mas também da qual levei muitos exemplos de amizade e dedicação.

E, acima de tudo, a DEUS, o grande geômetra do Universo, por me guiar a cada dia e colocar tantas pessoas maravilhosas em minha vida. Sem Ele nada sou!

“...uma só conversa em uma mesa com um homem sábio é melhor do que 10 anos de mero estudo de livros.”

Henry Wadsworth Longfellow, poeta e educador norte- americano.

RESUMO

Este trabalho tem por finalidade propor diversas atividades acerca da Geometria Esférica, buscando estimular professores de Matemática e alunos do Ensino Médio a trabalharem com esta Geometria. Primeiramente, descrevemos fatos históricos mostrando como o quinto postulado de Euclides impulsionou o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas no século XIX pelos estudos, principalmente, de Gauss, Bolyai, Lobacheswsky e Riemann. A seguir, apresentamos os elementos da Geometria Esférica e fazemos uma comparação com a Geometria Euclidiana. Dando continuidade, estabelecemos uma relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas geográficas. Procuramos, desta forma, incentivar a interdisciplinaridade entre Matemática e Geografia, mostrando, entre outras coisas, como se calcula a distância entre dois pontos distintos na superfície terrestre a partir de suas coordenadas geográficas.

Palavras-Chave: Geometrias não-euclidianas. Geometria Esférica. Coordenadas Geográficas.

ABSTRACT

This research has as a goal to propose several activities about Spherical Geometry, trying to stimulate Math teachers and High School students to work with this kind of geometry. At first, we describe historical facts, showing how Euclid's fifth postulate boosted developments in Non-Euclidean Geometries in the 19th century by studies, mainly, Gauss', Bolyai's, Lobachewsky's and Riemman's studies. And then, we present the elements of Spherical Geometry, making a comparison with Euclidean Geometry. Continuing with the research, we stabilize a relation between the Cartesian and Geographical coordinates. We looked for, this way, to encourage interdisciplinary between mathematics and geography, showing, among other things, how to calculate the distance between two different points on the Earth's surface from its geographical coordinates.

Keywords: Non-Euclidean Geometries; Spherical Geometry; Geographical coordinates.

SUMÁRIO

Introdução	1
Capítulo 1 - Uma breve História das Geometrias Não Euclidianas	5
1.1 – Pitágoras e antecessores	5
1.2 – Os Elementos de Euclides	6
1.3 – As tentativas de demonstração do 5º Postulado	
– O Quadrilátero de Saccheri	8
1.4 – Gauss, os Bolyai e Lobatchevski	10
1.5 – Riemann e Beltrami	13
Capítulo 2 – Geometria Esférica e seus Elementos	15
2.1 – Definições básicas	15
2.2 – Plano e Esfera: posições relativas	16
2.3 – Retas Paralelas	19
2.4 – Biângulos	20
2.5 – Ângulos	21
2.6 – Triângulo Esférico	23
2.7 – Triângulos esféricos particulares	24
2.8 – Área de um triângulo esférico	24
2.9 – Polígonos Esféricos	26
2.10 – Trigonometria Esférica	27
2.10.1 – Fórmulas dos Quatro Elementos (lado)	
– Lei dos Cossenos	27
2.10.2 – Fórmula dos Quatro Elementos (ângulo)	29
2.10.3 – Lei dos Senos para Triângulos Esféricos	30
Capítulo 3 – Matemática e Geografia	32
3.1 – Terra Esférica	32
3.2 – Terra Elipsoidal	33
3.3 – Nomenclatura	35
3.4 – Coordenadas Geográficas	38
3.5 – Coordenadas Cartesianas	40

3.5.1 – Distância entre dois pontos	41
3.6 – Coordenadas cartesianas x Coordenadas geográficas	42
3.7 – Distância em uma superfície esférica a partir das coordenadas	44
3.8 – Distância entre dois pontos utilizando triângulos esféricos	47
3.9 – Menor distância entre dois pontos – Demonstração	49
Capítulo 4 – Atividades Propostas	51
4.1 – Propostas já existentes: vários autores	51
4.2 – Preparação das atividades	
4.2.1 – Pré-requisitos	52
4.2.2 – Público-alvo	53
4.2.3 – Materiais e Tecnologias	53
4.2.4 – Recomendações Metodológicas	53
4.3 – Descrição das Atividades	54
Considerações Finais	62
Referências Bibliográficas	64

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – 5º postulado: $\alpha + \beta < 180^\circ$	7
Figura 2 – John Playfair	8
Figura 3 – Quadrilátero de Saccheri	9
Figura 4 – Gauss	11
Figura 5 – Janus Bolyai	12
Figura 6 – Lobachevsky	12
Figura 7 – Bernhard Riemann	13
Figura 8 – Esfera de centro O e raio r	15
Figura 9 – Intersecção da esfera com um plano passando pelo seu centro	17
Figura 10 – Plano passando por um ponto interior da esfera	17
Figura 11 – Equador e Meridiano	18
Figura 12 – Intersecções de Circunferências Máximas	20
Figura 13 – Biângulos	20
Figura 14 – Ângulo Esférico	21
Figura 15 – Ângulo entre Semi-planos	22
Figura 16 – Medida de ângulo através de retas tangentes	22
Figura 17 – Regiões delimitadas por um triângulo esférico	23
Figura 18 – Polígono Esférico	26
Figura 19 – Triângulo esférico e seus elementos	27
Figura 20 – Plano tangente à esfera no ponto A	28
Figura 21 - Triângulo Polar	30
Figura 22 – Lei dos Senos	31
Figura 23 – Experiência de Eratóstenes	33
Figura 24 – Elipsóide de revolução	34
Figura 25 – Meridiano e Paralelo	35
Figura 26 – Zonas Terrestres delimitadas pelos paralelos notáveis	37
Figura 27 – Localização da cidade de Greenwich	38
Figura 28 – Latitude e Longitude de um ponto P	39
Figura 29 – Coordenadas Cartesianas de um ponto P	41
Figura 30 - Distância entre dois pontos do espaço cartesiano	41
Figura 31 – Coordenadas Cartesianas e os ângulos θ e φ (Latitude e Longitude)	43

Figura 32 – Caminho entre dois pontos pelo paralelo e pela circunferência máxima	45
Figura 33 – Distância ortodrômica entre dois pontos ao largo de um círculo máximo sobre a superfície de uma esfera	46
Figura 34 – Triângulo Esférico ABC	48
Figura 35 – Trajetória ligando dois pontos A e B da esfera	50
Figura 36 – Distância entre dois pontos – diferentes ângulos de visão	58
Figura 37 – Rotas do tráfego aéreo internacional	60

Introdução

Na época da graduação, tive o primeiro contato com as geometrias não Euclidianas, em um curso de Geometria. Falou-se da existência dessas geometrias, diferentes da geometria de Euclides, e o exemplo explorado (um tanto superficialmente) foi o da geometria da esfera. Na época, o que mais chamou minha atenção foi a existência, nessa geometria, de triângulos com três ângulos retos. No entanto, infelizmente o assunto não foi aprofundado.

Ainda na graduação, em um projeto de iniciação científica, trabalhei com a Geometria Projetiva, que também mostrou um mundo novo, em muitos aspectos diferente da Geometria Euclidiana. Desta vez, o ponto mais marcante foi o fato de retas paralelas encontrarem-se no infinito.

Veio, então, a diplomação e o início da carreira docente. Essas geometrias não euclidianas ficaram, então, guardadas por longos anos.

Após cursar o primeiro ano do PROFMAT, tendo que definir um tema para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), o assunto voltou a ocupar espaço em meus pensamentos. Conforme orienta o Banco Indutor, o TCC “deve consistir, preferencialmente, de projeto com aplicação direta na sala de aula de Matemática na educação básica, contribuindo para o enriquecimento do ensino da disciplina”. Tendo escolhido o tema *Geometria Esférica*, busquei, então, elaborar uma proposta de atividades que contemplasse esses requisitos.

Inicialmente procurei analisar alguns pontos. Consultando os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), observamos que a Geometria desempenha, desde o Ensino Fundamental, um papel de conexão ao estabelecer relações entre vários aspectos do conhecimento, em especial o matemático, ao ligar os quadros aritmético, métrico, algébrico, estatístico, combinatório e probabilístico (PCNEF, 1998, p.48).

Os PCN de Matemática (BRASIL, 1998, p. 24) também apontam, entre os objetivos do pensamento geométrico, a exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a “resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo as noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo”. Além disso, os PCN do Ensino Médio defendem que:

[...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas podem ser desenvolvidas com trabalho adequado de Geometria, para que o aluno

possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 1999, p. 257)

Ora, sabemos que a Geometria Euclidiana não é suficiente para descrever todos os fenômenos do mundo ao nosso redor. O mundo não é plano, e a maioria dos objetos usados cotidianamente, com suas formas mais diversas, apresentam superfícies com curvaturas diferentes daquelas que a Geometria Espacial sempre ensinou.

Observa-se que, mesmo os alunos tendo contato nos Ensinos Fundamental e Médio apenas com as Geometrias Plana e Espacial, ao estudarem o Globo Terrestre em Geografia, trabalham com pontos, linhas e ângulos sobre a esfera. A partir desse pressuposto, não haveria necessidade de apresentar aos alunos uma geometria que lhes permita desenvolver uma melhor compreensão da relação entre as disciplinas estudadas e com melhores condições de entender e interpretar os elementos do Globo Terrestre? Será que o estudo da esfera ajudaria na compreensão da latitude e da longitude? Talvez o objetivo seja ainda maior. Quando o aluno estuda os elementos do globo, ele está preparado para isto? Tem elementos matemáticos suficientes para compreender o que o professor de Geografia fala?

Partindo-se do pressuposto de que a realidade do mundo é muito mais ampla do que a possibilidade teórica de qualquer área do conhecimento para dar conta de sua explicação e compreensão isoladamente, e de que isso não pode ser feito de forma fragmentada, a prática didática e pedagógica da interdisciplinaridade torna-se um recurso para impedir o ensino fragmentado do mundo. (PCN de GEOGRAFIA, 1998, p. 37)

Pensando-se então em um trabalho interdisciplinar, encontra-se em FAZENDA (1998): “A interdisciplinaridade, para ser exercida coletivamente, requer o diálogo aberto através do qual, cada um reconhece o que lhe falta e o que deve receber”.

Acredita-se, portanto, que se faz necessário rever os pontos fundamentais que se constituem de uma reflexão indispensável no sentido de nos aproximarmos da interdisciplinaridade.

“Continua sendo papel fundamental do professor considerar os conhecimentos que os alunos já possuem para planejar situações de ensino e aprendizagem significativas e produtivas. Para isso, é preciso conhecer os avanços e os problemas de seus alunos, bem como a adequação de suas propostas, de modo a aperfeiçoar sua ação pedagógica. A interface com as demais disciplinas também deve ser observada, de modo a proporcionar estudos mais completos sobre um tema cuja compreensão, por parte dos alunos, tanto a Geografia, como a História, as Ciências, a Arte e a Matemática podem ampliar, por

meio de suas abordagens e explicações.” (PCN de GEOGRAFIA, 1998, p. 95)

Também nos PCN de Matemática é proposta a integração da matemática com as outras áreas do conhecimento:

Como as medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a interpretação deste, as possibilidades de integração da Matemática com as outras áreas do ensino fundamental ficam evidentes, como Ciências Naturais (densidade, velocidade, energia elétrica) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias). (PCN de MATEMÁTICA, 1998, p. 85)

Observe-se que a conceituação de Interdisciplinaridade pode ser contraposta com a noção de multidisciplinaridade, onde existe a justaposição de profissionais, cada um fazendo o que sabe. Neste caso, não há interação entre nível de método nem de conteúdo. Já na interdisciplinaridade, tal integração ocorre durante a construção do conhecimento, de forma conjunta, desde o início da colocação do problema.

Interdisciplinaridade. Enfoque científico e pedagógico que caracteriza por buscar algo mais do que mera justaposição das contribuições de diversas disciplinas sobre um mesmo assunto, e se esforça por estabelecer um diálogo enriquecedor entre especialistas de diversas áreas científicas sobre determinada temática. Aplica-se a problemas, atividades e projetos que ultrapassam a capacidade de uma só área disciplinar. (ASSMANN, 2002, p. 166)

A Geometria Esférica será, então, o suporte para esta interdisciplinaridade, no sentido de articular e integrar as áreas envolvidas. E, embora este conteúdo possa surgir naturalmente quando se explora o Globo Terrestre, nota-se que ele ainda não é contemplado pelos livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio. De acordo com LIMA (2001), um estudo detalhado com doze coleções de livros didáticos de Matemática utilizados no Ensino Médio no Brasil, verificou-se que é dado tratamento à Geometria Plana e Espacial e à Geometria Analítica. Porém, não há evidências do tratamento às geometrias não-euclidianas e, particularmente, à Geometria Esférica. Isto colabora para a escolha do tema, visando preencher um pouco dessas lacunas.

Neste sentido, este trabalho teve por objetivo propor atividades acerca da Geometria Esférica, conectando-a à Geografia, buscando estimular professores de Matemática e alunos da Educação Básica, particularmente do Ensino Médio, a trabalharem em sala de aula com esta Geometria.

Estruturamos, então, nosso trabalho em quatro capítulos.

No Capítulo 1 foi feito um breve recorte histórico do surgimento e desenvolvimento das Geometrias não Euclidianas. Procuramos mostrar como, a partir das tentativas de demonstração do quinto postulado de Euclides, estudos como os de Gauss, Bolyai, Lobachewsky e Riemann, dentre outros, culminaram na descoberta de geometrias com estruturas distintas da Geometria de Euclides, tais como a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica e, em particular, a Geometria Esférica.

No Capítulo 2, fizemos uma introdução à Geometria Esférica, mostrando seus elementos meio de definições e teoremas, buscando auxiliar o leitor na compreensão dos conceitos envolvidos. Demonstramos, dentre outras coisas, que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior do que dois ângulos retos. Também são apresentadas noções iniciais de Trigonometria Esférica. Além disso, sempre procuramos mostrar a comparação da Geometria Esférica com a Euclidiana.

No Capítulo 3, apresentamos conceitos básicos de Geografia, como latitude e longitude de um ponto da superfície terrestre. Através da introdução do sistema de três eixos ortogonais de coordenadas cartesianas, fizemos a sua relação com as coordenadas geográficas, mostrando, inclusive, como calcular a distância entre dois pontos distintos da superfície terrestre a partir de suas coordenadas geográficas.

No Capítulo 4 propomos uma sequência de atividades, voltadas para alunos do Ensino Médio, envolvendo a Geometria Esférica, buscando compará-la com a Geometria Euclidiana e estabelecendo sua relação com os conceitos geográficos que os alunos já possuem, tentando ampliar sua visão de mundo.

Finalmente, colocamos nossas considerações finais e propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 1 – Uma breve História das Geometrias Não Euclidianas

Foi árduo e longo o caminho desde as primeiras tentativas de formalização da Geometria, com a axiomatização de Euclides, até o surgimento das Geometrias não Euclidianas. Para que o leitor possa ter subsídios para compreender esse processo, apresentamos aqui um resumo histórico com os principais fatos ocorridos e matemáticos que participaram ativamente dessa jornada.

1.1 – Pitágoras e antecessores

A palavra **Geometria** (*γεωμετρία*) tem etimologia grega: *geo-* "terra", *metria-* "medida". Significa, portanto, "medição de terras". E, realmente, na Antiguidade (na Mesopotâmia e no Egito), o conhecimento geométrico resumia-se a uma série de procedimentos de mensuração de caráter prático (cálculos de comprimento, áreas e volumes) aplicados, principalmente, à agricultura.

Aos poucos, houve a transformação desse conhecimento geométrico prático para um dos ramos da Matemática Pura, e os gregos tomaram a frente nesse processo de abstração das idéias do contexto físico para o contexto puramente mental, um processo que levou aproximadamente três séculos para ser completado, de 600 a.C. até 300 a.C.. Por exemplo, Tales de Mileto (± 624 aC – ± 547 aC), considerado o primeiro filósofo, cientista e matemático grego, empregou argumentos lógicos para demonstrar proposições básicas de Geometria, muitas delas não tendo importância direta na medição de terras. Ele foi a origem de uma escola que perdurou por um século.

Pitágoras de Samos (± 569 aC – ± 475 aC), provavelmente um aluno da escola de Tales, e fortemente influenciado por suas ideias, fundou, por volta de 540 a.C., uma escola voltada para o estudo da Filosofia, das Ciências Naturais e da Matemática.

Embora Tales tenha sido o primeiro a declarar que as verdades matemáticas devem ser provadas pelo raciocínio, acredita-se que foram os pitagóricos os primeiros a produzir demonstrações razoavelmente rigorosas. Os pitagóricos foram, também, os primeiros a enxergar a Matemática como algo abstrato, pairando acima da realidade física. (Garbi, 2010, p. 26)

Os pitagóricos também espalharam pelo antigo mundo grego uma “epidemia” de interesse pelo estudo da Matemática, fazendo surgir, algumas décadas após a criação da escola em Crotona, centros análogos em outras cidades.

Após a morte de Pitágoras, membros de um grupo da sociedade, provavelmente os denominados “mathematikoi”, desenvolveram novos resultados de Matemática exclusivamente por dedução lógica, convertendo-a em uma Ciência Dedutiva.

