Kenji Chung

A Parábola, sua propriedade Refletora e aplicações

Recife
2013

Kenji Chung

A Parábola, sua propriedade Refletora e aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, para a obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves

Recife
2013

CHUNG, Kenji
A Parábola, sua propriedade Refletora e aplicações
32 páginas
Trabalho de Conclusão(Mestrado Profissional) - Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

1. Parábola
2. Teorema de Poncelet
3. Propriedades Refletoras

I. Universidade Federal Rural de Pernambuco. Departamento de Matemática.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr.
Adriano Regis

Prof. Dr.
Vicente Francisco Neto

Prof. Dr.
Jorge Antonio Hinojosa Vera

Agradecimentos

Não poderia começar sem agradecer a minha família, esposa e filhos. Aos meus professores que somaram muito a minha experiência docente e principalmente ao meu orientador Rodrigo Gondim que sempre foi muito solícito e atencioso, mostrando mais uma vez o quanto faz a diferença na educação e na matemática. Aos meus colegas de turma, obrigado por serem verdadeiros motivadores em destaque para meu amigo Ribamar que sempre foi muito disposto para ajudar.

Resumo

Este trabalho tem por finalidade propor uma abordagem da parábola sobre diversos aspectos que normalmente são omitidos no ensino médio, tais como: a equivalência de algumas definições, a apresentação e a demonstração da parábola como uma seção no cone. Exploramos uma das propriedades mais importantes da parábola que é sua propriedade refletora e aplicações. Palavras-chave: Parábola, Cone, Propriedade Refletora.

Palavras-chave: do RESUMO.

Sumário

Introdução **1**

1 Seções Cônicas **3**

1.1 Introdução 3

1.2 Seções no Cone 3

1.3 Teorema de Dandelin-Quetelet 7

2 Cônicas como lugar geométrico: A Parábola **10**

2.1 Introdução 10

2.2 Definições 11

3 Propriedade Refletora da Parábola e Aplicações **14**

3.1 Introdução 14

3.2 Teorema de Poncelet 14

3.3 Aplicações 20

4 Proposta didática **25**

5 Conclusão **31**

Referências Bibliográficas **32**

Introdução

A Grécia durante muito tempo ficou conhecida como um berço de ideias fertilíssimas nas diversas ciências, em especial na matemática. A manutenção dessa fama ocorreu pela forte relação mestre-discípulo que lá existia. Isso não foi diferente com o mestre Eudóxio e o discípulo Menaecmus.

Nesse período as únicas curvas conhecidas pelos gregos eram retas e círculos. Foi aí que Menaecmus descobriu que havia uma família de curvas adequadas que podiam ser obtidas de uma mesma fonte, ou seja, secionando um cone circular reto por um plano perpendicular a um elemento do cone. Estas curvas mais tarde foram denominadas elipse, parábola e hipérbole na obra de Apolônio de Perga.

De todas as curvas além de círculos e retas, a elipse é de fato a mais evidente, mas a mesma foi a última a ser vista e foi devido a um estudo de propriedades da parábola e da hipérbole que surgiu a elipse.

Arquimedes o maior matemático da antiguidade também resolveu um importante problema que foi a Quadratura da parábola, publicou um tratado sobre Conóides e Esferóides. Tratado esse, que mostrava o estudo de sólidos de revoluções gerados por elipses(inclusive o cálculo de sua área), hipérbole e parábolas.

Um pouco mais adiante(não muito), Apolônio de Perga(conhecido como o grande geômetra), recompilou trabalhos anteriores sobre o assunto de cônicas e lançou sua obra prima, cônicas.

Sua obra fez com que basicamente tudo que foi feito anteriormente fosse esquecido. Antes da sua obra, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como seções de três tipos bem diferentes de cone circular reto, conforme o ângulo no vértice fosse agudo, reto ou obtuso. Suspeita-se que Apolônio pela primeira vez, mostrou sistematicamente que não é necessário tomar seções perpendiculares a um elemento do cone e que de um único cone podem ser obtidas todas as três espécies de seções cônicas, variando a inclinação do plano de secção, mostrou também que as seções não precisavam ser realizadas em um cone reto e introduziu o cone de dupla folha, gerando um segundo ramo da hipérbole.

Além de Menaecmus, muitos outros matemáticos estudaram as propriedades da parábola, como Arquimedes ($287 - 212 a.C.$) que calculou a área delimitada por uma reta e uma parábola, e Galileu Galilei ($1564 - 1642$) que provou que a trajetória do lançamento de um projétil é uma parábola. A propriedade refletora da parábola, da qual trataremos, é a mais explorada nas aplicações práticas, como na modelagem de espelhos para telescópios, antenas parabólicas ou faróis refletores. Isaac Newton desenhou e construiu o primeiro telescópio refletor parabólico.

Esse texto teve auxílio das notas do (Delgado).

Capítulo 1

Seções Cônicas

1.1 Introdução

Antes de Apolônio(262-190 a.C) já se tinha conhecimento sobre as seções cônicas, ou seja, já sabiam que ao realizar seções no cone circular por planos não paralelos a base, poderíamos obter certas curvas denominadas elipse, hipérbole e parábola. Tanto essas denominações, quanto a utilização do cone duplo surgindo o segundo ramo da hipérbole foram apresentadas na obra de Apolônio, Seções Cônicas, apesar dos nomes parábola e hipérbole já terem sido utilizados antes do mesmo.

Em Seções Cônicas, Apolônio apresentava um método perfeito da demonstração da obtenção dessas cônicas realizando seções no cone a partir das definições de lugares geométricos, mas esse método era muito trabalhoso e somente em 1822, dois matemáticos belgas Germinal Dandelin$(1794 - 1847)$ e Adolphe Quetelet$(1796 - 1874)$, encontraram uma forma simples.

1.2 Seções no Cone

Vamos apresentar as possíveis seções que podem ser obtidas no cone de dupla folha infinito. E na sequência, apresentaremos uma versão parecida com a de Dandelin-Quetelet para a obtenção da parábola.

As possíveis seções cônicas que são obtidas pela interseção do cone com um plano, são:

(i) um ponto quando o plano intersecta o cone no vértice;

(ii) uma reta se for um cone de dupla folha e o plano contiver dois pontos de uma mesma geratriz ou uma semirreta cone de uma folha e o plano contiver dois pontos de uma mesma geratriz;

(iii) duas retas se a seção for realizada verticalmente passando pelo vértice;

(iv) uma circunferência se o plano intersectar ortogonalmente o eixo do cone em um ponto diferente do vértice;

(v) uma elipse se o plano formar um ângulo com o eixo de simetria menor que o ângulo reto e maior que o ângulo formado pela geratriz e tal eixo;

(vi) uma parábola se o plano for paralelo a uma geratriz do cone;

(vii) uma hipérbole se o plano formar um ângulo com o eixo de simetria menor que o ângulo formado pela geratriz e o mesmo eixo.