Outro grego, Hipócrates (\pm 470 a.C. – \pm 410 a.C.), da ilha jônia de Quios, imortalizou-se ao escrever um livro texto, *Elementos de Geometria*, em que reuniu, de modo lógico e organizado, a Geometria da época. Nesta obra os teoremas eram arranjados numa sequência onde os subsequentes eram provados com base nos teoremas anteriores. Isto indica o início da sistematização do conhecimento matemático, e sabemos que essa estrutura de apresentação sobrevive até os dias atuais.

Por volta de 386 a.C. temos, fundada em Atenas, pelo filósofo Platão (\pm 427 a.C. – \pm 347 a.C.), a célebre **Academia**. Essa instituição reuniu os maiores sábios da época, e sobre seu portão estava escrita a advertência: “Não são admitidos ignorantes em Geometria”.

Com a Academia, a Matemática obteve o status de Ciência Pura, seus membros não tinham a preocupação em aplicar os conhecimentos adquiridos no seu trabalho e a ênfase era no desenvolvimento do pensamento matemático e filosófico. (Barros, 2010, p. 04)

Das centenas de escolas criadas nos séculos seguintes pelo território grego, nenhuma delas comparou-se, em importância, à Academia de Platão.

1.2 – Os Elementos de Euclides

Com a disseminação da cultura grega para o oriente, outros centros de saber surgiram, sendo o mais notável o Museu de Alexandria.

Por volta de 300 a.C., **Ptolomeu I**, estimulado por um filósofo chamado **Demétrio, de Falero**, decidiu fazer de Alexandria um grande centro do saber e da cultura. Demétrio vivera em Atenas, conhecera a Academia de Platão e fora forçado a deixar a cidade por motivos políticos. Mudando-se para Alexandria, idealizou criar ali um centro de estudos muito superior aos de outras cidades do mundo grego, em especial dotando-o de uma grande biblioteca. Dedicado às **musas**, ou seja, às deusas das ciências e das artes, tal centro ficou conhecido por “**Museu de Alexandria**”. [...] Com o apoio de Ptolomeu, Demétrio começou a atrair para Alexandria as melhores cabeças pensantes do mundo grego. (Garbi, 2010, p. 57)

Foi no Museu de Alexandria que o matemático Euclides passou a ensinar Geometria. Também ali Euclides escreveu sua obra mais monumental, os Elementos, constituída de 13 livros (ou capítulos). Segundo Barros (2004), nessa obra estão demonstradas 465 proposições (precedidas por definições, postulados e noções comuns), deduzidas de um sistema axiomático, de forma didática, que expõem sistematicamente grande parte da Matemática básica conhecida na época.

Euclides procurou criar um conjunto de conceitos primitivos e axiomas dos quais derivam-se todos os resultados da Geometria. Esse procedimento era inédito até então e mostrava um compromisso com a veracidade dos resultados obtidos. Os Elementos de Euclides são de tamanha importância que só perde para a Bíblia em número de edições.

O Livro I dos Elementos começa com 23 definições de entes geométricos como ponto, linha, reta, superfície, plano, ângulo, etc. Logo a seguir, são apresentados os famosos 5 postulados:

“Seja postulado o seguinte:

1. Traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.
2. Estender um segmento de reta continuamente em uma linha reta.
3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
4. Que todos os ângulos retos são iguais.
5. Que, se uma linha reta caindo sobre duas linhas retas faz ângulos internos do mesmo lado cuja soma seja menor do que dois retos, as duas linhas retas, se estendidas indefinidamente, encontram-se no mesmo lado em que a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos.”

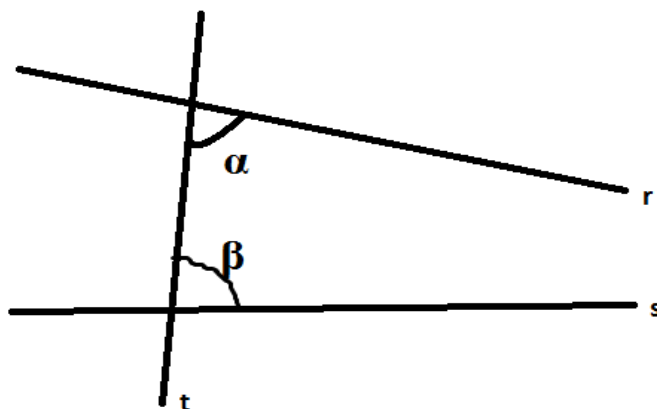


Figura 1 – 5º postulado: $\alpha + \beta < 180^\circ$

É claro que alguns desses e de outros postulados que conhecemos hoje em dia são escritos de forma diferente. Por exemplo, o primeiro postulado é mais conhecido como: ***“Por dois pontos passa uma, e somente uma, reta”***.

Também o 5º postulado é apresentado de formas mais simples, como a proposta em 1773 (segundo GARBI), pelo matemático escocês John Playfair: ***“Por um ponto fora de uma reta passa uma e uma só paralela a ela”***.



Figura 2 – John Playfair

Percebe-se que os quatro primeiros postulados são mais simples e evidentes. O mesmo não acontece com o 5º, hoje conhecido como Postulado das Paralelas. Ele não tem a obviedade dos anteriores, e sua compreensão requer um esforço maior. Por isso, muitos geômetras, então, suspeitaram que ele fosse, na realidade, um teorema que pudesse ser deduzido ou demonstrado a partir dos postulados iniciais. E foi isso que deu início a quase dois milênios de incansáveis estudos e investigações.

1.3 – As tentativas de demonstração do 5º Postulado – O Quadrilátero de Saccheri

Durante séculos, inúmeros matemáticos tentaram achar uma demonstração para o Quinto Postulado, porém sempre sem sucesso.

Segundo Garbi (2006, p. 326), os principais geômetras que realizaram estudos nesse sentido foram: “Posidônio (século I a.C.), Gêmino (século I a.C.), Cláudio Ptolomeu (século II), Proclo (século V), Nasir ed-din (século XIII), Commandino (século XVI), John Wallis (século XVII), Girolamo Saccheri (século XVIII), Johann Heinrich Lambert (século XVIII) e Adrien-Marie Legendre (século XVIII)”. Em geral, quando alguém pensava que havia “provado” o postulado, se descobria, em pouco tempo, que a “demonstração” apenas trocava o enunciado original por outro equivalente.

No entanto, alguns deles, como o padre jesuíta Girolamo Saccheri (1667-1733), fizeram a tentativa de supor a falsidade do quinto postulado em busca de absurdos. Saccheri era um intelectual de primeira linha. Ensinou matemática, filosofia e, principalmente, teologia em várias universidades. Mas tinha, como principal objetivo na vida, provar o Quinto Postulado. Em 1733, ano de sua morte, publicou um livro intitulado “*Euclides ab omni naevo vindicatus*” (*Euclides livre de todas as máculas*).

Nesse livro Saccheri demonstra, corretamente, algumas dezenas de teoremas geométricos sempre com a intenção de, no final, demonstrar o Quinto Postulado. Para isso, ele usou uma variação equivalente do enunciado original. Imagine uma figura geométrica formada por quatro lados (um quadrilátero). Os ângulos da base, A e B, são retos e os segmentos AC e BD têm o mesmo comprimento.

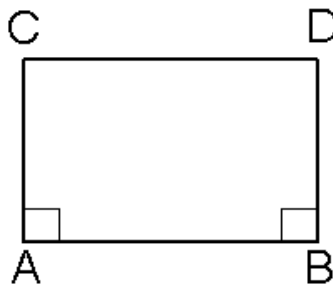


Figura 3 – Quadrilátero de Saccheri

É fácil provar que os ângulos com vértices em C e D são congruentes: os triângulos ABC e BAD são congruentes (pelo caso LAL); logo, os triângulos ACD e BCD são congruentes (caso LLL); assim, os ângulos mencionados são congruentes. Na Geometria Euclidiana eles são retos, porém a prova disso depende do 5º postulado (decorre do 5º postulado que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos; logo, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero, na Geometria Euclidiana, é igual a quatro retos). Isto é, se Euclides estivesse certo, essa figura teria que ser um retângulo. E essa foi a missão que Saccheri encarou: provar que seu quadrilátero tinha de ser um retângulo. Ele tentou fazer a prova “por absurdo”, examinando 3 possibilidades:

- 1) Caso **obtuso**: os ângulos C e D são maiores que 90° .
- 2) Caso **euclidiano**: os ângulos C e D são retos.
- 3) Caso **agudo**: os ângulos C e D são menores que 90° .

A esperança de Saccheri era conseguir mostrar que os casos **obtuso** e **agudo** levariam a contradições inaceitáveis e se reduziriam, pela força da lógica, ao caso **euclidiano**.

Levando avante esse projeto, ele passou a demonstrar vários teoremas. No entanto, para sua surpresa e, provavelmente, frustração, não encontrava nenhuma falha lógica no caso **agudo**. Desse modo, prosseguiu demonstrando seus teoremas sem nunca usar o 5º Postulado e sem descobrir alguma inconsistência no caso **agudo**. Na verdade, ele estava demonstrando que esse postulado só é imprescindível no caso **euclidiano**.

Por alguma razão, porém, Saccheri fraquejou. No seu Teorema 33 ele afirma, um pouco desconcertado, que está demonstrando algo que *"é repugnante à natureza da linha reta"*. Talvez, por medo de estar cometendo algum engano, seu livro terminou de maneira melancólica: ele entrou bastante em um novo mundo, passeou por ele e retornou, não acreditando em sua existência. Mas o fato é que ele simplesmente demonstrou todos os resultados básicos da hoje chamada Geometria Hiperbólica.

No entanto, o esforço de Saccheri não foi em vão. Outros matemáticos como o suíço Heinrich Lambert (1728-1777), leram sua obra e tentaram ir mais adiante. Mas Lambert morreu sem publicar seus estudos e jamais refutou a hipótese do ângulo agudo. Segundo Garbi (2010), “talvez porque não se sentisse em condições de chegar a alguma conclusão definitiva e ainda conjecturasse sobre a possibilidade de alternativas igualmente válidas à Geometria Euclidiana”.

1.4 – Gauss, os Bolyai e Lobachevsky

Outros matemáticos, como Johann Carl Friedrich Gauss, também voltaram seus esforços para a questão. Inicialmente, como Saccheri e Lambert, Gauss tentou demonstrar o postulado por redução ao absurdo. No entanto, as conclusões a que chegava pareciam-lhe possíveis em alguma geometria, como mostra um trecho da carta que escreveu a seu amigo Farkas Bolyai (datada de 17 de dezembro de 1799):

“É verdade que eu cheguei a várias coisas que muitas pessoas considerariam uma prova: mas, em meus olhos, elas nada provam. Por exemplo, se alguém conseguisse demonstrar a possibilidade de um triângulo retilíneo cuja área fosse maior do que qualquer área dada, então eu estaria pronto para provar o conjunto da Geometria de maneira absolutamente rigorosa. Muitas pessoas admitiriam isso como um axioma mas eu não. De fato, seria possível que a área ficasse sempre abaixo de certo limite, não importando o quão longe os três vértices do triângulo fossem colocados.” (em GARBI, 2010, p.339)

Embora, à primeira vista, essa afirmação possa parecer absurda, se pensarmos na superfície de uma esfera, os triângulos nela inscritos têm área que não pode ultrapassar certo limite. Além disso, nada há nos quatro primeiros postulados de Euclides que impeça que algo análogo aconteça com triângulos retilíneos. Bem, a afirmação de Gauss estava correta, como ficou posteriormente evidenciado.



Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Figura 4 – Gauss

Depois de muito esforço tentando reduzir o 5º Postulado a uma decorrência dos anteriores, Gauss acabou admitindo a possibilidade lógica de construção de outras geometrias nas quais o conceito de paralelismo diferia daquele assumido por Euclides. Cartas escritas entre 1813 e 1831 mostram que ele conseguiu deduzir, sem que encontrasse contradições, muitos teoremas do que primeiramente chamou de Geometria Anti-Euclidiana, posteriormente de Geometria Astral e, no final, de Geometria não euclidiana. Entretanto, talvez para evitar polêmicas ou então recear que seus raciocínios apresentassem alguma falha, ele nada publicou acerca desse assunto. É importante salientar que a geometria criada por Gauss é aquela atualmente denominada **Geometria Hiperbólica**.

Nesse meio tempo, Farkas Bolyai conversou com seu filho, János Bolyai, sobre a polêmica envolvendo o quinto postulado. János era um rapaz talentoso, brilhante em Matemática, e começou a trabalhar com o objetivo de comprovar o palpite de Gauss. Por volta de 1823, János fez suas maiores descobertas, e partiu de um conceito de paralelismo idêntico ao assumido por Gauss, e escreveu a seu pai:

“ ... eu fiz descobertas tão maravilhosas que me sinto quase sufocado por elas e seria motivo de grande tristeza se elas fossem perdidas. ... Por ora, eu posso apenas dizer o seguinte: ‘Eu criei um universo inteiramente novo a partir do nada’. Tudo o que lhe mandei até agora é apenas um castelo de cartas comparado a uma torre.” (GARBI, 2010, p.344)

O pai, Farkas, posteriormente informou, por carta, a seu amigo Gauss, das proezas de seu filho. Mas a resposta do grande Gauss foi uma ducha gelada: "Os resultados do trabalho de seu filho são excelentes mas, se eu elogiá-los estarei elogiando a mim mesmo, pois já os obtive há anos".



Figura 5 – János Bolyai

János Bolyai ficou, evidentemente, muito decepcionado com essa resposta. Ficou ainda mais deprimido quando soube que um russo, chamado Nicolai Ivanovich Lobachevsky, já havia publicado resultados semelhantes alguns anos antes, em uma obra chamada *Geometria Imaginária*. Como o artigo de Lobachevsky saiu em uma revista russa – e em russo – foi praticamente ignorado pelos matemáticos europeus.



Figura 6 – Lobachevsky

Apesar disso, Lobachevsky teve o mérito de ser o primeiro matemático a anunciar ao mundo a existência de uma geometria diferente da euclidiana. Ele chamou-a inicialmente de *Geometria Imaginária* e, depois, de *Pangeometria*.

1.5 – Riemann e Beltrami

No início do século 19 ainda não estava claro se o Quinto Postulado tinha validade absoluta ou se podia ser desobedecido em geometrias alternativas. Os trabalhos de Saccheri e Bolyai eram praticamente ignorados e as idéias de Lobachevsky eram tidas como absurdas por muitos matemáticos.

Nessa época, um gênio matemático alemão chamado Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) introduziu idéias novas e revolucionárias no estudo das geometrias. Suas investigações foram diferentes das de Gauss, Bolyai e Lobachevsky. Enquanto estes criaram uma nova geometria modificando o postulado das paralelas, Riemann caracterizou as geometrias por aquilo que hoje chamamos sua “**métrica**”, isto é, a maneira pela qual a distância entre dois pontos infinitamente próximos é expressa em função das diferenças de coordenadas daqueles pontos. Com seus estudos, Riemann concluiu ser possível criar quantas geometrias quisermos, bastando, para isso, estabelecer maneiras distintas, variando parâmetros, para expressar o elemento distância em função dos diferenciais das coordenadas. Assim, a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica, as únicas conhecidas até então, seriam casos particulares dessas geometrias de Riemann.



Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Figura 7 – Bernhard Riemann

Ele mostrou, por exemplo, que podia criar uma geometria na qual a soma dos ângulos de um triângulo era MAIOR que 180° . Ora, essa geometria corresponde perfeitamente ao caso OBTUSO de Saccheri. É a chamada Geometria Elíptica e, num caso particular, a Geometria Esférica da qual trataremos no Capítulo 2.

Além disso, a introdução do conceito de espaços com mais do que três dimensões foi realizada por Riemann ao definir espaços curvos e relacionar sua curvatura com a expressão do elemento de distância. O campo aberto por ele foi tão

fértil que, durante várias décadas, os matemáticos exploraram suas consequências e fizeram descobertas notáveis.

Segundo Garbi, foi a partir das idéias geométricas de Riemann que alguns grandes matemáticos, Bruno Christoffel, Gregorio Ricci-Curbastro e Tullio Levi-Cívita, desenvolveram o Cálculo Tensorial, o qual veio a se tornar a ferramenta matemática usada por Albert Einstein para formular sua Teoria da Relatividade Geral.

Finalmente, em 1868, o grande geômetra italiano Eugênio Beltrami (1835-1900), publicou um trabalho no qual, para todos os efeitos, fechou o ciclo das elocubrações acerca do 5º Postulado. Ele provou que é impossível deduzir o postulado das paralelas a partir dos outros quatro, das definições e das noções comuns que o precedem. Ou seja, o postulado das paralelas é, então, independente e, portanto, pode ser formulado com liberdade.

Isso mostrou, quase vinte e dois séculos desde os Elementos de Euclides, que a longa e penosa procura por uma prova do 5º Postulado fora em vão. Ademais, confirmou a genialidade dos geômetras gregos, os quais haviam incluído, acertadamente, a proposição acerca das paralelas no rol dos postulados.

Na verdade, a prova apresentada por Beltrami foi indireta. O que ele provou é que se a Geometria Euclidiana é consistente, livre de contradições internas, então também o é a Geometria Hiperbólica. Se fosse possível encontrar uma prova para o postulado das paralelas, isso resultaria na inconsistência da Geometria Hiperbólica, pois a mesma estaria baseada em uma formulação equivocada para o conceito de paralelismo. Mas, como Beltrami provou, ela é consistente, pois a Euclidiana o é. Consequentemente, é impossível provar o 5º postulado a partir dos anteriores. Um raciocínio não usual, mas **logicamente perfeito!**

Capítulo 2 - Geometria Esférica e seus Elementos

Uma vez tendo chegado ao mundo das Geometrias não Euclidianas, exploraremos a seguir um pouco de uma delas: a Geometria Esférica. Mostraremos, com uma série de definições e alguns teoremas, os elementos básicos dessa Geometria, permitindo, aos que pretenderem trabalhar com a mesma, que adquiram o suporte necessário para tal.