Observação 1.2.1. As situações citadas, *i*, *ii*, *iii* e *iv* são consideradas degenerações das cônicas.

Observação 1.2.2. Dentre as seções anteriores, omitimos a representação de ii, devido sua visualização imediata, pois basta ser um plano tangente ao cone contendo uma geratriz.

Observação 1.2.3. Um erro comum no ensino médio sobre o estudo das cônicas é citarem que a obtenção da hipérbole só é dada quando a seção no cone é executada por um plano paralelo ao seu eixo de simetria.

Dentre as cônicas, iremos nos concentrar na parábola. Assim, nosso primeiro propósito é entender a equivalência entre algumas definições a seguir.

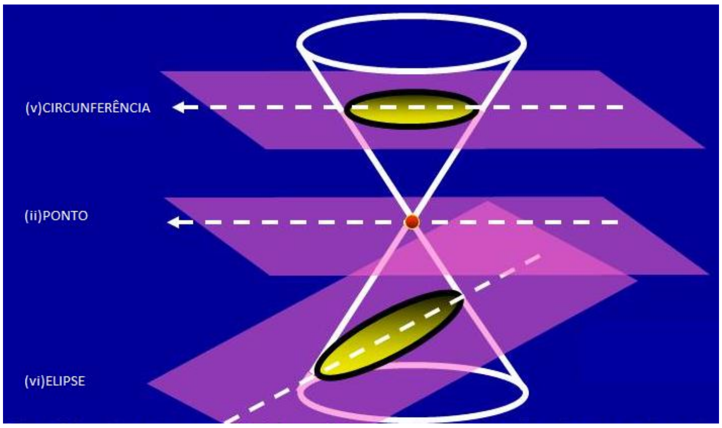

Figura 1.1: Seções i, iv e v

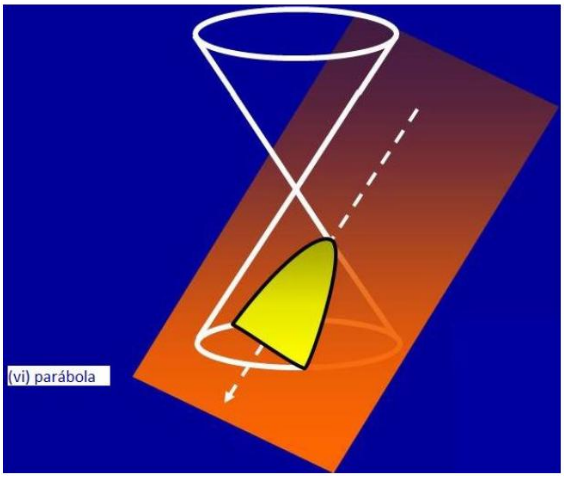

Figura 1.2: seções vi

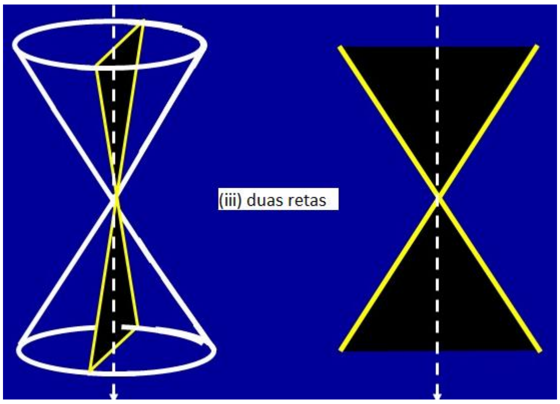

Figura 1.3: seção iii

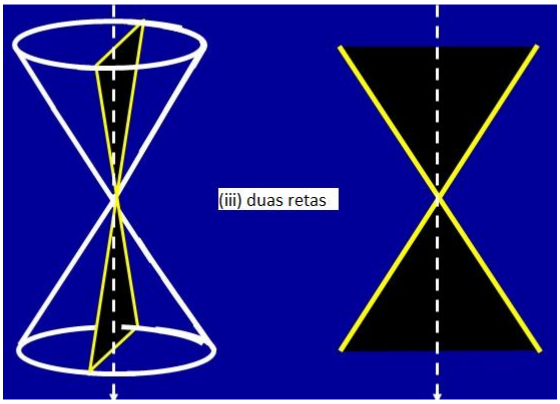

Figura 1.4: seção vii

1.3 Teorema de Dandelin-Quetelet

Definição 1.3.1. Parábola é a cônica definida pela interseção de um plano com um cone de tal forma que o plano seja paralelo a uma geratriz desse cone.

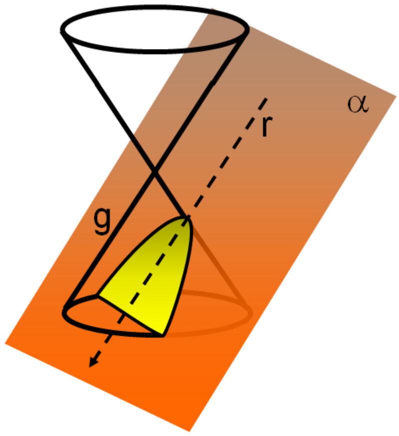

Figura 1.5: Definição 2.4

Observação 1.3.2. Seja uma esfera ε_1 de centro O e um ponto V exterior a ε_1. Tracemos um plano σ que contém o segmento VO e nesse plano, tome um ponto T pertencente à ε_1, tal que o ângulo VTA é reto, ou seja, VT é tangente à ε_1 em T. Rotacionando o triângulo VTO em relação a hipotenusa VO, o lugar geométrico descrito por T sobre a esfera é uma circunferência perpendicular à VO, cujos pontos unidos com o vértice V é um cone circular reto. Portanto, dado um ponto V exterior a uma esfera, todos os segmentos VP tangentes à esfera são congruentes.

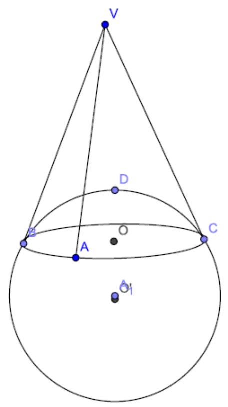

Figura 1.6: cone

Teorema 1.3.3. Esse importante teorema teve auxílio do livro de (Garbi, 2010).