2.1 – Definições básicas

Inicialmente estabeleceremos algumas definições:

Definição 2.1.1: Uma **esfera de centro O e raio r** é o conjunto de todos os pontos P do espaço cuja distância a O é igual a r.

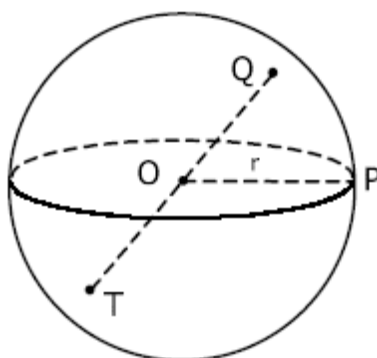


Figura 8 – Esfera de centro O e raio r

Os pontos do espaço cuja distância a O é menor que r são **interiores** à esfera e aqueles cuja distância a O é maior que r são **exteriores** à mesma.

Definição 2.1.2: Um **raio** da esfera é o segmento que une o centro a um ponto qualquer da mesma.

Definição 2.1.3: Uma **corda** da esfera é o segmento que une dois pontos distintos da mesma.

Definição 2.1.4: Um **diâmetro** da esfera é uma corda que contém o centro.

É claro que o comprimento de qualquer diâmetro é o número $2r$ que é chamado o **diâmetro**.

Observe-se que a palavra **raio** é usada com dois sentidos: pode ser o número r ou um segmento \overline{OP} . No entanto, não precisamos nos preocupar com isto, pois o contexto sempre deixa claro qual o significado usado. A mesma coisa vale para a palavra **diâmetro**: pode ser o número $2r$ ou o segmento \overline{QT} . Daqui em diante usaremos a notação \overline{PQ} para representar o segmento de extremos P e Q e PQ para indicar o seu comprimento.

Definição 2.1.5: Pontos **antípodas** (ou **antipodais**) são dois pontos da esfera diametralmente opostos.

2.2 – Plano e Esfera: posições relativas

A relação entre esferas e planos no espaço é semelhante à relação entre circunferências e retas no plano. Temos três casos possíveis para um plano E e uma esfera S :

- $E \cap S = \emptyset$;
- $E \cap S = \{P\}$ (onde P é um ponto);
- $E \cap S$ contém mais do que um ponto.

O primeiro caso não nos interessa no momento.

No segundo caso, dizemos que E é **tangente** à esfera S e o ponto P é chamado **ponto de tangência**. De outra forma, podemos dizer que E e S se tangenciam em P .

No terceiro caso, diremos que o plano E é **secante** à esfera S . É essa situação que nos interessa em especial. Mas qual a figura obtida quando um plano secante corta uma esfera? Se o plano passa pelo centro a resposta é imediata, como podemos ver pelo teorema abaixo.

Teorema 2.2.1: A intersecção de uma esfera com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio que a esfera.

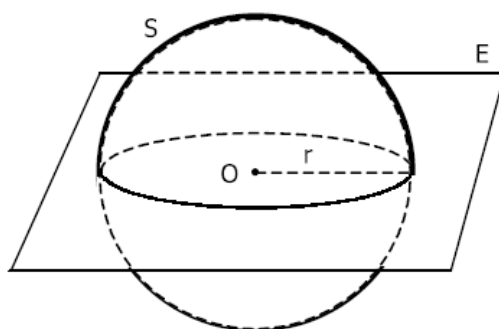


Figura 9 – Intersecção da esfera com um plano passando pelo seu centro

Demonstração: Sendo S uma esfera de centro O e raio r e E um plano que passa por O , temos que $E \cap S$ é o conjunto dos pontos de E cuja distância a O é igual a r (por pertencerem a S também). Mas essa é exatamente a definição de uma circunferência de centro O e raio r . ■

No caso mais geral, de um plano secante qualquer, temos o resultado a seguir.

Teorema 2.2.2: Se um plano contém um ponto do interior de uma esfera, então a intersecção do plano com a esfera é uma circunferência. Além disso, o centro dessa circunferência é o pé da perpendicular ao plano traçada a partir do centro da esfera.

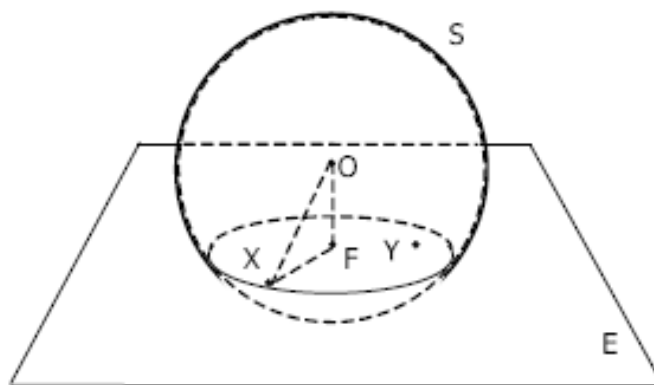


Figura 10 – Plano passando por um ponto interior da esfera

Demonstração: Seja E um plano que não passa pelo centro O de uma esfera S e que contenha um ponto Y do seu interior. Seja F o pé da perpendicular a E traçada a partir de O . Mostremos que $E \cap S$ é uma circunferência de centro F :

Como Y está no interior de S , temos que $OY < r$. No triângulo retângulo ΔOFY temos que \overline{OY} é hipotenusa, e \overline{OF} é cateto. Então $OF < OY < r$, o que mostra que F também está no interior de S .

Tomemos agora um ponto X qualquer da intersecção de E com S . O triângulo ΔOFX é retângulo em F e, pelo Teorema de Pitágoras, temos que $OF^2 + FX^2 = OX^2 = r^2$. Daí, $FX = \sqrt{r^2 - OF^2}$. Logo, X está na circunferência de centro F e raio $\sqrt{r^2 - OF^2}$. Isso mostra que a intersecção $E \cap S$ está contida na circunferência de centro F e raio $\sqrt{r^2 - OF^2}$.

Agora falta mostrar que todo ponto da circunferência centro F e raio $\sqrt{r^2 - OF^2}$ pertence à intersecção $E \cap S$. Tomemos um ponto X qualquer da circunferência, em E , com centro F e raio $\sqrt{r^2 - OF^2}$. Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, temos que $OX^2 = OF^2 + FX^2 = OF^2 + r^2 - OF^2 = r^2$. Portanto, $OX = r$, ou seja, X pertence à esfera S . ■

Definição 2.2.1: A intersecção da esfera com um plano passando pelo seu centro é chamada uma **circunferência máxima** da esfera.

Esse nome é devido ao fato de que elas são as circunferências de maior raio contidas na esfera.



Figura 11 – Equador e Meridiano

Veremos, no próximo capítulo, que a linha do Equador, ou simplesmente Equador, é uma circunferência máxima, mas os outros paralelos são circunferências menores paralelas à linha do Equador. Os meridianos são semi-circunferências máximas.

Na esfera, as circunferências máximas assumem o papel análogo ao das **retas** da Geometria Euclidiana e os arcos menores de circunferência máxima assumem o papel análogo ao dos segmentos de reta, ou seja, **minimizam** a distância entre dois pontos. Desta forma, na esfera, a distância entre dois pontos determina-se calculando o **comprimento do menor arco de circunferência máxima** definido pelos dois pontos. Veremos a prova disso no capítulo 3.

Teorema 2.2.3: Dados dois pontos não antípodos A e B na esfera, existe uma e uma só circunferência máxima que contém A e B.

Demonstração: Tomemos dois pontos não antípodos A e B na esfera, e o ponto O, centro da esfera. Temos então três pontos distintos do espaço, não colineares. Assim, eles determinam um único plano, que passa pelo centro da esfera. Logo, a intersecção desse plano com a esfera é a única circunferência máxima contendo A e B. ■

Definição 2.2.2: O **segmento esférico** definido por dois pontos não antípodos A e B é o menor arco da circunferência máxima definida por A e B.

Caso os dois pontos sejam antípodos, existe uma infinidade de circunferências máximas que contêm A e B e, então, não é único o segmento esférico definido pelos dois pontos, apesar dos comprimentos de todos esses segmentos serem iguais.

2.3 – Retas Paralelas

Teorema 2.3.1: Na esfera, dadas duas circunferências máximas, estas intersectam-se sempre em dois pontos antípodos.

Demonstração: Dadas duas circunferências máximas, cada uma delas é a intersecção da esfera com um plano passando pelo seu centro. Como esses planos têm um ponto comum (o centro da esfera), eles têm uma reta comum, a qual, obviamente, intersecta a esfera em dois pontos antípodos. ■

Temos como exemplo os meridianos terrestres, que intersectam-se no Pólo Norte e no Pólo Sul.

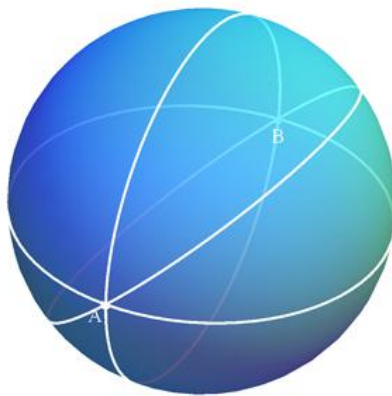


Figura 12 – Intersecções de Circunferências Máximas

Se definirmos, então, retas paralelas como sendo retas que não se intersectam, e identificando o conceito de reta na esfera com a de circunferência máxima, concluímos que:

Na Geometria Esférica não existem retas paralelas!

Esta é uma das diferenças substanciais entre a Geometria Esférica e a Geometria Euclidiana.

2.4 – Biângulos

Como vimos acima, dadas duas circunferências máximas, estas intersectam-se sempre em dois pontos antípodas, o que divide a esfera em quatro regiões, cada uma das quais com dois lados; estas regiões designam-se por **biângulos**, **lúnulas** ou **fusos esféricos**.

O nome lúnula vem do Latim, *luna*, que significa lua. Pense a parte da lua que é vista a cada momento. Aquela porção deve estar no hemisfério que é iluminado pelo sol, e no hemisfério que é visível da Terra. A intersecção desses hemisférios é precisamente uma lúnula.

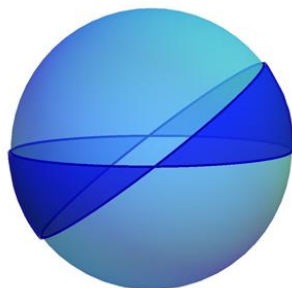


Figura 13 – Biângulos

Uma vez que os lados de um polígono são segmentos de reta, e na esfera os segmentos de reta são arcos menores de uma circunferência máxima, podemos então concluir que:

Na Geometria Esférica, existem polígonos com dois lados!

Área de um Biângulo: podemos calcular a área de um biângulo de forma simples, conhecendo a amplitude do seu ângulo α (que será definida na seção a seguir) e a área da esfera, $4\pi r^2$. Para tal, basta observarmos que a área do biângulo é diretamente proporcional à amplitude do ângulo. Então, aplicando uma simples Regra de Três, obtemos que a área de um biângulo é igual a: $2\alpha \cdot r^2$ (α em radianos) ou $\frac{\alpha \pi \cdot r^2}{90}$ (α em graus) .

2.5 – Ângulos

No plano Euclidiano, podemos definir ângulo como sendo uma região determinada por duas semi-retas com a mesma origem. As semi-retas são os lados do ângulo e a origem das semi-retas é o vértice do ângulo.

Na esfera, de maneira análoga, um ângulo é uma região delimitada por duas semi-circunferências máximas que se intersectam em dois pontos antípodas. Qualquer um dos pontos antípodas é designado o vértice do ângulo e as semi-circunferências máximas são os lados do ângulo.

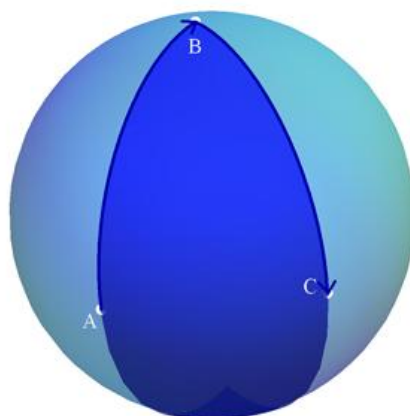


Figura 14 – Ângulo Esférico

Como duas semi-circunferências máximas definem duas regiões disjuntas, é preciso distinguir a qual delas nos referimos quando falamos em ângulo. Para não haver

ambiguidade sobre a qual região estamos a nos referir, vamos considerar ângulos orientados: considerando pontos distintos A , B e C onde B é o vértice do ângulo e A e C pertencem a cada um dos lados, chamaremos ângulo ABC à região que está sempre à direita do caminho orientado que vai de A para B e de B para C .

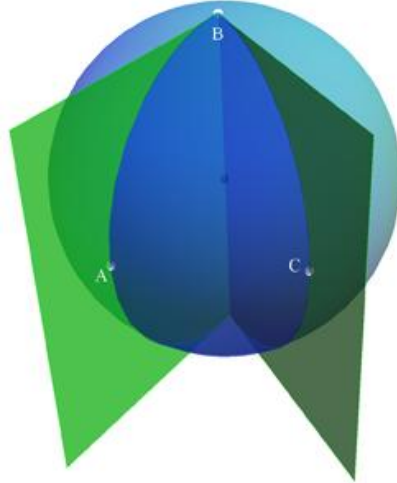


Figura 15 – Ângulo entre Semi-planos

Assim, a amplitude do ângulo corresponderá à amplitude do ângulo orientado formado pelos semi-planos que contêm os lados do ângulo, ou seja, os semi-planos que contêm os semi-círculos.

Há outra maneira de medir um ângulo na esfera. Tomemos um plano tangente à esfera em um dos vértices do ângulo considerado. Esse plano contém duas retas tangentes aos lados do ângulo. Podemos definir o ângulo entre as duas curvas (semi-circunferências) como o ângulo entre essas duas retas tangentes às mesmas, tomando a mesma orientação do ângulo na esfera.

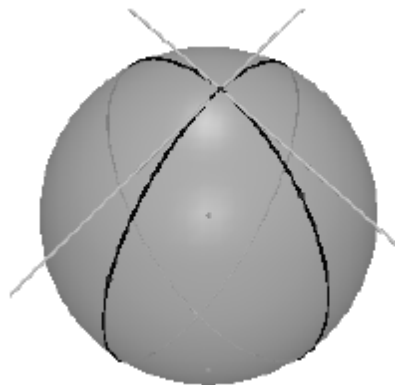


Figura 16 – Medida de ângulo através de retas tangentes

Observe que essas duas maneiras de medir a amplitude do ângulo são equivalentes.

2.6 – Triângulo Esférico

Um triângulo esférico é definido como um triângulo no plano: consiste de três pontos não pertencentes a um mesmo círculo máximo (ou seja, não colineares) denominados vértices, os arcos de circunferências máximas que unem os vértices, denominados lados, e a área delimitada por eles. Entretanto, essa definição contém uma série de ambiguidades. Primeiramente, há dois arcos de circunferência máxima que unem cada par de pontos. Então, uma vez que tivermos decidido qual dos arcos usar, a figura resultante é a fronteira de duas diferentes regiões, que podem ser vistas (pintadas de verde) exemplificadas na figura abaixo:

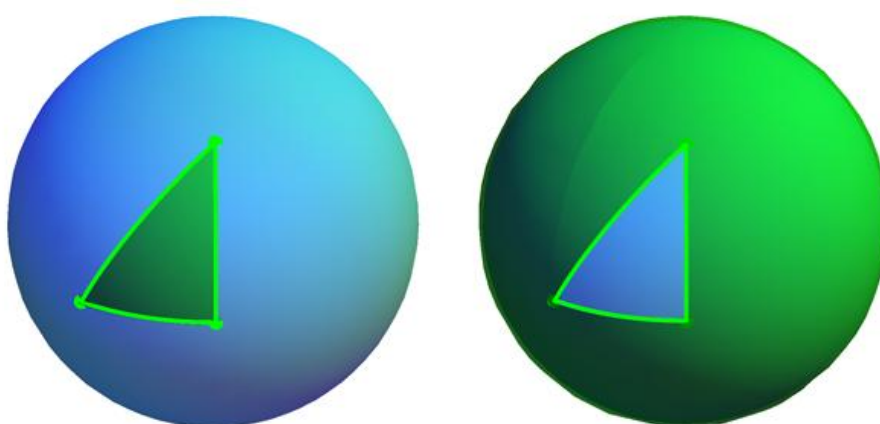


Figura 17 – Regiões delimitadas por um triângulo esférico

Já que somente um lado “grande” (o maior arco de circunferência máxima unindo dois dos pontos) pode ser usado sem que sejam obtidos pontos extras de intersecção dos lados, poderíamos contar 8 regiões que poderiam ser chamadas triângulos, cada uma delas tendo os três pontos como vértices. Obviamente a situação é ainda mais complicada se dois dos pontos forem antípodas.

Para nos livrarmos dessa complexidade, lidaremos somente com “*triângulos pequenos*”. Dados três vértices, dois a dois não sendo antípodas, o “*triângulo pequeno*” tem como lados os menores arcos de circunferências máximas que unem os vértices, ou seja, os segmentos esféricos definidos pelos vértices do triângulo, tomados dois a dois.

Note que sempre há um hemisfério contendo os três pontos dados, e a região que nós escolhemos é a região que é delimitada pelos lados e que está inteiramente contida nesse hemisfério.