A parábola obtida ao secionarmos um cone reto de vértice V e eixo de simetria e, por um plano paralelo a uma de suas geratrizes g, é o lugar geométrico dos pontos do plano α que equidistam de um ponto F chamado foco e de uma reta d denominada diretriz.

Prova:

Em primeiro lugar vamos definir o ponto fixo F. Considere a esfera ε_1, tangente interiormente ao cone e tangente ao plano α, $F \in \alpha$ é definido como o ponto de tangência da esfera. A reta d será definida pela interseção entre o plano α e um outro plano γ perpendicular ao eixo de simetria do cone, cuja interseção com a esfera ε_1 é a circunferência C_1 determinada pela tangência da esfera e do cone.

Nossa estratégia agora será mostrar que todo ponto da interseção do plano α com o cone equidista de F e d. Seja Q um ponto arbitrário da interseção e considere o plano, β, paralelo a γ passando por Q. A interseção de α e β é a reta r que é tanto paralela a d, como é a reta suporte de um segmento QQ' do círculo C_2, interseção do cone com β.

Os pontos K e K' são as respectivas interseções de VQ e VQ'(são geratrizes) com C_1. Pela última observação, temos que os segmentos VK e VK' são congruentes e de forma análoga, é fácil ver que $QK = Q'K' = QF = Q'F$. Pois o triângulo VQQ' é isósceles de base QQ' e ponto

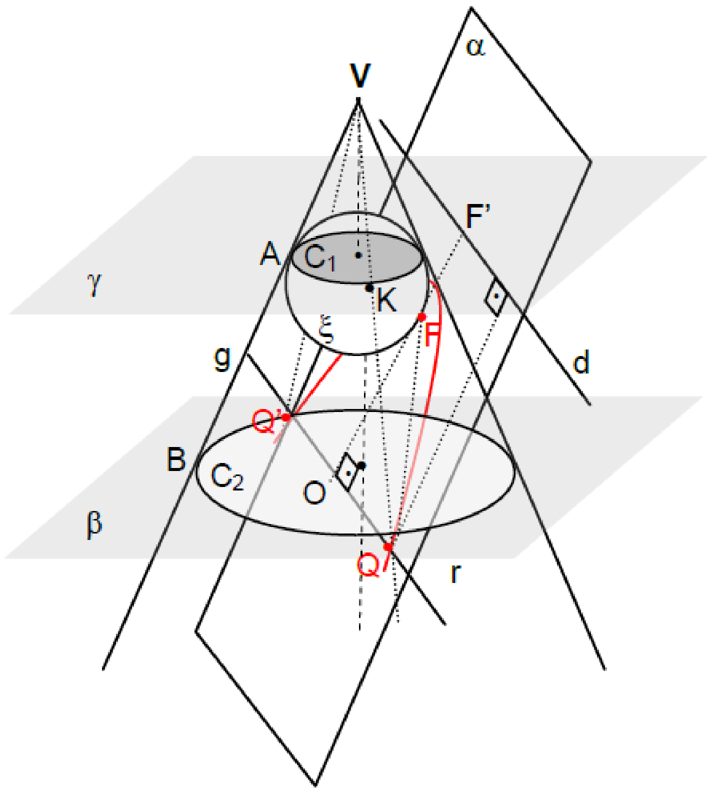

Figura 1.7: Cônica-Parábola

médio O. Logo, o triângulo QFQ' é isósceles de base QQ' e a reta suporte de OF é a mediatriz do segmento QQ' e intersecta a reta d em F'. Como d e r são paralelas, e OF' é perpendicular também a d. Calcular a distância do ponto O a reta d é calcular a medida de OF' e é o mesmo que calcular a distância do ponto Q (pertencente a r) a mesma reta d.

A geratriz g intersecta C_1 e C_2 respectivamente nos pontos A e B, cujo segmento AB é congruente a QK que por sua vez é congruente a QF. Por outro lado o plano π definido por VBO é plano mediador do segmento QQ', já que O é o ponto médio de QQ' e QQ' é perpendicular ao plano π cuja interseção desse plano π, com o plano α é a reta suporte de OF'. Assim, o quadrilátero $AF'OB$ é um paralelogramo e $AB = OF' = QK = QF = d(Q; d)$.

Capítulo 2

Cônicas como lugar geométrico: A Parábola

2.1 Introdução

Este capítulo foi escrito com o auxílio das notas do PROFMAT de (**????**) e do livro do (Boyer, 2002) .

Nos anos escolares, o estudo das cônicas na maioria das vezes não é realizado, e quando é, é de forma rápida e genérica, nem sempre é esplanado ou exposto ao aluno que as curvas possuem suas denominações devido as seções obtidas no cone.

Em toda a vida estudantil a parábola é estudada repetidas vezes, começa no ensino fundamental nono ano, basicamente é repetida na primeira série do ensino médio e em muitas escolas do Recife, é reprisada na terceira série do ensino médio. Esse estudo normalmente é desenvolvido via função quadrática como gráfico de tais funções, onde pouquíssimos professores a apresentam como lugares geométricos. Já quanto a definição como lugares geométricos, em boa parte das escolas praticamente não existe e a carência desse estudo(como lugar geométrico) tende a aumentar, visto que a programação do exame nacional do ensino médio ENEM deixa o assunto de fora.

É bom lembrar que mesmo alguns professores trabalhando o assunto como lugares geométricos, é comum omissão de como foi obtida tais cônicas.

Observação 2.1.1. O pensamento da maioria dos alunos, estudar o gráfico de uma curva que é representado por uma parábola é estudar o gráfico de uma função quadrática e reciprocamente. Poucos professores frisam que nem toda parábola corresponde ao gráfico de uma função quadrática. Seria fácil construir uma curva rotacionando a parábola de equação $y = x^2$ de um ângulo de 45^0 e a imagem de tal curva, claramente não é gráfico de nenhuma função. E ainda, a apresentação do gráfico dessas funções é basicamente citada, ou seja, não há uma esplanação do porque tais funções são representadas geometricamente por tais curvas.

2.2 Definições

Definição 2.2.1. Cônica é o lugar geométrico dos centros de circunferências que passam por um ponto fixo F_1 e tangenciam uma circunferência de centro F_2 e raio $2a$ chamada diretriz.

Definição 2.2.2. Parábola é o lugar geométrico dos centros de circunferências que passam por um ponto F e tangenciam uma reta d chamada diretriz.($F1 \to \infty$,$2a \to \infty$).

Definição 2.2.3. Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo F denominado foco e uma reta d denominada diretriz.

É fácil de observar que as definições 2.2 e 2.3 são equivalentes, pois o lugar geométrico dos pontos $P's$ que são os centros das circunferências que passam por F e são tangentes a uma reta d possuem raios de medida PF, ou seja, os centros $P's$ é o conjunto de pontos que equidistam de um ponto F e de um reta d. Para uma melhor visualização, temos a figura a seguir.

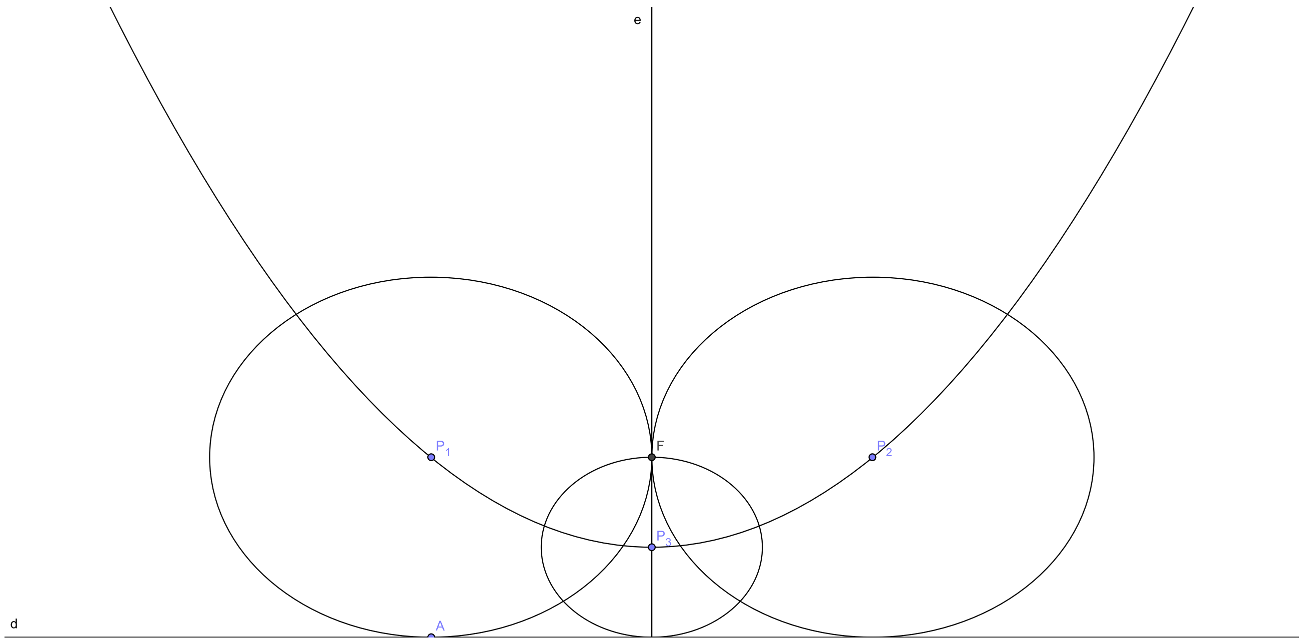

Figura 2.1: definição 3.3

Elementos 2.2.4. Dados um ponto F(foco da parábola) e uma reta denominada diretriz $d(F{\neq}d)$, definiremos os principais elementos da parábola e em seguida, faremos um esboço da curva com os seus principais elementos.

e $\rightarrow$eixo de simetria é a reta perpendicular a diretriz que passa pelo foco da parábola;

p $\rightarrow$parâmetro é a medida da distância entre o foco e a reta diretriz, ou melhor, a medida do segmento OF(na figura seguinte);

V $\rightarrow$vértice é um ponto pertencente a curva que se localiza no eixo e de simetria da parábola;

$Raios\,Vetores$ $\rightarrow$são os vetores ou segmentos que ligam o foco a qualquer ponto T da parábola;

$Ponto\,Pertencente\,à\,Curva(P_C)$ $\rightarrow$são aqueles pontos genéricos $P's$ do plano, cuja distância desses pontos $P's$ para o foco, é igual a distância dos mesmos para a reta diretriz d, ou seja, $d(P_C$,$F)$ = $d(P_C$,d);

$Ponto\,Interior(P_i)$ $\rightarrow$são os pontos genéricos $P's$ do plano, cuja distãncia desses pontos $P's$ para o foco, é menor do que a distância dos mesmos para a reta diretriz d, ou seja, $d(P$,$F) <$ $d(P$,d). Também poderíamos afirmar que um ponto P_i é interno a parábola, se P_i é um ponto da corda da parábola diferente dos extremos;

$Ponto\,Exterior(P_e)$ $\rightarrow$são os pontos genéricos $P's$ do plano, cuja distãncia desses pontos $P's$ para o foco, é maior do que a distância dos mesmos para a reta diretriz d, ou seja, $d(P$,$F) >$ $d(P$,d).

$Reta\,Tangente$(t) $\rightarrow$são aquelas que intersectam a parábola em um único ponto(ponto de tangência). A reta paralela ao eixo de simetria e não é tangente, pois possui pontos interiores e pontos exteriores à parábola;

$Reta\,Normal$(n) $\rightarrow$ são aquelas perpendiculares as retas tangentes que passam pelos pontos $T's$(pontos de tangências) da curva;

$Reta\,Secante$(s) $\rightarrow$são aquelas que intersectam a parábola em um único ponto se a reta for paralela ao eixo de simetria e, ou intersecta a parábola em dois pontos determinando um segmento denominado de corda, onde seus extremos são pontos da parábola;