Na verdade, a maioria dos resultados que apresentaremos também valem para triângulos “grandes”. Entretanto, para efeito didático, não nos ocuparemos com esses triângulos.

2.7 – Triângulos esféricos particulares

Assim como na Geometria Euclidiana os triângulos podem ser classificados quanto aos ângulos como acutângulos, retângulos ou obtusângulos, e quanto aos lados como equiláteros, isósceles ou escalenos, na Geometria Esférica também poderíamos dar nomes especiais para alguns triângulos:

Observando os ângulos:

- I – Retângulo: triângulo que possui um ângulo reto;
- II – Birretângulo: triângulo que possui dois ângulos retos;
- III – Trirretângulo: triângulo que possui três ângulos retos.

Observando os “lados”:

- I – Retilátero: triângulo com um “lado” medindo 90° ;
- II – Birretilátero: triângulo com dois “lados” medindo 90° cada um;
- III – Trirretilátero: triângulo com cada um dos “lados” medindo 90° .

Quando falamos de “lados”, estamos nos referindo aos arcos de circunferência máxima unindo os vértices do triângulo, ou seja, arcos determinados por ângulos com vértices no **centro** da esfera. Isso será melhor definido na seção 2.10.

Obviamente um triângulo trirretângulo também será trirretilátero, e vice-versa.

Note que não poderíamos classificar um triângulo esférico nas “categorias” acima, pois ele poderá não se enquadrar em nenhuma delas.

2.8 – Área de um triângulo esférico.

Na Geometria Esférica a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é sempre maior que 180° .

A diferença entre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico e a amplitude do ângulo raso (180° ou π rad) chama-se **excesso angular**.

Teorema de Girard: A área de um triângulo esférico é diretamente proporcional ao seu excesso angular.

Demonstração: Tomemos um triângulo esférico T contido numa semi-esfera. Sabe-se que a área da esfera de raio r é igual a $4\pi r^2$ e a área de um biângulo de amplitude α é igual a $2\alpha r^2$, com α em radianos. Considerando-se os três vértices do triângulo, temos seis biângulos dos quais três intersectam-se no interior do triângulo e os outros três biângulos intersectam-se no interior do triângulo antípoda. Na região esférica restante, os seis biângulos são disjuntos dois a dois.

Sejam α , β e γ as amplitudes **em radianos** dos ângulos internos do triângulo que são também as amplitudes dos seis biângulos. Temos que a soma da área dos seis biângulos é igual à área da esfera acrescida do dobro da área do triângulo esférico, A_T , e do dobro da área do seu antípoda. Como a área de T é igual à área do seu antípoda, obtemos:

$$2.(2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2) = 4r^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi r^2 + 2.A_T + 2.A_T = 4\pi r^2 + 4.A_T \Leftrightarrow$$

$$r^2(\alpha + \beta + \gamma) = \pi r^2 + A_T \Leftrightarrow A_T = r^2(\alpha + \beta + \gamma) - \pi r^2 = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Portanto, a área de um triângulo esférico é diretamente proporcional ao seu excesso angular. ■

Obviamente, se as amplitudes α , β e γ forem expressas em **graus**, as áreas dos biângulos serão dadas por $\frac{\alpha\pi r^2}{90^\circ}$, $\frac{\beta\pi r^2}{90^\circ}$ e $\frac{\gamma\pi r^2}{90^\circ}$, respectivamente, e deve-se fazer os ajustes necessários.

Este resultado é conhecido como o **Teorema de Girard**, por ter sido publicado pela primeira vez, em 1629, num trabalho do matemático flamengo Albert Girard (1595-1632). Contudo, há indícios de que uma regra muito semelhante tenha sido encontrada, em 1603, pelo matemático e astrónomo inglês Thomas Harriot (1560-1621). A prova apresentada acima é baseada numa prova do famoso matemático Leonhard Euler (1707-1783), que demonstrou este resultado de uma forma mais simples que Girard.

Uma variante interessante da fórmula que obtivemos nos diz que:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{1}{r^2} \cdot A_T$$

Como $A_T > 0$, para qualquer triângulo T, temos que $\alpha + \beta + \gamma > \pi$, provando o que foi afirmado no início desta seção.

É interessante notar que a soma dos ângulos é tanto mais próxima de 180° quanto menor for a **razão entre a área do triângulo e o quadrado do raio da esfera**. Deste modo, um triângulo bastante pequeno desenhado na superfície terrestre aparenta ser plano.

Outro resultado que decorre da fórmula da área de um triângulo esférico é que, dados dois triângulos com ângulos internos de mesma medida, eles terão a mesma área. Isso nos diz que o caso ângulo-ângulo-ângulo (AAA) de semelhança de triângulos da Geometria Euclidiana, na Geometria Esférica torna-se, na verdade, um caso de **congruência** de triângulos. Ou seja, na **Geometria Esférica não existem triângulos semelhantes** (com razão de semelhança diferente de 1, obviamente).

Além disso, podemos ver que, se um triângulo esférico possuir dois de seus ângulos congruentes a dois ângulos de outro triângulo esférico, isso não garante que os dois triângulos esféricos sejam congruentes. É preciso garantir a congruência do terceiro ângulo também.

2.9 – Polígonos Esféricos

Denomina-se polígono esférico a porção da superfície esférica limitada exclusivamente por arcos de circunferência máxima (fig. 18).

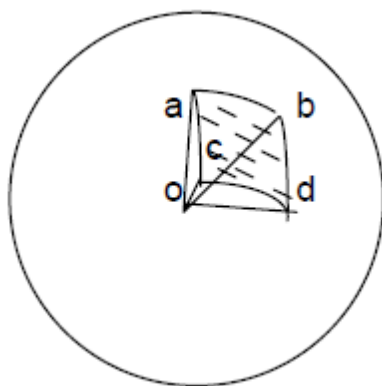


Figura 18 – Polígono Esférico

Um polígono esférico pode ser decomposto em triângulos esféricos. Um quadrilátero esférico, por exemplo, pode ser decomposto em dois triângulos esféricos. Assim, podemos obter a soma dos ângulos internos de um polígono esférico, usando o Teorema de Girard visto na seção anterior. Sendo P um quadrilátero esférico com ângulos internos a , b , c e d , obteremos que:

$$a + b + c + d = 2\pi + \frac{1}{r^2} \cdot \text{área}(P)$$

Também podemos generalizar esse resultado para um polígono qualquer. Supondo que P é um polígono esférico com n lados, obteremos (decompondo-o em $n-2$ triângulos esféricos) que a soma de seus ângulos internos é igual a:

$$(n - 2)\pi + \frac{1}{r^2} \cdot \text{área}(P)$$

2.10 – Trigonometria Esférica

A Trigonometria Esférica, no presente trabalho, terá por objetivo principal a resolução dos triângulos esféricos, onde serão utilizadas as leis que relacionam os elementos destes triângulos. Resolver um triângulo esférico é determinar três de seus elementos quando são conhecidos os outros três elementos, onde os elementos de um triângulo esférico são (conforme a fig. 19):

- Três ângulos: são os ângulos esféricos formados nos vértices do triângulo, que representaremos por **A**, **B** e **C**;
- Três lados: são os arcos de circunferências máximas que unem os três vértices, dois a dois, os quais denotaremos por **a**, **b** e **c**.

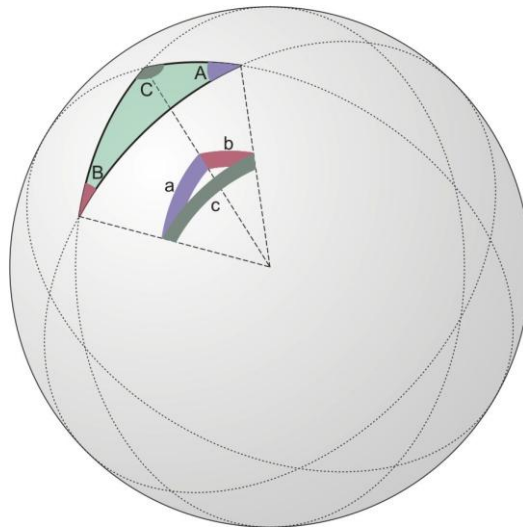


Figura 19 – Triângulo esférico e seus elementos

Deduziremos apenas um grupo de fórmulas, conforme segue.

2.10.1 – Fórmulas dos Quatro Elementos (lado) – Lei dos Cossenos

Seja ABC um triângulo esférico como na figura 19, chamando os lados BC de **a**, CA de **b** e AB de **c**. O lado **a** mede o ângulo BOC subtendido no centro da esfera

O pelo arco de grande círculo BC (fig. 20). Similarmente, b é medido pelo ângulo AOC e c pelo ângulo AOB.

Tomemos um plano tangente à esfera no ponto A. Extendendo a reta OB, ela interceptará esse plano no ponto D, e OC interceptará o plano no ponto E. Então AD será a tangente em A do grande círculo AB, e AE a tangente em A do grande círculo AC (fig. 20). Além disso, a reta OA é perpendicular a AD e AE (pois, pelo fato do plano tomado ser tangente à esfera no ponto A, ele será perpendicular ao raio OA; portanto, a reta OA será perpendicular a qualquer reta desse plano passando pelo ponto A). Por construção, AD está no plano do grande círculo AB. O ângulo esférico BAC é definido como o ângulo entre as tangentes, em A, aos grandes círculos AB e AC. Logo, $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$, o que chamaremos, simplesmente, de A.

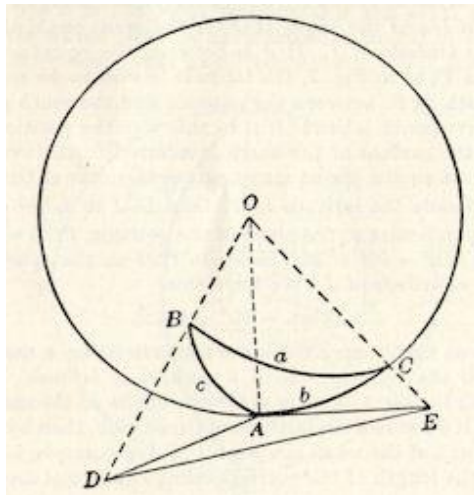


Figura 20 – Plano tangente à esfera no ponto A

No triângulo plano OAD, o ângulo OAD é 90° e o ângulo AOD é idêntico ao ângulo AOB, que chamaremos de c . Lembrando que $tg c = \frac{\text{sen } c}{\text{cos } c}$ e que $\text{sec } c = \frac{1}{\text{cos } c}$, obteremos:

$$AD \cos c = OA \text{ sen } c; \text{ logo, } AD = OA \text{ tg } c$$

e

$$OD \cos c = OA; \text{ logo, } OD = OA \text{ sec } c$$

Do triângulo plano OAE podemos deduzir que:

$$AE \cos b = OA \text{ sen } b; \text{ logo, } AE = OA \text{ tg } b$$

e

$$OE \cos b = OA; \text{ logo, } OE = OA \text{ sec } b$$

E do triângulo plano DAE obtemos:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 AD.AE.\cos D\hat{A}E$$

ou

$$DE^2 = OA^2.(tg^2 c + tg^2 b - 2.tg c.tg b.\cos A) \quad (*)$$

Do triângulo plano DOE temos:

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2.OD.OE.\cos D\hat{O}E$$

Além disso, como $D\hat{O}E = B\hat{O}C = a$, obtemos:

$$DE^2 = OA^2.(sec^2 c + sec^2 b - 2.sec b.sec c.\cos a) \quad (**)$$

De (*) e (**) obteremos, então:

$$sec^2 c + sec^2 b - 2.sec b.sec c.\cos a = tg^2 c + tg^2 b - 2.tg b.tg c.\cos A \quad (***)$$

Sabemos também que $sec^2 c = 1 + tg^2 c$ e que $sec^2 b = 1 + tg^2 b$. Substituindo em (***) e multiplicando por $(\cos b.\cos c)$, obteremos, finalmente:

$$\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos A,$$

expressão que é chamada de **Lei dos Cossenos da Trigonometria Esférica** ou **Fórmula dos Quatro Elementos**.

Podemos proceder de maneira semelhante para os ângulos B e C, obtendo:

$$\cos b = \cos a.\cos c + \sin a.\sin c.\cos B$$

e

$$\cos c = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b.\cos C.$$

Veremos uma aplicação bastante interessante dessas fórmulas no Capítulo 4.

2.10.2 – Fórmula dos Quatro Elementos (ângulo)

Para deduzirmos esse segundo grupo de fórmulas, colocaremos inicialmente algumas definições:

Definição 2.10.2.1: Denominamos pólos de uma circunferência máxima os extremos do diâmetro da esfera que é perpendicular ao plano que contém a circunferência máxima.

Para exemplificar, podemos citar o pólo norte e o pólo sul, que são pólos da circunferência máxima denominada Linha do Equador.

Definição 2.10.2.2: Dado um triângulo ABC de lados a, b e c, denominamos **triângulo polar A'B'C'** ao triângulo cujos lados a', b' e c' são suplementares dos ângulos A, B e

C do triângulo dado, e os ângulos A' , B' e C' são suplementares dos lados a , b e c , ou seja:

$$A' = 180^\circ - a ; B' = 180^\circ - b ; C' = 180^\circ - c$$

$$a' = 180^\circ - A ; b' = 180^\circ - B ; c' = 180^\circ - C.$$

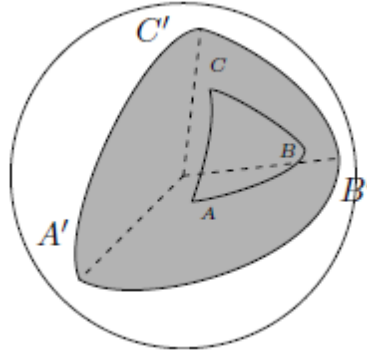


Figura 21 - Triângulo Polar

O triângulo polar se obtém unindo por arcos de circunferência máxima os polos correspondentes a cada um dos lados, escolhendo, em cada caso, aquele que se encontra no mesmo hemisfério do triângulo esférico dado.

Aplicando-se, agora, a Lei dos Cossenos vista anteriormente ao triângulo polar ($A'B'C'$) do triângulo ABC, teremos:

$$\cos a' = \cos b' \cdot \cos c' + \sin b' \cdot \sin c' \cdot \cos A', \text{ ou seja,}$$

$$\cos (180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B) \cdot \cos(180^\circ - C) + \sin(180^\circ - B) \cdot \sin(180^\circ - C) \cdot \cos(180^\circ - a).$$

Sabendo que $\sin(180^\circ - x) = \sin x$ e $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$, para qualquer ângulo x , obteremos que:

$$-\cos A = -\cos B \cdot (-\cos C) + \sin B \cdot \sin C \cdot (-\cos a)$$

Reescrevendo, teremos:

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a,$$

e, de maneira análoga,

$$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b$$

$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c.$$

2.10.3 – Lei dos Senos para Triângulos Esféricos

Tomemos, novamente, um triângulo esférico ABC, com lados a , b e c . Tracemos o plano perpendicular ao raio AO que passa por C e o plano perpendicular ao raio OB que passa por C. A intersecção desses planos com o ângulo triedro associado ao triângulo ABC formam os triângulos planos CED e CDF, como vemos na figura abaixo.

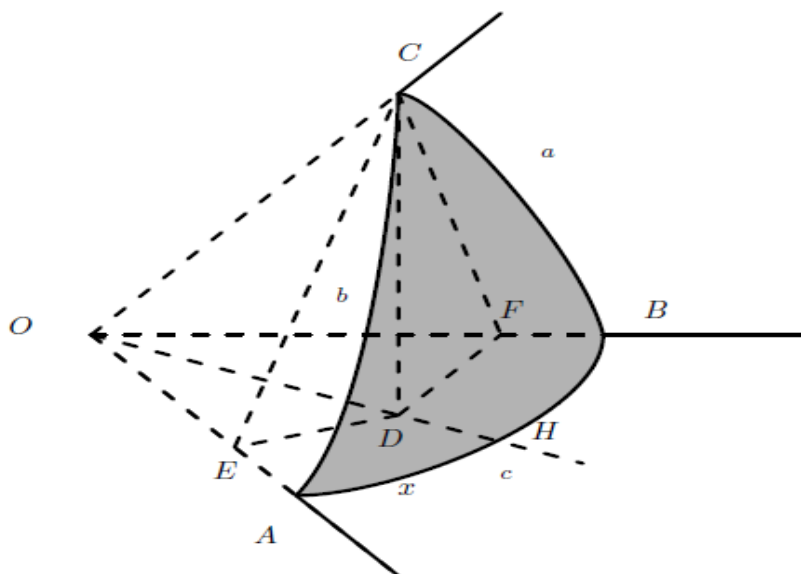


Figura 22 – Lei dos Senos

Sabemos que $OA = OB = OC = r$ (onde r é o raio da esfera). Por construção, temos, então, que $\text{sen } b = \frac{CE}{r}$, $\text{cos } b = \frac{OE}{r}$, $\text{sen } a = \frac{CF}{r}$ e $\text{cos } a = \frac{OF}{r}$. Por outro lado, $CD = CE \cdot \text{sen } A$ (pois o ângulo $CÊD$ é igual ao ângulo A) e $CD = CF \cdot \text{sen } B$ (pois $CÊD = B$). Assim teremos:

$$CE \cdot \text{sen } A = CF \cdot \text{sen } B \quad \text{e, conseqüentemente,}$$

$$r \cdot \text{sen } b \cdot \text{sen } A = r \cdot \text{sen } a \cdot \text{sen } B,$$

donde se conclui que

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B}$$

Com um raciocínio análogo, obteremos que:

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}.$$

Observe que, em todas as fórmulas trigonométricas obtidas, não aparece o raio da esfera utilizada. Isso é de fundamental importância para a astronomia esférica, ou astronomia de posição, a qual diz respeito fundamentalmente às direções nas quais os astros são vistos, sem se preocupar com sua distância. É conveniente expressar essas direções em termos das posições sobre a superfície de uma esfera – a Esfera Celeste. Essas posições são medidas unicamente em ângulos. Dessa forma, o raio da esfera, que é totalmente arbitrário, não entra nas equações. Isso permite que as fórmulas apresentadas possam ser utilizadas.