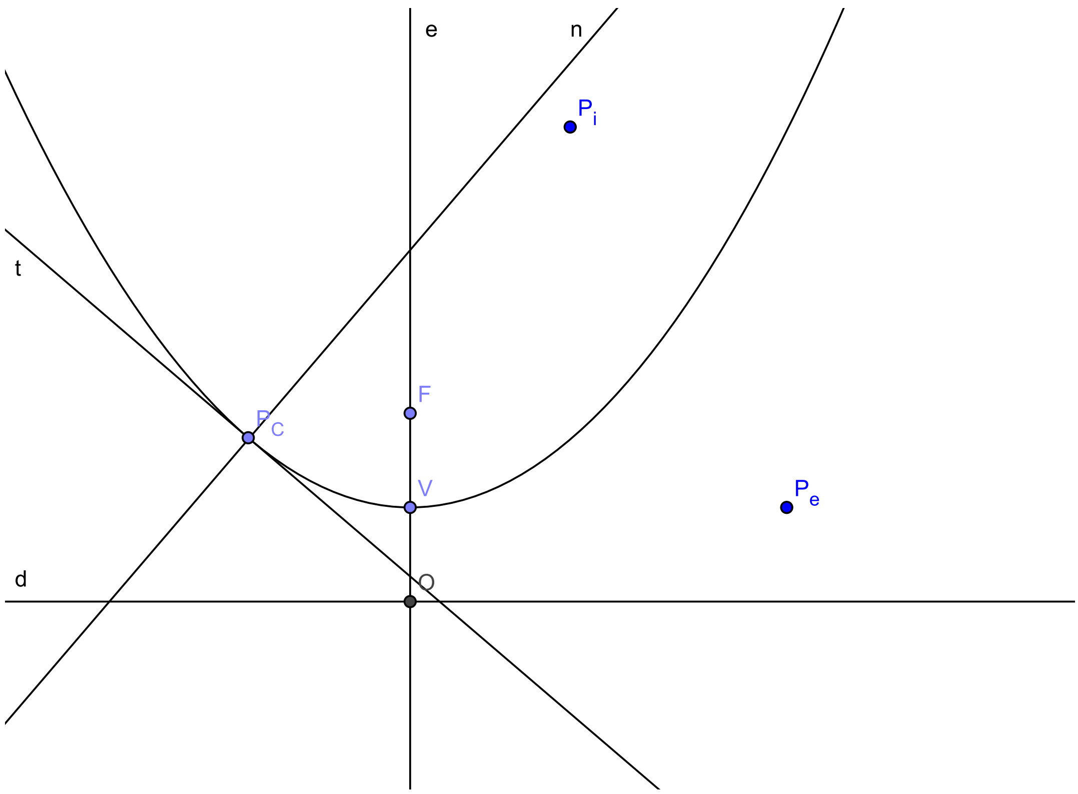

Figura 2.2: Elementos

Capítulo 3

Propriedade Refletora da Parábola e Aplicações

3.1 Introdução

Este capítulo foi escrito com o auxílio do material de (Strogatz, 2013).

Nessa seção vamos falar da propriedade refletora da parábola. Nas aplicações usuais as parábolas são rotacionadas em torno de seu eixo de simetria, e assim, obtemos uma superfície denominada parabolóide de revolução. Reciprocamente ao secionarmos um parabolóide de revolução longitudinalmente por um plano contendo o seu eixo de simetria, a seção obtida é uma parábola.

3.2 Teorema de Poncelet

Teorema 3.2.1 (Poncelet)**.** Dado uma parábola ρ de foco F e um ponto T pertencente a mesma, as bissetrizes dos ângulos formados pelo raio vetor e pela reta perpendicular à diretriz d que passa por T são as retas tangente e normal a parábola em T.

Prova:

Sejam o ponto A, a projeção ortogonal do ponto T em d, A' e F' os respectivos pontos simétricos de A e F em relação a T, temos que o triângulo TFA é isósceles, pois T pertence à parábola, e com isso, as medidas de TF e TA são congruentes pela definição da parábola. Considere t a bissetriz do ângulo ATF, onde o ponto B é a interseção de t com o segmento

AF. Logo, t é a mediatriz do segmento AF, onde os triângulos TFB e TAB são congruentes pelo caso $A.L.A$ e o ponto B, é o ponto médio do segmento AF. Seja P≠T um ponto de t, o ponto P' a projeção ortogonal de P em d e como t é mediatriz do segmento AF, temos que as medidas de PF e PA são congruentes(por definição) e ainda, temos que $PF = PA > PP'$, pois o triângulo PAP' é retângulo em P' com PA e PP' sendo respectivamente a hipotenusa e o cateto do triângulo. Logo, a distância de P a F é maior que a distância de $PP' = d$(P,d). Portanto todo ponto P∈t, P≠T é exterior. Assim, a reta t é uma tangente. Já a reta normal, será a bissetriz do ângulo suplementar de FTA.

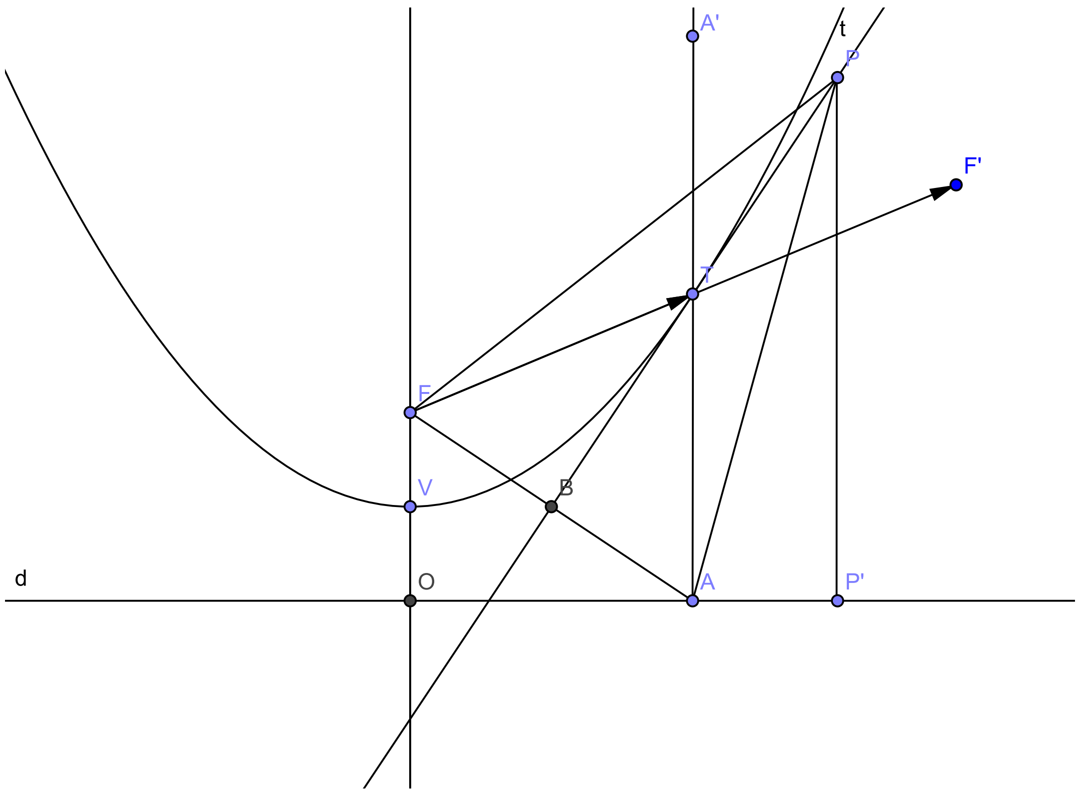

Figura 3.1: Poncelet

Antes de citarmos e provarmos dois corolários, onde o primeiro é o recíproco do segundo, temos que lembrar e nos familiarizar com a famosa lei de Snell-Descartes, também conhecida como a lei da reflexão dos raios em espelhos planos.