Capítulo 3 - Matemática e Geografia

O homem tem estado interessado pela Terra, sobre a qual ele vive, há muitos séculos. Durante muito tempo este interesse esteve limitado, naturalmente, à vizinhança imediata do seu lar. Mais tarde ampliou a distância ao local de comércio e com o desenvolvimento dos meios de transportes passou a especular todo o planeta. Essa curiosidade, desde os tempos remotos, está evidenciada pela medição sobre o tamanho, forma e a composição da Terra.

Relembraremos aqui alguns conceitos geográficos que nos ajudam a compreender um pouco melhor este nosso planeta Terra, relacionando-os com as noções de Geometria Esférica vistas no capítulo anterior.

3.1 – Terra Esférica

Os gregos contribuíram sobremaneira na determinação da forma da Terra, com suas meditações e teorizações. *Homero* defendia uma Terra em forma de disco achatado, *Pitágoras* e *Aristóteles* teorizaram uma Terra com formato esférico, enquanto que *Amaximenes* acreditava numa Terra retangular. Contudo, *Erastóstenes*, filósofo e sábio grego, realizou medidas objetivas para a determinação da dimensão do nosso planeta.

Eratóstenes observou que no dia do solstício do verão (do latim sol + sistere, que não se mexe – é o momento em que o Sol, durante seu movimento aparente na esfera celeste, atinge a maior declinação em latitude, medida a partir da linha do equador, fazendo com que os raios solares incidam perpendicularmente à Terra), na cidade de Syene (atual Assuam), o sol iluminava o fundo de um poço ao meio dia e, ao mesmo tempo, notou que o sol projetava uma sombra com um ângulo igual a $1/50$ do círculo ($7^{\circ}12' = 0,1256$ rad) em Alexandria.

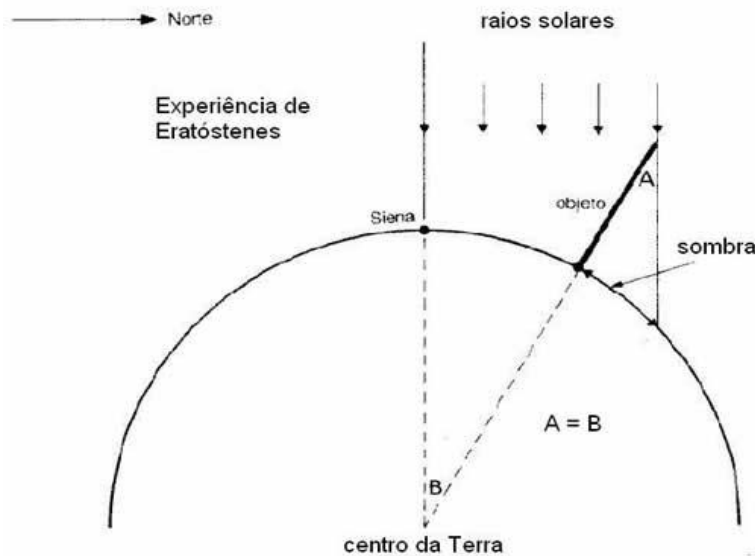


Figura 23 – Experiência de Eratóstenes

Baseado em mapas egípcios da época, ele estimou a distância entre Alexandria e Syene: 5000 estádios (1 estádio \cong 157,5 m). Acreditando-se que as duas cidades estavam no mesmo meridiano e, de acordo com as observações e hipóteses, Eratóstenes calculou o raio da esfera terrestre: $r = (5000 \times 157,5)/0,1256 = 6270$ km. A precisão desse resultado é impressionante, uma vez que o valor atualmente aceito é de 6378 km.

3.2 – Terra Elipsoidal

No século XVII, com a modernização dos instrumentos geodésicos foram desenvolvidas novas técnicas de levantamentos, como a *triangulação*, e a Ciência Geodésia deu um grande avanço. O francês Picard realizou, na França, a medição de um comprimento de arco de meridiano. J.Cassini continuou seu trabalho estendendo o comprimento do arco para o norte em direção a Dunquerque e para o sul até a divisa com a Espanha. Os cálculos dos comprimentos dos arcos de meridianos mostraram, como resultado, comprimento maior para o sul indicando um formato de elipsóide para a Terra, com o eixo de rotação maior que o eixo equatorial. O resultado foi contestado por Isaac Newton, o qual afirmava que, sendo a Terra composta de $\frac{3}{4}$ de água, a massa fluida devido à rotação da Terra tenderia a alongar-se no equador e, conseqüentemente, achatarse nos pólos, formando, nesse caso, um eixo de rotação menor que o eixo equatorial. Esta teoria estava baseada na lei de gravidade.

As duas teorias, uma baseada em medição e a outra em hipótese, davam margem a muita controvérsia entre os cientistas. Com o intuito de terminar com o impasse, a Academia Francesa de Ciência enviou expedições ao Peru e à Lapônia para medirem um comprimento de um arco de meridiano. As medições provaram que a Terra era achatada nos pólos, segundo previra Newton. O achatamento terrestre foi, então, demonstrado pela primeira vez através de medições geodésicas.

A figura abaixo mostra uma secção da superfície terrestre através de um plano que contém a reta que liga os Pólos Norte e Sul. Esta secção aproxima-se de uma elipse cujo semi-eixo maior a é a metade do diâmetro do Equador e o semi-eixo menor b é a metade da distância entre os pólos.

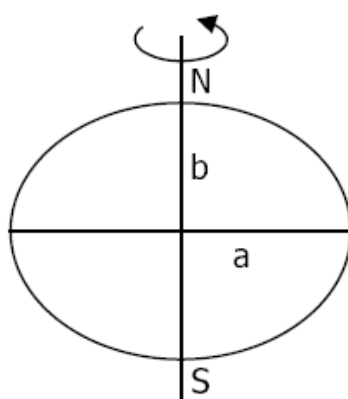


Figura 24 – Elipsóide de revolução

A superfície terrestre é, então, a superfície de revolução gerada por essa elipse quando esta gira em torno da reta que passa pelos pólos, chamado de *elipsóide de revolução*.

A razão $\epsilon = (a - b)/b$ chama-se *achatamento* da Terra.

Não havendo mais dúvidas quanto à forma terrestre, os cientistas concentraram seus trabalhos na determinação do “*melhor elipsóide*”, acarretando, com isso, um grande número de parâmetros elipsoidais, como exemplifica a tabela abaixo.

	a (metros)	b (metros)	ϵ
Bessel (1841)	6.377.397	6.356.078	0,0033541
Clarke (1880)	6.378.249	6.356.515	0,0034191
Helmert (1906)	6.378.200	6.356.940	0,0033443
Hayford (1924)	6.378.388	6.356.911	0,0033785
Krassovski (1940)	6.378.245	6.356.863	0,0033636

O valor extremamente pequeno de ϵ nos permite, para efeito didático, desprezar esse achatamento e considerar a Terra como se fosse uma esfera.

3.3 - Nomenclatura

A superfície da Terra passa a ser considerada daqui por diante como um globo: o *globo terrestre*. O globo terrestre é ainda o nome do instrumento didático que representa a Terra como uma esfera. Iniciamos estabelecendo a nomenclatura apropriada. A figura abaixo ilustra um globo terrestre.

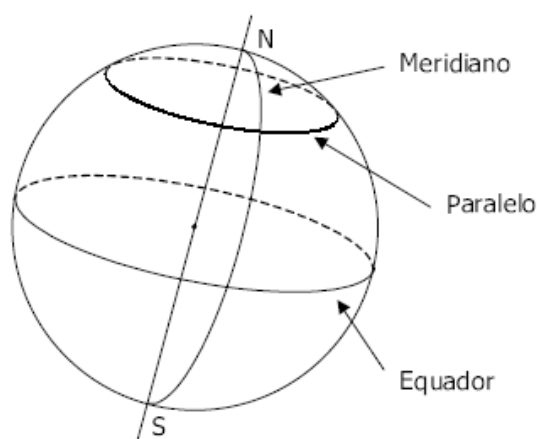


Figura 25 – Meridiano e Paralelo

O ponto N representa o **Pólo Norte** e o ponto S o **Pólo Sul**. A reta determinada por N e S é chamada o **eixo polar**. Ela é a reta em torno da qual a Terra efetua seu movimento de rotação.

O plano que passa pelo centro da superfície esférica e é perpendicular ao eixo polar chama-se o **plano do Equador**.

O **Equador** é a intersecção do plano do Equador com a superfície esférica. O Equador é, portanto, uma circunferência máxima.

Um plano que passa pelo centro da superfície esférica divide-a em duas partes chamadas **hemisférios**.

O plano do Equador divide a superfície terrestre em dois hemisférios: o **Hemisfério Norte** (que contém o Pólo Norte) e o **Hemisfério Sul** (que contém o Pólo Sul).

Os **paralelos** são as secções da superfície terrestre através de planos paralelos (ou coincidentes) ao plano do Equador. São então circunferências. Os paralelos notáveis são:

- o Equador
- o Trópico de Câncer
- o Trópico de Capricórnio
- o Círculo Polar Ártico
- o Círculo Polar Antártico

Observe que, na Geografia, muitas vezes é utilizada a palavra “círculo” (como em Círculo Polar Ártico) para designar o que é, na verdade, uma circunferência. Também descrevem o Equador como um círculo máximo. Mas isso não causará maiores problemas, visto que a nomenclatura utilizada por profissionais não matemático, como os geógrafos, não necessita coincidir exatamente com aquela usada pelos matemáticos (até muitos matemáticos já não fazem a distinção entre círculo e circunferência).

Equador é o nome dado à linha imaginária que resulta da intersecção da superfície da Terra com o plano que contém o seu centro e é perpendicular ao eixo de rotação. O equador divide a superfície da Terra em dois hemisférios: o *hemisfério norte*, ou setentrional, que contém o polo norte, e o *hemisfério sul*, ou meridional, que contém o Polo Sul. O raio do equador é cerca de 6.378 km, o que corresponde a um perímetro de 40.075 km.

Para entender-se em termos práticos a definição dos **Trópicos de Câncer** e de **Capricórnio**, pode-se considerar a posição o Zênite do Sol. Nos pontos da Terra exatamente sobre trópicos de *Câncer* e de *Capricórnio* haverá ao menos um momento, num único dia por ano, em que o *Sol* estará em seu completo *Zênite*, ou seja, estará totalmente "a pino", de modo que as sombras dos objetos ficarão exatamente sob os mesmos o que ocorre por volta de meio dia, variando essa hora em função da posição relativa do local dentro do seu fuso horário. Isso ocorrerá na data do solstício de verão do respectivo hemisfério.

Nos pontos da “Terra” entre os trópicos de *Câncer* e de *Capricórnio* haverá um momento, em dois dias por ano, nessa condição de "sol a pino" (*Zênite*). Sobre a linha do Equador essas duas datas são os equinócios (20~21 de Março; 22~23 de Setembro), separados entre si por cerca de 6 meses.

À medida em que as latitudes se afastam do *Equador*, a diferença entre as datas dos dois *Zênites solares* vai se reduzindo desde 6 meses no Equador, até data única

sobre os dois trópicos ($23^{\circ}26'16''$ N e $23^{\circ}26'16''$ S). Ao *norte* do Trópico de Câncer e ao *sul* do Trópico de Capricórnio, *jamais* o Sol ficará no seu *Zênite*.

O **Círculo Polar Ártico** é o paralelo da latitude $66^{\circ} 33' 44''$ N. Define uma linha imaginária no planeta, ao norte da qual há pelo menos um dia de noite absoluta (24 horas de escuridão) no inverno e pelo menos um dia de luz absoluta (24 horas de sol) no verão boreal (sol da meia-noite) por ano.

O **Círculo Polar Antártico** é a linha imaginária (paralelo) cuja latitude é $66^{\circ}6/10$ S. O Círculo Polar Antártico passa pelas partes mais ao norte da Antártida. Durante o Inverno Austral, a partir dessa linha as noites absolutas, com 24 horas de duração, vão se acumulando em direção ao Pólo Sul e durante o Verão acontece o contrário, pelo menos um dia de luz absoluta (24 horas de Sol, Sol da meia-noite) pode ser registrado nesse paralelo.

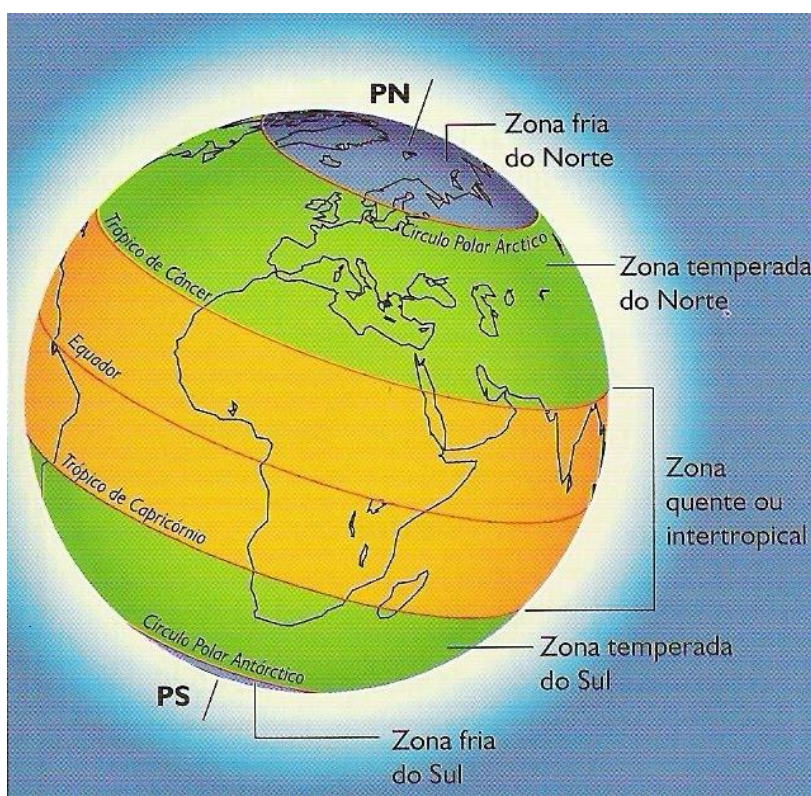


Figura 26 – Zonas Terrestres delimitadas pelos paralelos notáveis

Os **meridianos** são semicircunferências que ligam os Pólos Norte e Sul por meio de arcos máximos, isto é, arcos contidos em circunferências máximas que passam pelos pólos. Convém ressaltar que os meridianos, ao contrário dos paralelos, não são circunferências, mas semicircunferências. Além disso, eles estão contidos em planos

perpendiculares ao plano do Equador. O meridiano mais notável é o de **Greenwich**, que passa sobre a localidade de Greenwich (no Observatório Real, nos arredores de Londres, Reino Unido) e que, por convenção, divide o globo terrestre em ocidente e oriente., permitindo medir a longitude. Foi estabelecido por *Sir George Biddell Airy* em 1851, definido por acordo internacional em 1884, e serve de referência para calcular distâncias em longitudes e estabelecer os fusos horários. Cada fuso horário corresponde a uma faixa de quinze graus de longitude de largura, sendo a hora de Greenwich chamada de **Greenwich Mean Time (GMT)**.



Figura 27 – Localização da cidade de Greenwich

3.4 – Coordenadas Geográficas

O globo terrestre serve para localizar um determinado ponto ou região da Terra. É claro que não podemos apontar o dedo para algum lugar e simplesmente dizer: é aqui! Necessitamos de algo mais preciso. Para isso, criou-se um sistema de coordenadas para dar a localização exata de um ponto no globo, utilizando as chamadas **coordenadas geográficas: latitude e longitude**.

Segundo ALVES (2012, p. 10), temos as seguintes definições:

- A **latitude** de um ponto P é a medida do arco de meridiano que passa por P situado entre o paralelo que contém P e o Equador. A latitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a 90° N (norte) ou de 0° a 90° S (sul).

- A **longitude** de um ponto P é a medida do arco de paralelo que passa por P situado entre o meridiano que contém P e o meridiano de Greenwich. A longitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a 180° E (leste) ou de 0° a 180° W (oeste).

Note que também podemos considerar a latitude variando de 0° a $\pm 90^\circ$, sendo positiva no Hemisfério Norte e negativa no Hemisfério Sul. Do mesmo modo podemos considerar a longitude, variando de 0° a $\pm 180^\circ$, utilizando o sinal positivo para longitude de pontos situados a leste de Greenwich e negativo para pontos situados a oeste. Por exemplo, todos os pontos situados em território brasileiro terão longitude negativa.

Na figura a seguir temos que $\theta = m(\angle EOP)$ é a latitude de P, e $\varphi = m(\angle GMP)$ é a longitude de P. É claro que pontos sobre um mesmo paralelo possuem latitudes iguais e pontos sobre um mesmo meridiano possuem longitudes iguais.