A famosa lei de reflexão estudada no ensino médio afirma que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, ou seja, quando um raio incide no espelho e forma com a normal um

Figura 3.2: Snell

Figura 3.3: Descartes

ângulo de medida i, esse mesmo raio é refletido pelo espelho formando também com a normal um ângulo de medida $r(i = r)$.

Observação 3.2.2. A lei da reflexão também é aplicada nas superfícies curvilíneas, onde a reta tangente a curva num certo ponto, representa um espelho plano perfeito.

Corolário 3.2.3. Uma fonte luminosa situada no foco de uma parábola ao emitir um raio num espelho com formato de um parabolóide, o raio é refletido paralelamente ao eixo de simetria do mesmo.

Prova: Sejam F o foco da parábola, P o ponto onde o raio incide na curva (ponto de incidência do raio vetor na curva), t a reta tangente a parábola em P, A é a projeção ortogonal de P em d, B o ponto de interseção de t com o segmento AF, A' é um ponto da trajetória do raio após o mesmo ser refletido em P, F' e B' os respectivos simétricos de F e B em relação a P. Pelo teorema de Poncelet, temos que a reta t é bissetriz do ângulo APF, mediatriz do segmento AF

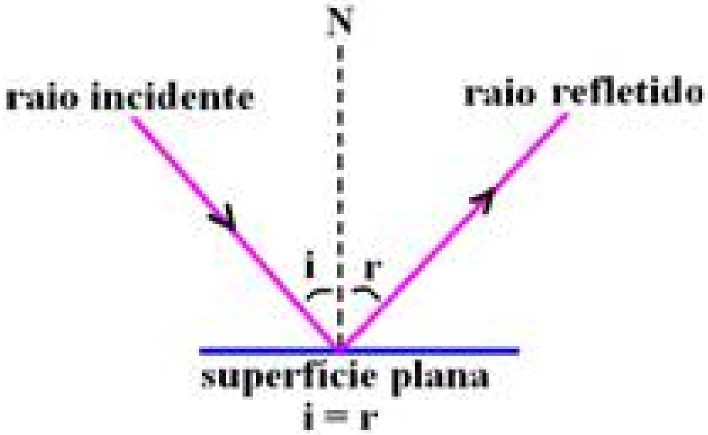

Figura 3.4: Snell-Descartes na superfície plana

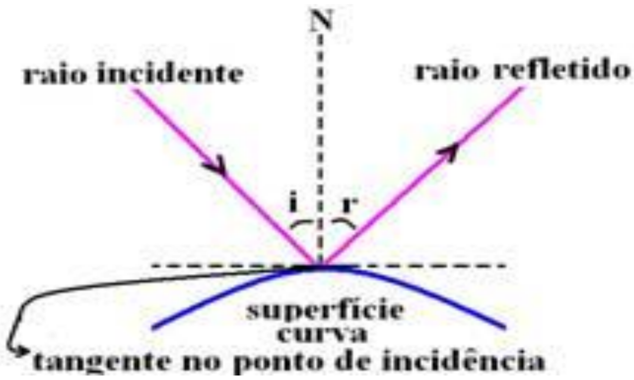

Figura 3.5: Snell-Descartes na superfície curvilínea

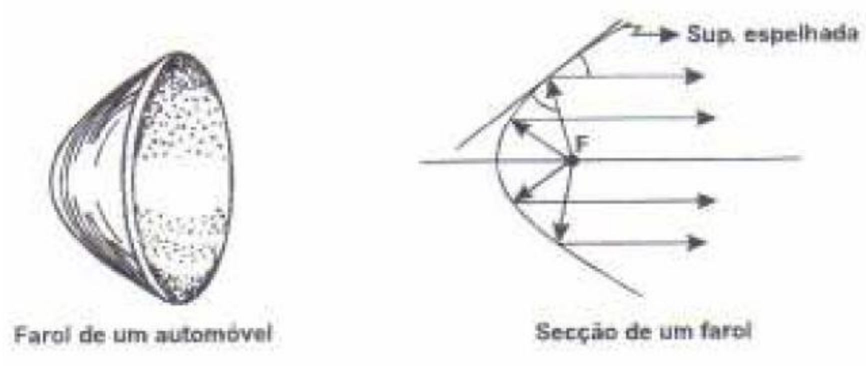

Figura 3.6: farol emitindo feixe

e pela lei da reflexão, os ângulos FPB e $A'PB'$ são congruentes e como os ângulos FPB e $F'PB'$ são opostos pelo vértice, também são congruentes. Assim, os ângulos FPB, APB, $B'PA'$ e $F'PB'$ são congruentes e como o ângulo $A'PF$ é o suplemento dos ângulos FPA' e APF, segue que A', P e A são colineares. Logo, o raio é refletido paralelamente ao eixo de simetria e, já que o segmento PA é perpendicular a d como o eixo e.

Corolário 3.2.4. Quando um feixe de luz incide paralelamente ao eixo de simetria e de um refletor no formato de um parabolóide de revolução, os raios são refletidos e convergem para o foco.

Prova: Sejam P o ponto do parabolóide onde o raio incide e é refletido, t é a reta tangente a curva no ponto P, o ponto A é a projeção ortogonal de P em d, o ponto F é o foco, e suponha que o raio será refletido em P na direção de $F' \neq F$.

Devido a definição da parábola, temos que as medidas PF e PA são congruentes, que a reta tangente em P é bissetriz do ângulo FPA pelo teorema de Poncelet e ainda, essa reta é a mediatriz do segmento FA. Pela consequência da lei de Snell-Descartes o ângulo formado pelo raio com a reta tangente é o mesmo que o ângulo formado pela trajetória do raio ao ser refletido com essa mesma tangente. Logo, o raio não poderia ser refletido para um outro ponto F' distinto

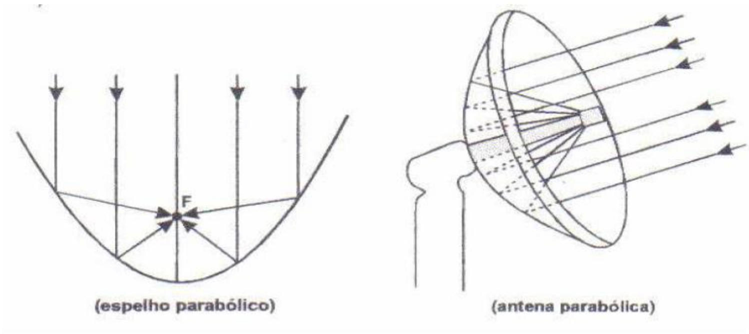

Figura 3.7: antena recebendo sinais

de F, pois o ângulo formado pela trajetória PF' com a reta tangente seria congruente ao ângulo formado por PF com essa mesma reta. Logo, $F = F'$.

3.3 Aplicações

Aplicação 3.3.1. *Essa seção teve o auxílio do livro de (Ávila, 1996)*

.

A utilização de objetos no cotidiano no formato de um parabolóide de revolução tais como antenas, radares e outros, é propositadamente. A simetria desses objetos com a incrível propriedade refletora da parábola são muito úteis, devido termos a necessidade em muitas vezes de amplificar esses sinais e otimizá-los.

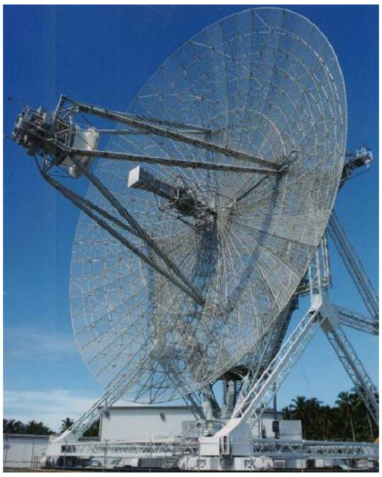

Figura 3.8: Antena de radar

Figura 3.9: Receptor parabólico

Aplicação 3.3.2. *Além das aplicações tradicionais mencionadas, é comum utilizar objetos com tais formatos no jornalismo com microfones parabólicos para realizarem matérias em um meio mais conturbado. Pelas autoridades para escutarem conversas sussurradas em investigações através de microfones parabólicos. Uma das aplicações dos fornos solares é a função de concentrar em uma pequena área os raios luminosos através de um espelho parabólico, para que o recipiente que contém a água a ser evaporada chegue a uma temperatura mais alta.*

Um forno solar bem conhecido é o localizado em Odeillo, sul da França. Pois como a distância do Sol à Terra é bem grande o feixe de luz solar que nos atinge possui seus raios praticamente paralelos. Portanto, ao se refletirem no espelho, os raios desse feixe convergem para seu foco, onde haverá uma grande concentração de energia, tanto luminosa quanto térmica. Assim, no foco do espelho há uma elevação de temperatura e, nesse ponto, é colocado o dispositivo que irá utilizar a energia concentrada.

Aplicação 3.3.3. *Nos refletores, lanternas, faróis e outros, temos a necessidade de maximizar o direcionamento da luz emitida por tais objetos. Podendo escolher como será a emissão dos feixes de luz, na situação de faróis de carros, temos a opção de fazer com que os feixes de raios luminosos sejam emitidos de forma convergente(luz tradicional) ou podemos fazer com que esses*

Figura 3.10: Forno de Odeillo

raios divirjam(luz alta) conforme nossa necessidade.

Figura 3.11: Refletor

Aplicação 3.3.4. *O farol parabólico de um carro é um exemplo bem prático da importante propriedade refletora da parábola. Nesse caso temos duas situações quase que simultâneas, ou seja, os faróis de carros hoje são compostos de dois parabolóides circulares, um com a fonte luminosa no foco do farol e o outro, com a fonte luminosa entre o vértice e o foco do farol.*

Figura 3.12: Farol de carro

(i) Farol de luz baixa;

São aqueles cuja fonte luminosa é colocada no foco da parábola. Assim, pela propriedade refletora da parábola os raios são refletidos no espelho parabólico e lançados paralelamente ao eixo de simetria.

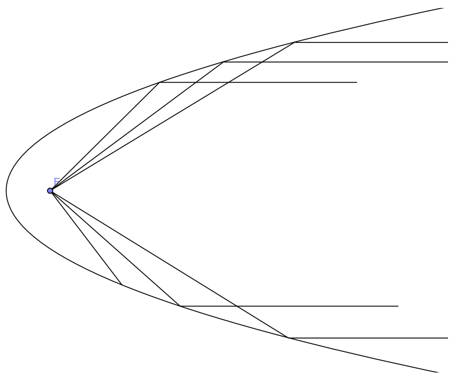

Figura 3.13: Fonte luminosa no foco

Prova:

Essa situação é uma aplicação direta do teorema de Poncelet, pois os raios emitidos do foco a um ponto genérico P do parabolóide, são os raios vetores. A reflexão desses raios, estão contidos na reta suporte da perpendicular a diretriz no ponto P.

(ii) Farol de luz alta;

São aqueles cuja fonte luminosa é colocada no eixo de simetria, mas antes do foco. Assim, os raios emitidos e refletidos irão divergir gerando luz alta.

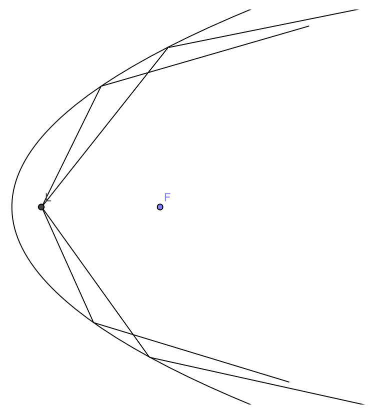

Figura 3.14: Fonte luminosa entre o vértice e o foco

Prova:

Tome a fonte luminosa em um ponto $F' \neq F$, e seja $F'P$ o raio emitido pela mesma. Sabemos que se a fonte luminosa estivesse no foco, o raio refletido seria paralelo ao eixo de simetria e o ângulo formado pelo raio vetor com a tangente em P seria congruente ao ângulo formado pelo raio refletido e essa tangente. Mas, se a fonte luminosa for colocada antes do foco F, ou seja, for colocada no ponto F', o ângulo formado por esse raio e a tangente em P seria menor que o ângulo formado pelo raio vetor e tal reta. Consequentemente, esse raio é refletido pela tangente por um ângulo menor. Assim, o mesmo vai divergir.