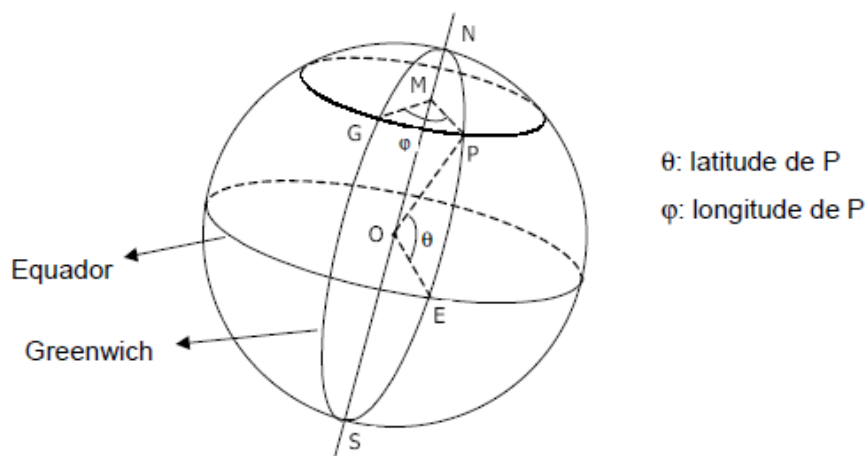


Figura 28 – Latitude e Longitude de um ponto P

Já nos últimos anos do Ensino Fundamental os alunos começam a trabalhar com as noções de latitude e longitude, e este trabalho continua no Ensino Médio (1º ano), conjuntamente com o estudo de mapas cartográficos e escalas.

Interessou-me, em particular, resolver o seguinte problema: conhecendo-se as coordenadas geográficas (latitude e longitude) de duas cidades (por exemplo, Rio de Janeiro e Nova Iorque), como calcular a menor distância a ser percorrida para ir de uma até a outra?

Investigando junto a colegas, professores de Geografia, verifiquei que são unânimes no método que utilizariam:

- 1°) Em um mapa cartográfico adequado, localizar os locais (cidades) indicados;
- 2°) Com uma régua, traçar um segmento de reta ligando os dois pontos;
- 3°) Medir o comprimento do segmento de reta traçado;
- 4°) Utilizando a escala apresentada no mapa, obter a “distância real” entre os dois pontos.

Bem, e há algum problema nesse método? Ocorre que os mapas sempre apresentam distorções, independentemente da projeção cartográfica utilizada. Para pequenas distâncias, e em certas regiões apresentadas no mapa, essas distorções podem ser insignificantes. Porém, para distâncias maiores como, por exemplo, na navegação de longo curso, não pode ser desprezada a curvatura da Terra, e as distorções de um mapa passam a ser bastante significativas.

A fim de que o cálculo da distância solicitada seja feito com maior precisão, apresentaremos a seguir um método mais satisfatório, fazendo uma ponte entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas de um ponto sobre o globo terrestre.

3.5 – Coordenadas Cartesianas

Primeiramente trabalharemos num sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem O.

É usual a associação de um ponto P no espaço tridimensional (\mathbb{R}^3) a uma tripla (x, y, z) onde x é a projeção de P sobre o eixo x, y é a projeção de P sobre o eixo y, e z é a projeção de P sobre o eixo z, que chamaremos de coordenadas de P.

Assim, dado um ponto $P = (x,y,z)$ do espaço, aplicando-se o Teorema de Pitágoras duas vezes temos que a distância de P a O é expressa por

$$d(P,O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

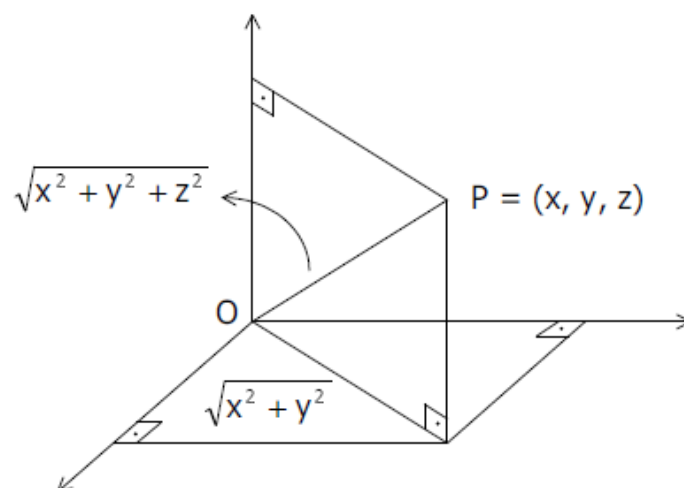


Figura 29 – Coordenadas Cartesianas de um ponto P

3.5.1 – Distância entre dois pontos

Sejam $P = (a, b, c)$ e $Q = (a', b', c')$ pontos no espaço tridimensional.

Se P e Q estiverem sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados, eles terão duas coordenadas iguais e a distância entre eles é dada pelo módulo da diferença entre as coordenadas diferentes.

Suponhamos então que a reta que passa por P e Q não seja paralela a qualquer um dos eixos coordenados. Consideremos os seguintes pontos auxiliares (conforme a fig. 30):

$R = (a, b, c')$, $S = (a, b, 0)$, $T = (a', b', 0)$ e $U = (a', b, 0)$.

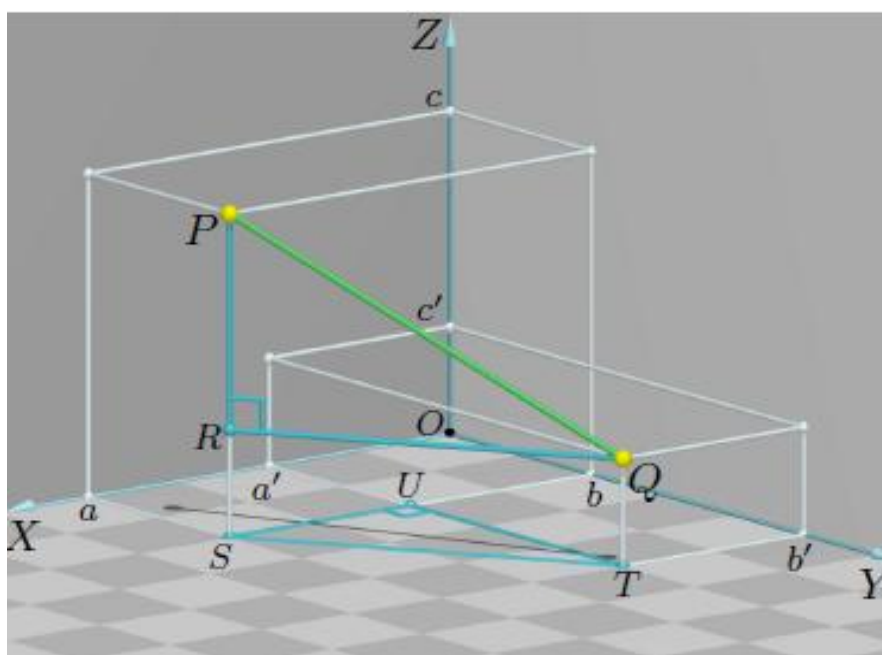


Figura 30 - Distância entre dois pontos do espaço cartesiano

Temos, pela observação anterior, que

$$d(S, U) = |a' - a| \text{ e } d(U, T) = |b' - b|.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ΔSUT , obtemos:

$$d(S, T)^2 = d(S, U)^2 + d(U, T)^2 = |a' - a|^2 + |b' - b|^2 = (a' - a)^2 + (b' - b)^2.$$

Como os segmentos \overline{ST} e \overline{RS} são lados opostos de um retângulo e, portanto, possuem a mesma medida, temos:

$$d(R, Q)^2 = d(S, T)^2 = (a' - a)^2 + (b' - b)^2.$$

Também vemos que $d(P, R) = |c' - c|$, já que os pontos P e R estão sobre uma mesma reta paralela ao eixo Oz.

Além disso, como o triângulo ΔPRQ também é retângulo, obtemos, finalmente, que:

$$d(P, Q)^2 = d(P, R)^2 + d(R, Q)^2 = (c' - c)^2 + (a' - a)^2 + (b' - b)^2,$$

ou seja,

$$d(P, Q) = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}$$

Este resultado será importante mais adiante. A seguir veremos como estabelecer a relação entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas.

3.6 – Coordenadas cartesianas x Coordenadas geográficas

Consideremos agora um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com:

- origem O no centro da Terra;
- eixo Oz positivo apontando na direção do Pólo Norte N;
- plano Oxy sendo o plano do Equador com o eixo Ox positivo cortando o Meridiano de Greenwich e o eixo Oy positivo cortando o meridiano de longitude 90° E.

Dado um ponto $P = (x, y, z)$ do espaço, observemos θ e φ os ângulos assinalados na figura a seguir:

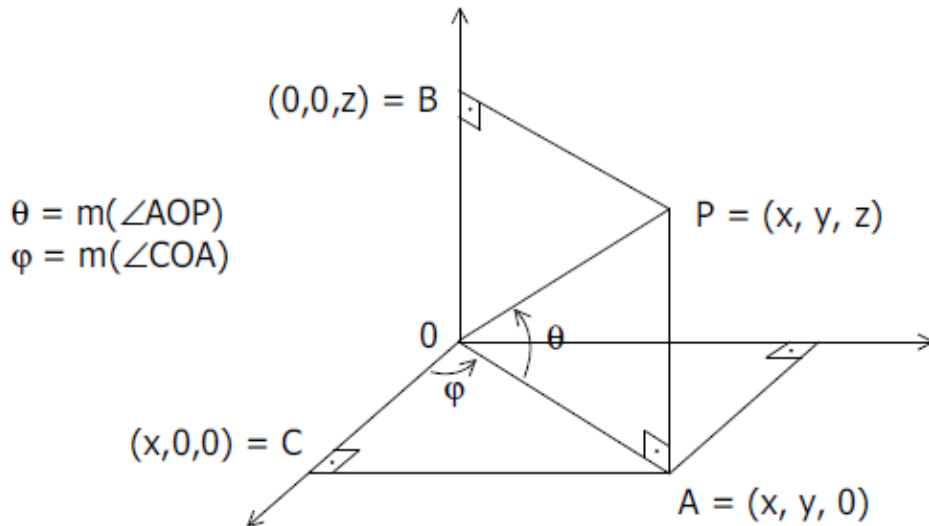


Figura 31 – Coordenadas Cartesianas e os ângulos θ e φ (Latitude e Longitude)

Quando P está sobre a superfície terrestre os ângulos θ e φ acima indicados correspondem exatamente à latitude e longitude do ponto P como foi definido anteriormente.

A diferença entre $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e o raio da Terra é chamada a **elevação** (ou **altitude**) de $P = (x, y, z)$.

No triângulo retângulo $\triangle OPB$ da figura acima temos $\cos(90 - \theta) = \frac{OB}{OP} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ e, como $\cos(90 - \theta) = \text{sen}\theta$, segue que $\text{sen}\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Esta expressão atribui a θ um único valor entre 0 e 90 quando $z > 0$ e um único valor entre -90 e 0 quando $z < 0$. No primeiro caso, dizemos então que a latitude de P é θ° N, enquanto que no segundo a latitude de P é $(-\theta)^\circ$ S.

Por outro lado, no triângulo retângulo $\triangle OAC$ temos $\text{sen}\varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $\text{cos}\varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Estas expressões definem um único φ entre 0 e 180 quando $y > 0$ e dizemos que a longitude de P é φ° E. Quando $y < 0$, φ assume um único valor entre -180 e 0 e, neste caso, a longitude de P é $(-\varphi)^\circ$ W.

Também podemos fazer o caminho inverso: conhecendo-se a latitude θ , a longitude φ e a elevação de um ponto P, podemos determinar suas coordenadas cartesianas x , y e z .

Anteriormente interpretamos as designações N/S para θ e E/W para φ como positivas/negativas, respectivamente. Por exemplo, um ponto com latitude 50°N e longitude 60°W terá $\theta = 50^\circ$ e $\varphi = -60^\circ$ enquanto que um ponto com latitude 50°S e longitude 60°E terá $\theta = -50^\circ$ e $\varphi = 60^\circ$.

A partir da elevação de P obtemos o valor de $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, que denotaremos por r . Logo $\text{sen}\theta = \frac{z}{r}$ e, portanto, $z = r \text{sen}\theta$.

Por outro lado, como $\text{cos}\theta = \text{sen}(90^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}$, segue que $x = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \text{cos}\varphi = r \cdot \text{cos}\theta \cdot \text{cos}\varphi$ e $y = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \text{sen}\varphi = r \cdot \text{cos}\theta \cdot \text{sen}\varphi$.

Ou seja, repetindo, temos as seguintes relações entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas:

- $x = r \text{cos}\theta \text{cos}\varphi$
- $y = r \text{cos}\theta \text{sen}\varphi$
- $z = r \text{sen}\theta$

3.7 – Distância em uma superfície esférica a partir das coordenadas

A distância $d(A,B)$ entre dois pontos A e B é, essencialmente, o menor dos comprimentos das trajetórias que ligam A a B. No plano, a trajetória de menor comprimento é o segmento de linha reta \overline{AB} e seu comprimento AB é a distância entre A e B. No entanto, vimos que sobre uma superfície esférica não existe um segmento de linha reta. Também não seria possível fazer túneis em linha reta ligando quaisquer dois pontos da Terra. Voltamos, então, à questão colocada anteriormente (seção 3.4). Como medir a distância entre dois pontos A e B neste caso?

Como foi visto no capítulo 2, a distância entre dois pontos determina-se calculando o **comprimento do menor arco de circunferência máxima** definido pelos dois pontos.

Podemos entender isso com o seguinte raciocínio: quanto maior o raio de uma circunferência, mais ela se aproxima de ser uma reta. Como as circunferências de maior raio contidas numa superfície esférica S são as circunferências máximas, é razoável esperar que a distância (em S) entre dois pontos A e B seja o comprimento do arco menor AB da circunferência máxima que passa por A e B (veja a prova no final do capítulo).

Bem, o cálculo desse comprimento, então, pode ser feito a partir do conhecimento da medida α do ângulo $\angle AOB$ onde O é o centro da superfície esférica S. Como o comprimento do arco é proporcional à medida do ângulo central correspondente, uma regra de três simples nos dá o valor procurado.

Sendo r o raio da superfície esférica temos:

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & \text{-----} & 2\pi r \\ \alpha^\circ & \text{-----} & d(A,B) \end{array}$$

de modo que $d(A,B) = (\alpha / 360).(2\pi).r$.

Todos os meridianos estão contidos em circunferências máximas. No entanto, entre os paralelos, apenas o Equador é uma circunferência máxima. Assim, quando A e B possuírem a mesma longitude, a diferença entre as latitudes poderá ser usada para achar a medida α . Da mesma forma, quando A e B estiverem sobre o Equador, usaremos a diferença entre as longitudes para calcular α .

Quando duas cidades A e B estão sobre um mesmo paralelo, que não seja o Equador, o caminho mais curto possível entre elas, ao contrário do aparentemente possa parecer à primeira vista, **não é** o comprimento do arco menor \widehat{AB} daquele paralelo e sim o comprimento do arco menor \widehat{AB} da circunferência máxima que passa por A e B.

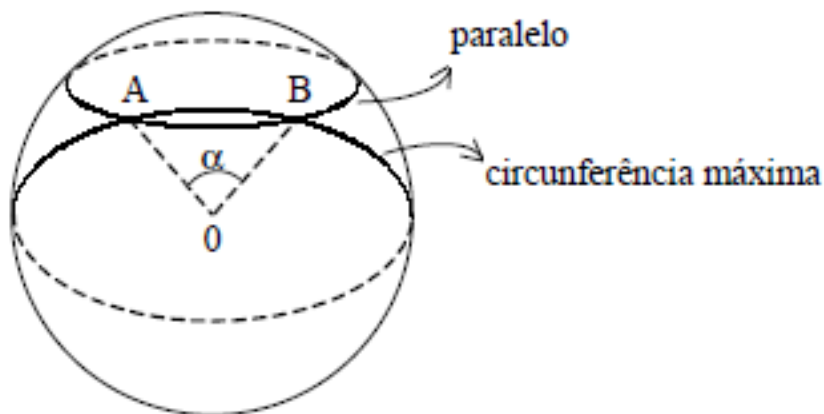


Figura 32 – Caminho entre dois pontos pelo paralelo e pela circunferência máxima

Esse arco de menor distância entre dois pontos, no âmbito da navegação marítima, é chamado de **Ortodroma**. De uma maneira geral, a curva de menor comprimento entre dois pontos dados em uma superfície (não necessariamente esférica) é chamada de **Geodésica**.

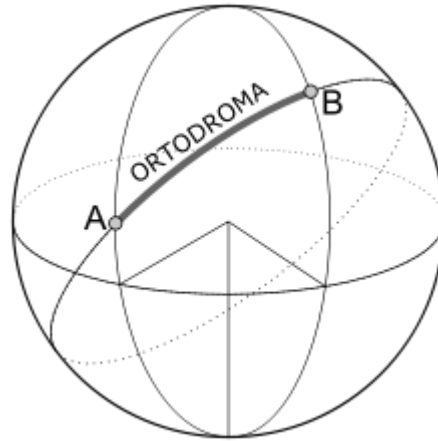


Figura 33 – Distância ortodrômica entre dois pontos ao largo de um círculo máximo sobre a superfície de uma esfera

Para exemplificar, tomemos as cidades de Nova York e Nápoles, que estão praticamente sobre o mesmo paralelo (41° N), e cujas longitudes são 74° W e 14° E, respectivamente. O comprimento do arco menor do paralelo entre as duas cidades é cerca de 7419 km.

Se A e B representam as cidades de Nova York e Nápoles, respectivamente, calculemos então o comprimento do arco menor AB da circunferência máxima que passa por A e B, ou seja, vamos obter calcular $\alpha = m(\angle AOB)$.

Considerando-se um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas como descrito na seção anterior e supondo, para simplificar os cálculos, o raio da Terra medindo 6400 km, podemos escrever:

$$A = 6400 (\cos 41^\circ \cdot \cos(-74^\circ), \cos 41^\circ \cdot \sin(-74^\circ), \sin 41^\circ)$$

$$B = 6400 (\cos 41^\circ \cdot \cos 14^\circ, \cos 41^\circ \cdot \sin 14^\circ, \sin 41^\circ),$$

ou seja,

$$A = 6400 (0,20802, -0,72547, 0,65606)$$

$$B = 6400 (0,73229, 0,18257, 0,65606).$$

A medida procurada α pode ser obtida aplicando-se a Lei dos Cossenos ao triângulo $\triangle AOB$:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos\alpha. \quad (*)$$

Sabemos que $OA = OB = r = 6400$. Calculemos, conforme visto em 3.5.1, a medida AB:

$$\begin{aligned}
AB &= 6400\sqrt{(0,73229 - 0,20802)^2 + (0,18257 + 0,72547)^2 + (0,65606 - 0,65606)^2} \\
&= 6400.\sqrt{0,274859032 + 0,824536641} = 6400.\sqrt{1,099395674} = 6400.1,048520707 \\
&= 6710,532527
\end{aligned}$$

Substituindo os valores obtidos em (*), obteremos $\cos\alpha \cong 0,4503$ e, portanto, $\alpha \cong 63^\circ$.

Concluimos então que o comprimento do arco menor AB da circunferência máxima que passa por A e B, que é a distância entre A e B, é então dada por: $(63 / 360). 2\pi . 6400 \cong 7037$ km.

Observe que esta distância é menor do que aquela calculada ao longo do paralelo. O argumento acima pode ser utilizado para calcular a distância entre dois pontos quaisquer A e B do globo terrestre. Dadas suas coordenadas geográficas, obtemos suas coordenadas cartesianas, (x, y, z) e (x', y', z') , respectivamente.

$$\begin{aligned}
&\text{Lembremos que } d(A, B) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} \text{ e que} \\
&d(O, A) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r \text{ e que } d(O, B) = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = r.
\end{aligned}$$

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo plano $\triangle AOB$, teremos:

$$\begin{aligned}
AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos\alpha \Leftrightarrow \\
(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - 2.r.r.\cos \Leftrightarrow \\
\cos\alpha &= \frac{x.x' + y.y' + z.z'}{r^2}
\end{aligned}$$

A partir daí obtemos α , e concluimos que $d(A, B) = (\alpha / 360) . (2\pi) . 6400$.

3.8 – Distância entre dois pontos utilizando triângulos esféricos

Veremos, nessa seção, como calcular a distância entre dois pontos do globo terrestre conhecendo-se somente suas coordenadas geográficas (latitude e longitude), sem que seja necessária a relação com as coordenadas cartesianas.

Para exemplificar, calculemos, por exemplo, a distância entre as cidades de Los Angeles (34° N, 118° W) e Recife (8° S, 34° W). As respectivas latitudes e longitudes são medidas aproximadas, com o intuito de simplificar os cálculos.

Consideremos, agora, o triângulo esférico ABC, onde A representa Los Angeles, B indica Recife e C é o Pólo Norte. A distância que queremos obter é o comprimento do menor arco de circunferência máxima passando por A e B. Usando a notação utilizada

no Capítulo 2 – Seção 2.10 – esse seria o lado c do triângulo ABC, isto é, o arco de circunferência máxima compreendido pelo ângulo $A\hat{O}B$ (fig. 34).



Figura 34 – Triângulo Esférico ABC

O ângulo \hat{C} pode ser obtido pela diferença (em módulo) das longitudes dos pontos A e B, ou seja, $\hat{C} = 118^\circ - 34^\circ = 84^\circ$.

O lado b é um arco de meridiano determinado pelo ângulo $A\hat{O}C$. O ângulo $A\hat{O}C$ pode ser determinado através da diferença (em módulo) entre as latitudes dos pontos A e C, ou seja, $A\hat{O}C = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$.

O lado a é um arco de meridiano determinado pelo ângulo $B\hat{O}C$. O ângulo $B\hat{O}C$ pode ser determinado através da diferença (em módulo) entre as latitudes dos pontos B e C, ou seja, $B\hat{O}C = 90^\circ - (-8^\circ) = 98^\circ$.

Podemos, então, aplicar a Lei dos Cossenos (lado) vista no Capítulo 2:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \hat{C}.$$

Substituindo os valores obtidos, teremos:

$$\cos c = \cos 98^\circ \cdot \cos 56^\circ + \sin 98^\circ \cdot \sin 56^\circ \cdot \cos 84^\circ$$

$$\cos c = -0,1391 \cdot 0,5591 + 0,9902 \cdot 0,8290 \cdot 0,1045$$

$$\cos c = -0,07777081 + 0,085781521$$

$$\cos c = 0,008010711$$

$$c = \arccos(0,008010711) \cong 89,54^\circ.$$

Assim, para calcular a medida do lado c basta fazer:

$$\text{med}(c) = \frac{89,54^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r \quad (\text{onde } r \text{ é a medida do raio da Terra),}$$

ou seja (considerando para o raio da Terra o valor aproximado de 6400 km),

$$\text{med}(c) \cong 10.001,714 \text{ km.}$$

Concluimos, então, que a menor distância entre as cidades de Los Angeles e Recife é de aproximadamente 10.000 km.

Note que o cálculo feito é deveras mais simples que aquele visto na seção anterior, que utilizava a transformação de coordenadas geográficas para coordenadas cartesianas. Do ponto de vista didático, a utilização da Lei dos Cossenos torna-se então, bem mais atraente.

Além disso, temos também a opção de considerar o ponto C do triângulo ABC como sendo o Pólo Sul, principalmente se os pontos A e B estiverem localizados no hemisfério Sul. Uma vez que estamos lidando com ângulos, bastaria fazer os ajustes necessários.

Ficamos, assim, com várias opções para encontrar a menor distância entre dois pontos do globo terrestre. Observe que em nenhum dos métodos aplicados foi necessário o uso de mapas cartográficos.

3.9 – Menor distância entre dois pontos - Demonstração

Encerramos este capítulo apresentando uma prova formal do fato que $d(A, B)$ é realmente o comprimento do arco menor AB da circunferência máxima que passa por A e B. Mostraremos a demonstração apresentada por ALVES (2004, p. 39)

Suponhamos, sem perda de generalidade, que a superfície esférica que estamos trabalhando tem raio igual a 1 unidade (a que você quiser) e que seu centro é a origem do sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

Segundo, pela simetria da superfície esférica podemos assumir que o ponto A é o Pólo Norte. O outro ponto, B, será dado pelas suas coordenadas geográficas que vamos supor medidas em **radianos**. Digamos que a latitude de B é θ_1 enquanto que sua longitude é φ_1 .

A circunferência máxima que passa por A e B contém o meridiano por B de modo que o arco menor AB tem por comprimento $\frac{\pi}{2} - \theta_1$ (lembre-se que o raio da superfície esférica é 1).

Devemos agora considerar uma trajetória arbitrária ligando A e B e mostrar que seu comprimento é maior ou igual a $\frac{\pi}{2} - \theta_1$.

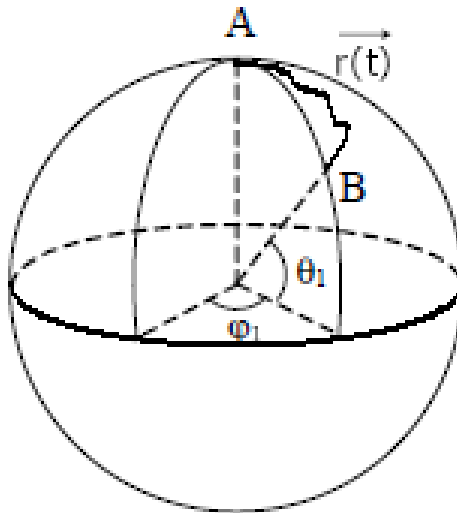


Figura 35 – Trajetória ligando dois pontos A e B da esfera

Se nos imaginarmos viajando de A até B, em cada instante t , estaremos num ponto do globo terrestre com uma latitude $\theta(t)$ e uma longitude $\varphi(t)$. Iniciando nossa viagem no instante $t = 0$ e a finalizando no instante t_1 , teremos $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$, $\theta(t_1) = \theta_1$ e $\varphi(t_1) = \varphi_1$.

Uma trajetória arbitrária (e diferenciável) ligando A a B é então descrita por um vetor posição $\vec{r}(t)$ dado por $\vec{r}(t) = (\cos\theta(t) \cos\varphi(t), \cos\theta(t) \sin\varphi(t), \sin\theta(t))$, com $0 \leq t \leq t_1$, conforme vimos na seção 3.6.

Derivando-se essa função vetorial em relação ao tempo t obtemos o vetor velocidade $\vec{r}'(t)$ da trajetória e conseqüentemente sua velocidade $\|\vec{r}'(t)\|$ no instante t .

Cálculos triviais nos dão que

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{[\theta'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2 \cos^2\theta(t)} \geq \sqrt{[\theta'(t)]^2} = |\theta'(t)| \geq -\theta'(t).$$

Lembrando que o comprimento da trajetória é calculado pela expressão $L = \int_0^{t_1} \|\vec{r}'(t)\| dt$, concluímos que

$$L \geq \int_0^{t_1} (-\theta'(t)) dt = -[\theta(t_1) - \theta(0)] = \frac{\pi}{2} - \theta_1, \text{ e temos assim provado o resultado desejado.} \quad \blacksquare$$

Capítulo 4 – Atividades Propostas

De posse dos conhecimentos necessários sobre a Geometria Esférica e sobre sua interrelação com os conceitos geográficos, tentamos, nesse capítulo, apresentar algumas atividades que permitam que nossos alunos também possam explorá-los e, assim, contribuir para que ampliem sua visão do mundo que os cerca.

4.1 – Propostas já existentes: vários autores

Vários estudos vêm sendo realizados, principalmente na última década, envolvendo o ensino e aprendizagem das Geometrias não Euclidianas e, em particular, da Geometria Esférica. Listaremos alguns desses trabalhos.

BRITO (1995) tratou do tema *Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico-pedagógico*. A pesquisadora apresentou um estudo histórico-pedagógico das geometrias não-euclidianas, na forma de um diálogo hipotético entre a professora e quatro alunos, que se passou num curso de licenciatura em Matemática idealizado. A autora não pretendeu apresentar um modelo a ser seguido, mas sim um texto sobre o qual as pessoas pudessem discutir, analisar, utilizar trechos e até recriar de maneira crítica.

MARTOS (2002) investigou sobre *Geometrias não euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental*. Nesse estudo, a autora apresentou uma proposta didática ao ensino da Geometria euclidiana e não-euclidiana para o Ensino Fundamental, buscando o desenvolvimento significativo dessas geometrias, sendo aplicada para alunos de 8ª série. A autora apresentou situações-problema em fichas de trabalho com descrições de atividades que seriam desenvolvidas, adotando a pesquisa-ação como metodologia de pesquisa. Além disso, procurou por meio da interdisciplinaridade, relacionar conceitos geométricos com conceitos geográficos.

PATAKI (2003), em seu trabalho sobre *Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar*, apresenta uma sequência de ensino constituída de uma situação-problema e oito atividades, fundamentadas na Teoria das Situações Didáticas. Sua investigação orientou-se para a formação continuada de professores, procurando contribuir tanto no aprimoramento de conhecimentos prévios, quanto na aquisição de novos conteúdos, objetivando alcançar uma educação de melhor qualidade. Também adotou a estratégia da interdisciplinaridade, supondo o eixo

integrador Geometria esférica-Geografia em restrita conexão na busca de conhecer melhor o nosso planeta.

PRESTES (2006), procurou subsidiar a implementação de propostas visando a interação entre Matemática e Geografia. A pesquisadora realizou um estudo experimental, partindo de uma sequência de ensino, tendo como objetivo investigar as possíveis relações que os alunos estabelecem quando solicitados a resolver situações envolvendo noções de geometria esférica.

CAMARGO (2009), explorou os conceitos e propriedades da geometria da esfera no espaço usual e as projeções cartográficas cilíndricas, estabelecendo uma conexão entre a Geometria e a Geografia por meio de um instigante exemplo de como a Matemática pode ajudar na compreensão do espaço em que vivemos.

ANDRADE (2011), em *Geometria Esférica: Uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico*, aplicou uma sequência de ensino para alunos do 2º ano do Ensino Médio, investigando a apropriação de conceitos elementares de Geometria Esférica por parte dos mesmos.

Percebe-se, nesses trabalhos, um esforço crescente no sentido de tentar incluir o conhecimento sobre as Geometrias não Euclidianas no âmbito escolar. E isto está sendo feito em dois sentidos:

- preparando os professores, complementando sua formação, muitas vezes defasada, dando-lhes subsídios para melhor atuarem junto a seus alunos;
- oferecendo atividades didáticas a alunos do ensino básico, despertando seu interesse e espírito crítico e buscando uma maior compreensão do mundo em que vivem.

4.2 – Preparação das atividades

Buscando contribuir com essas tentativas, a seguir faremos uma proposta de sequência de atividades direcionada para alunos do Ensino Médio. Inicialmente exporemos alguns pontos necessários para que tais atividades sejam melhor desenvolvidas.

4.2.1 – Pré-requisitos

Para que as atividades propostas atinjam seus objetivos de maneira otimizada, recomenda-se que os alunos participantes possuam conhecimentos acerca de:

- Geometria plana: circunferência e suas propriedades, triângulos – Lei dos Cossenos e soma dos ângulos internos, trigonometria, cálculo de áreas, perpendicularismo;
- Geometria Analítica: sistema de coordenadas cartesianas, distância entre dois pontos;
- Geometria espacial: esfera, fuso esférico, área da superfície esférica e do fuso esférico, ângulo entre planos, intersecção de um plano com uma superfície esférica;
- Geografia: escalas em mapas, latitude e longitude, meridianos, paralelos notáveis.

4.2.2 – Público-alvo

Embora os conceitos geográficos que serão utilizados sejam trabalhados, em geral, no 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, direcionaremos as atividades a alunos do 2º e 3º ano do Ensino Médio. São nesses dois últimos anos que os alunos têm maior contato e apropriam-se dos conceitos e propriedades da Geometria Espacial. Além disso, uma maturidade maior deverá permitir uma análise crítica mais profícua ao se depararem com as situações-problema.

4.2.3 – Materiais e Tecnologias

Os alunos deverão ter, à disposição:

- Bolas de isopor com, pelo menos, 12 centímetros de diâmetro;
- Tiras elásticas e barbantes coloridos;
- Canetas hidrocor;
- Lápis e papel;
- Calculadora científica ou tabela trigonométrica;
- Régua e fita métrica;
- Globo terrestre;
- Mapa-múndi;
- Computador com acesso à internet e/ou biblioteca para pesquisas.

4.2.4 – Recomendações Metodológicas

Sugerimos que os alunos sejam organizados em grupos de, no máximo, 5 componentes, para que possam executar as tarefas e discutir os resultados obtidos. As atividades poderão ser realizadas em caráter de oficina experimental, aulas extras para aprofundamento de conteúdos, minicurso ou como parte de um projeto interdisciplinar envolvendo Matemática, Geografia e História.

A duração dos encontros poderá ser de uma hora e meia a duas horas, sempre tendo uma pequena margem de flexibilidade, para adequar-se ao perfil das turmas (maior ou menor rapidez e/ou compreensão no desempenho das tarefas). Nossa sugestão é que, em cada encontro, sejam realizadas no máximo duas atividades, ou seja, haveria no mínimo quatro encontros.

Serão solicitadas, para o período entre os encontros, algumas pesquisas para serem discutidas e comentadas com o grande grupo, com o objetivo de enriquecer e complementar as atividades.

4.3 – Descrição das Atividades

Uma vez organizados nos grupos, com os materiais à disposição, os alunos receberão fichas com situações-problema, abordando conceitos de Geometria Esférica e Geografia, para serem discutidas e resolvidas. Em alguns momentos, haverá uma exposição, por parte do professor, de alguns conceitos, proposições e exemplos. O professor deverá orientar as atividades, esclarecendo dúvidas e direcionando as discussões, para que não haja perda de foco nos objetivos.

Indicaremos, em cada atividade, o(s) objetivo(s) da mesma, para que o professor possa conduzir de maneira mais profícua os trabalhos. Esse(s) objetivo(s) não deverá(ão) constar nas fichas para os alunos.

Atividade 1 – O problema da cor do urso

Objetivos: Embora esse problema possa ser conhecido por parte de alguns alunos, deverá servir de pontapé inicial para as discussões, e para que os alunos comecem a perceber a diferença nas representações de trajetórias no plano e na superfície esférica.

“Um explorador saiu de sua casa e caminhou 10 km ao sul. Depois virou para o leste e caminhou mais 10 km. Então virou e caminhou novamente mais 10 km para o norte. Ficou surpreso, pois descobriu que voltara novamente para sua casa. Foi então que avistou um urso, rondando o terreno. Qual era a cor do urso?”.

- a) Desenhe numa folha de papel o caminho percorrido pelo explorador.
- b) De acordo com a situação acima, é possível que o caçador volte ao ponto de partida? Anote suas conclusões.
- c) Desenhe numa bola o caminho percorrido pelo caçador.

d) Analisando o caminho desenhado na bola, é possível para o caçador voltar ao mesmo ponto de partida? Anote suas conclusões e tente descobrir a cor do urso.

Atividade 2 - Distância entre dois pontos (I)

Objetivos: Resgatar as noções de latitude e longitude de um ponto. Verificar se os alunos sabem usar a noção de escala para calcular distâncias reais. Fazer surgir a percepção da distorção existente nos mapas. Atiçar a curiosidade acerca do cálculo de distância usando latitude e longitude de dois pontos.

O comandante de um navio recebeu a seguinte mensagem de um helicóptero: “Localizados naufragos numa ilha de coordenadas $\theta_i = 71^\circ\text{N}$ e $\varphi_i = 8^\circ\text{W}$.” Naquele momento, a posição do navio era $\theta_n = 73^\circ\text{N}$ e $\varphi_n = 16^\circ\text{E}$. Qual a menor distância que o navio deverá percorrer para chegar à ilha e resgatar os naufragos?

- No plano cartesiano XOY, um ponto pode ser localizado por suas coordenadas x e y. Como um ponto pode ser localizado no globo terrestre?
- Determine, no globo terrestre, aproximadamente, a posição em que se encontram o navio e a ilha, assinalando-os.
- Indique, com um cordão, o caminho a ser percorrido.
- Meça o cordão com uma régua.
- Tente descobrir a medida do raio do globo terrestre utilizado.
- Usando a medida do raio real da Terra (pode usar a aproximação de 6400 km), determine a distância real entre o navio e a ilha.
- Localize esses pontos no mapa-múndi, ligando-os por um segmento de reta.
- Com uma régua, meça o comprimento desse segmento de reta e, usando a escala do mapa, obtenha a distância real.
- Compare as distâncias obtidas nos itens f) e h). Essas distâncias foram iguais?
- Em caso negativo, por que você acha que houve essa diferença?

Atividade 3 – Elementos da Geometria Esférica

Objetivos: Apresentar os principais elementos da Geometria Esférica, como retas, ângulos, biângulos, pontos antípodas, triângulos e polígonos, fazendo uma comparação com a Geometria Euclidiana.

A partir de agora estaremos lidando com uma geometria diferente, a Geometria da Esfera. Definiremos, nessa geometria, reta como sendo uma circunferência máxima da esfera, ou seja, uma circunferência com centro coincidindo com o centro da esfera. A partir dessa definição, responda:

- a) Traçando-se duas circunferência máximas na esfera, ou seja, duas retas, elas possuem intersecção? Quantas?
- b) Os pontos de intersecção de duas retas estão em que posição na esfera?
- c) Existem retas paralelas na esfera? Por quê?
- d) Sabendo que um polígono é uma região fechada delimitada por segmentos de reta consecutivos, qual o polígono com menor número de lados existente na esfera?
- e) Partindo da definição que você conhece de ângulo, como poderíamos definir um ângulo na esfera?
- f) Traçando-se duas retas na esfera, elas determinam quantos ângulos?
- g) Quantas retas passam por dois pontos distintos na esfera?
- h) Existem retas perpendiculares na esfera? Tente descobrir um par!
- i) Escolha três pontos não pertencentes a uma mesma reta, e trace segmentos de reta ligando-os dois a dois. Você terá, então, um triângulo esférico. Tente, então, descobrir:
 - Um triângulo equilátero.
 - Um triângulo com dois ângulos retos.
 - Um triângulo com três ângulos retos.
- j) Você saberia determinar a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico?
- k) Você conseguiria determinar um retângulo, isto é, um quadrilátero com quatro ângulos retos?
- l) Agora responda as mesmas questões no contexto da geometria plana, que você já estudou, e compare as respostas obtidas nas duas geometrias.

Antes da próxima atividade, sugerimos que os alunos façam uma pesquisa sobre os Postulados de Euclides, a fim de que haja uma discussão, no início do encontro seguinte, sobre a validade desses postulados na Geometria Esférica. O professor poderia, então, falar um pouco sobre a descoberta das Geometrias não Euclidianas.

Atividade 4 – Triângulos esféricos

Objetivos: analisar os triângulos esféricos, determinar sua área e, a partir daí, descobrir o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Essa atividade exigirá um apoio maior do professor, uma vez que os alunos, provavelmente, sentirão maior dificuldade na dedução da área do triângulo.

Na superfície esférica, marque três pontos distintos e não antípodas, tais que dois a dois pertençam a uma mesma circunferência máxima.

- a) Como você faria para encontrar a área do triângulo determinado por esses 3 pontos? Anote suas observações.
- b) Assinale, com cordão ou caneta, as circunferências máximas que unem esses pontos.
- c) Localize o triângulo antípoda ao triângulo determinado inicialmente. Qual a relação entre as áreas desses dois triângulos?
- d) Considerando-se os três vértices do triângulo, localize seis biângulos, dos quais três intersectam-se no interior do triângulo e os outros três biângulos intersectam-se no interior do triângulo antípoda.
- e) Verifique que, na região esférica restante, os seis biângulos não possuem intersecção, ou seja, são disjuntos dois a dois.
- f) Verifique que a soma da área dos seis biângulos é igual à área da esfera acrescida do dobro da área do triângulo esférico e do dobro da área do seu antípoda.
- g) A partir dessa igualdade, uma vez que você tiver as informações sobre as medidas dos ângulos internos do triângulo (que são também as amplitudes dos seis biângulos), tente deduzir a fórmula da área do triângulo esférico.
- h) A partir da fórmula obtida, o que você pode dizer sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico? É uma soma de valor constante? Em caso negativo, você acha que o valor varia em que intervalo?

Nas atividades a seguir haverá um retorno para os elementos do Globo Terrestre conhecidos pelos alunos.

Atividade 5 – Distância entre dois pontos (II)

Objetivos: Resgatar conceitos geográficos, como paralelos, meridianos, latitude e longitude. Calcular comprimentos de arcos de paralelos e meridianos. Determinar, visualmente, a menor distância entre dois pontos da esfera.

Você trabalhou, em Geografia, com Paralelos e Meridianos. Queremos agora rever esses conceitos inseridos na Geometria da Esfera.

- a) Quais os paralelos notáveis que você conhece?

- b) Qual ou quais desses são circunferências máximas, ou seja, retas na esfera?
- c) Qual é o comprimento do Equador, supondo que o raio da Terra meça 6400 km?
- d) Qual o comprimento de um Meridiano?
- e) Qual a relação entre o raio da superfície terrestre, o raio de um paralelo e a sua respectiva latitude?
- f) Verifique que a longitude de um ponto P é a medida do arco do Equador situado entre o meridiano que passa P e o meridiano de Greenwich.
- g) Um ponto P do globo terrestre tem latitude θ e longitude φ . Quais são as coordenadas geográficas do ponto Q diametralmente oposto a P? Discuta cada uma das possibilidades N/S para θ e E/W para φ .
- h) Dois pontos estão situados sobre a Linha do Equador. Qual o menor caminho ligando esses dois pontos?
- i) Localize dois pontos sobre um mesmo meridiano, ou seja, com igual Longitude. Qual o menor caminho ligando esses dois pontos?
- j) Chicago e Roma situam-se aproximadamente na mesma latitude (42° N) mas em longitudes diferentes: a de Chicago é aproximadamente 88° W e a de Roma aproximadamente 12° E. Suponha que um piloto tenha ido de Chicago a Roma em vôo no rumo leste, permanecendo o tempo todo na mesma latitude. Que distância o piloto teve de voar?
- k) Qual o caminho entre Chicago e Roma ligando-os por uma circunferência máxima?
- l) Qual é o menor caminho, na sua opinião? Sugestão: manipule o globo terrestre, colocando-o em diferentes posições.

Observação: A figura abaixo mostra, em azul, o caminho ligando dois pontos seguindo um paralelo e, em azul, através da circunferência máxima. Note que a posição usual do globo terrestre (1ª posição) pode confundir a percepção, enquanto que, alterando essa posição, podemos chegar à conclusão (intuitiva) de que o menor caminho entre dois pontos segue uma circunferência máxima.



Figura 36 – Distância entre dois pontos – diferentes ângulos de visão

Embora os alunos ainda não possuam as ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral para compreenderem uma prova formal do fato citado, queremos que eles obtenham essa conclusão de maneira intuitiva e visual. Daí a sugestão feita no item l).

Atividade 6 – Distância entre dois pontos (III)

Objetivos: Deduzir, com os alunos, a Lei dos Cossenos para triângulos esféricos, aplicando-a no cálculo de distância entre dois pontos a partir de suas coordenadas geográficas.

Sugerimos que, inicialmente, o professor deduza com os alunos a Lei dos Cossenos para triângulos esféricos, vista no Capítulo 2, fazendo-os identificar os triângulos envolvidos e as relações trigonométricas nos mesmos. Somente depois disso é que devem receber a ficha com a atividade.

Voltemos às cidades de Chicago e Roma, citadas na atividade anterior. Construa um triângulo esférico ABC, onde o ponto C é Chicago, B é Roma e A é o Pólo Norte.

- a) Anote as coordenadas geográficas (latitude e longitude) de cada um dos três vértices.
- b) Identifique os lados e os ângulos desse triângulo.
- c) Calcule a medida do ângulo $B\hat{A}C$.
- d) Determine a medida dos ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ (onde O é o centro do globo terrestre).
- e) Utilizando a Lei dos Cossenos para triângulos esféricos, calcule a medida do ângulo $B\hat{O}C$.
- f) A partir da medida obtida, e supondo que o raio da Terra meça 6400 km, obtenha também a distância entre Chicago a Roma, determinada pelo arco de circunferência máxima ligando as duas cidades.
- g) Compare a distância com aquela obtida no item j) da atividade anterior. O que você pode concluir a partir disso?
- h) Usando o mesmo método, calcule a menor distância entre Nova York ($40^{\circ} 40'N$, $74^{\circ}W$) e Buenos Aires ($34^{\circ} 30'S$, $58^{\circ} 30'W$).

Atividade 7 – Análise das rotas de Tráfego Aéreo Internacional

Objetivo: Fazer uma análise crítica das rotas aéreas internacionais (apresentadas através da fig. 37), à luz do que estudaram anteriormente.

No mapa abaixo aparecem, em verde, as principais rotas aéreas ligando cidades do mundo todo.



Figura 37 – Rotas do tráfego aéreo internacional

- Você acha que cada uma dessas rotas contempla a menor distância entre dois pontos? Leve em conta a altitude de voo do avião.
- Perceba que algumas rotas seguem uma linha quase reta e outras seguem uma curva. Como você pode explicar isso?
- Você acha que as rotas traçadas no mapa representam de maneira fiel o que ocorre na realidade, ou seja, ao redor do globo terrestre?

Atividade 8 – Área de um triângulo: Geometria Euclidiana e Geometria Esférica

Objetivos: Perceber que, quando um triângulo, na superfície terrestre, for bastante pequeno em relação ao tamanho total da Terra, ele pode ser considerado aproximadamente plano, ou seja, a soma de seus ângulos internos pode ser considerada igual a 180° (a diferença entre a soma dos ângulos internos e 180° seria desprezível).

Verificar a medida da área de um triângulo na superfície terrestre para que a soma de seus ângulos internos seja menor que $180,1^\circ$.

Na Geometria Plana, você estudou que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° . Na atividade 4 você verificou que, na Geometria Esférica, essa soma é maior que 180° .

a) Considerando o raio da Terra aproximadamente igual a 6400 km, verifique qual deverá ser a área de um triângulo esférico para que a soma de seus ângulos internos seja menor que $180,1^\circ$.

b) Procure, nos livros didáticos, problemas envolvendo triângulos cuja área seja maior que o valor que você obteve no item anterior.

c) Você acha que esses problemas são adequados, ou seja, representam adequadamente o mundo real?

Considerações Finais

A carreira docente permite que haja, por parte do professor, uma reflexão constante sobre o que é ensinar, como ensinar, para quem se ensina e o que se ensina. Há, atualmente, uma gama muito grande de recursos metodológicos e tecnológicos dos quais se pode dispor a fim de facilitar o processo de ensino e aprendizagem. Cabe então ao professor pesquisá-los, conhecê-los, aplicá-los e adaptá-los sempre que julgar necessário.

Acreditamos que os conhecimentos apresentados no presente trabalho acerca da Geometria Esférica possam contribuir, de alguma forma, para a formação profissional dos professores de Matemática da Educação Básica. Mostramos um material repleto de informações e conceitos da Geometria Esférica, procurando proporcionar ao leitor condições para ampliar seus conhecimentos. Para o professor, isto enriquecerá suas habilidades e competências, levando-o além do que se faz tradicionalmente. Em particular, para os professores de Matemática, isto certamente fará com que ele possa refletir na preparação de suas aulas de Geometria.

Também o conhecimento dos fatos históricos que levaram à descoberta das Geometrias não Euclidianas mostra-se fundamental para que o professor reflita, juntamente com os alunos, sobre os longos caminhos percorridos na evolução do conhecimento matemático. Pode também promover a discussão sobre que tipo de geometria é mais adequada para explicar o mundo em que vivemos. Vale aqui citar as sábias palavras do matemático Henri Poincaré: *“Nenhuma geometria é mais correta do que qualquer outra, apenas é mais conveniente.”*

Provavelmente, para um engenheiro, um pedreiro ou um arquiteto, a Geometria Euclidiana, que é a ensinada nas Escolas, seja a mais conveniente. Contudo, para um capitão de um navio, um piloto de avião ou um astronauta, a mais adequada seria a Geometria Esférica. E quem são nossos alunos? Futuros engenheiros, pedreiros, arquitetos, pilotos, astronautas ...? Não podemos responder antecipadamente, mas sim prepará-los para fazer suas opções com uma visão ampla do espaço em que vivem.

Obviamente não pretende-se substituir a Geometria Euclidiana pela Geometria Esférica. Muitos resultados da Geometria Esférica, como vimos, foram obtidos com a utilização de ferramentas da Geometria Euclidiana. Um exemplo é a demonstração da Lei dos Cossenos para triângulos esféricos, na qual foram usados o Teorema de Pitágoras, as razões trigonométricas nos triângulos retângulos (planos) e a Lei dos

Cossenos para triangulos planos. Isso destaca a importância dos conceitos da Geometria Euclidiana para que se possa compreender outras geometrias. Por isso, ela continuará sendo a **principal** geometria estudada nas escolas. Nossa pretensão foi contribuir, de alguma forma, para que ela **não seja a única!**

Pretendemos, em um trabalho subsequente, aplicar efetivamente as atividades apresentadas a alunos do Ensino Médio, buscando analisar a adequação e aprimoramento da sequência proposta.

Também ousamos sugerir um trabalho conjunto com a Matemática, a Geografia, a Física e a Astronomia no contexto das Olimpíadas de Astronomia, onde vários conceitos da Geometria Esférica já são explorados. Se queremos nossos alunos preparados, que esta preparação comece por nós, professores!

Referências Bibliográficas

- ALVES, S., *A Geometria do Globo Terrestre*, Programa de Iniciação Científica OBMEP, Vol. 6, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- ANDRADE, M. L. T. D. de, *Geometria Esférica: Uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico*, São Paulo, 2011, 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- ASSMANN, H. *Reencantar a educação: Rumo à sociedade aprendente*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.
- BARROS, Abdênago Alves de; ANDRADE, Plácido F. de A., *Introdução à Geometria Projetiva*, Textos Universitários – Vol. 10, SBM, 2010.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, MEC, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Geografia*. Brasília, MEC, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília, MEC, 1999.
- BRITO, A. de J. *Geometrias não-euclidianas: Um estudo Histórico-Pedagógico*. Campinas, 1995. 187 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.
- CAMARGO, V. L. V. de, *Trajetórias sobre o Globo Terrestre: Um Estudo da Geometria da Esfera nos Mapas Cartográficos*, Campinas, 2009, 110 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – IMECC – UNICAMP.
- DUARTE, P. A. *Fundamentos da Cartografia* – 3 Ed. – Florianópolis: Editora da UFSC, 2006.
- FAZENDA, I. C. A. *Didática e interdisciplinaridade*. Campinas, SP: Papyrus, 1998.
- GARBI, G. G. *A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática* – 5 Ed. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.
- LIMA, E. L. et al. *Exames de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2001.
- MARTOS, Z. G. *Geometrias não euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental*. Rio Claro, 2002. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

PATAKI, I. *Geometria Esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar*. São Paulo, 2003. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação)

PRESTES, I. C. R., *Geometria Esférica: Uma conexão com a Geografia*, 2006, 210 f., Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – PUC, São Paulo.

Sítios da internet consultados:

< http://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_esf%C3%A9rica> Acesso em 20/10/2012

<<http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/urso2.htm>> Acesso em 18/11/2012

<<http://www.seara.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolica3.htm>> Acesso em 14/02/2013

<<http://www.infoescola.com/matematica/geometria-esferica/>> Acesso em 13/04/2013

<<http://www.slideshare.net/paulocaratoris/geometria-nao-euclidiana>> Acesso em 17/04/2013

<<http://adelmomedeiros.com/eratostenes.htm>> Acesso em 22/05/2013

<<http://maps.google.com.br>> Acesso em 25/05/2013

<<http://astro.if.ufrgs.br/trigesf/>> Acesso em 03/06/2013

<<http://www.infoaviacao.com/2011/01/2700-novas-rotas-aereas-em-2011.html>> Acesso em 04/06/2013

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Trigonometria_esf%C3%A9rica> Acesso em 15/06/2013