Observação 3.3.5. Poderíamos complementar as situações anteriores, com o caso da fonte luminosa ser colocada posterior ao foco(no sentido vértice-foco), mas no eixo de simetria.

Nessa situação, teríamos que o ângulo formado pelo raio emitido da fonte luminosa com a reta tangente seria maior que aquele formado pelo raio vetor e a tal reta. Logo, esse raio seria refletido por um ângulo maior que aquele obtido quando a emissão for do foco. Assim, esses raios tendem a convergir para pontos do eixo de simetria.

Capítulo 4

Proposta didática

O ensino da parte da matemática que se relaciona com a parábola tem início no ensino fundamental no nono ano, ou seja, na antiga oitava série. Nessa série a ênfase é basicamente algébrica nos conceitos de funções e normalmente é citado que uma função quadrática de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ pode ser representada geometricamente por uma parábola. A construção das parábolas na sua maioria é realizada ao ligar coordenadas que atendem a relação de uma dada função quadrática de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, mas não é realizada a construção por uma das definições citadas anteriormente.

Além da omissão das definições da parábola, é comum a omissão por boa parte dos professores sobre suas aplicações, pricipalmente das propriedades refletoras e que nem toda representação geométrica de uma parábola de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ pode ser classificada como gráfico de uma função.

No primeira série do ensino médio é retomado o estudo das funções quadráticas, o estudo é feito numa perspectiva de avançar no conhecimento de novas funções, mas a Definição 2.2.3 que é uma definição geométrica, normalmente continua ignorada.

Já na terceira série do ensino médio conhecido como terceiro ano, alguns tomam o conhecimento do estudo da parábola de forma analítica e a mesma é construída pelos conceitos geométricos na sua maioria pela Definição 2.2.3. Mas, é bom lembrar que depois que o ENEM(exame nacional do ensino médio) se tornou a principal referência de ingresso para as universidades do Brasil substituindo as antigas provas dos vestibulares, algumas instituições e professores ignoram tal assunto pois o estudo da parábola de forma analítica não faz parte do programa do ENEM.

Assim, os comentários em sua maioria sobre a construção geométrica da parábola e de suas propriedades refletoras ou é muito pequeno ou não existe.

É importante lembrar que mesmo com a era pré ou pós ENEM, a maioria dos autores de livros didáticos não se preocupam com tais equivalências, o conhecimento de boa parte dos alunos *sobre a construção de uma parábola é dado apenas por uma citação(ou "indução") que ao ligar pontos no plano cartesiano que satisfazem uma função quadrática, gera uma curva denominada parábola nem sempre se preocupando com o domínio da função.*

Em geral a definição de parábola mais conhecida é a Definição 2.2.3, ou seja, a parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de um ponto F(foco) e uma reta d(diretriz). Vamos tomar a Definição 2.2.3 como a nossa definiçao de parábola e mostrar que a curva definida pela propriedade 1.3.1 é uma equivalência. E ainda, observamos que a Definição 2.2.2 é claramente equivalente a Definição 2.2.3

. Além desses detalhes relevantes, vamos propor 4 atividades que achamos fundamentais no ensino de tal curva.

Atividade 1: Obter a equação cartesiana de uma parábola com diretriz horizontal.

Prova:

Tome o ponto F(m, n+p) como o foco, d a reta diretriz, tal que d: y = n - p e P(x, y) um ponto genérico da curva.

Temos que:

O quadrado da distância de P a F, é

d^2(P,F) = $(x - m)^2$ + $[y - (n + p)]^2$

e a distância entre o ponto P e a reta diretriz, é

d(P, d) = (y + p - n).

Como pela definição essas distâncias são iguais, é imediato que o quadrado de suas distâncias também são iguais.

Assim,

$(x - m)^2 + y^2 + p^2 + n^2$ - $2yp$ - $2yn$ - $2pn$ = $y^2 + p^2 + n^2 + 2yp$ - $2yn$ - $2pn$.

Logo,

y = n + $\frac{x^2 - 2xm + m^2}{4p}$

Seja a = $\frac{1}{4p}$, b = $\frac{-m}{2p}$, c = $\frac{m^2}{4p}$ + n.

Então,

$y = ax^2 + bx + c$, ou seja, mostramos que o conjunto dos pontos do plano que equidistam de um ponto fixo F e de uma reta d(a parábola) pode ser representado por uma função quadrática.

Atividade 2: Reconhecer o foco e a diretriz dada uma função quadrática da forma $y = ax^2 + bx + c$*;(a≠0).*

Prova: Seja a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$,(a≠0). Dividindo os membros por a, temos:

$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$, completando quadrado no segundo membro, tem-se:

$\frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2} = [x + (\frac{b}{2a})]^2$

$\frac{y}{a} = [x + (\frac{b}{2a})]^2$ - $\frac{\Delta}{4a^2}$

y = a$[x + (\frac{b}{2a})]^2$ - $\frac{\Delta}{4a}$

Assim, a abscissa e a ordenada do seu vértice são respectivamente iguais a é $x_v = -(\frac{b}{2a})$ e y_v = - $\frac{\Delta}{4a}$. Como na atividade 1 mostramos que $\frac{1}{4p}$ = a, e sem perda de generalidade tome $a > 0$. Logo, o foco é interno a parábola e sua coordenada tem abscissa igual a abscissa do vértice e a ordenada, é a soma da ordenada do vértice com a metade do parâmetro da parábola,ou seja, F(x_v;y_v + $\frac{1}{4a}$) e a reta diretriz, é uma reta constante da forma y = y_v - $\frac{1}{4a}$

Como da atividade 1, obtemos: $\frac{1}{4p}$ = a , na hipótese de $a > 0$.

Observação 4.0.6. O caso de $a < 0$ é análogo.

Atividade 3: Dada uma parábola ρ de equação $y = x^2$ e um ponto P, podemos determinar três situaçãoes de retas tangentes a ρ e que passa por P.

(3.1) P pertence à ρ;

Prova: Tome P = (2;4) e verificamos facilmente que esse ponto pertence à curva. Queremos determinar a equação da reta tangente à curva no ponto P.

Assim, seja a reta r de coeficiente angular m que passa por um ponto $P(x_0; y_0)$, sua equação é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$. Como o ponto $P = (2; 4)$, temos que r é da forma $y - 4 = m(x - 2)$ e como tem um ponto em comum com a parábola, no ponto P as ordenadas são iguais, ou seja, $m(x - 2) + 4 = x^2$. Note que r é tangente à ρ e com isso, temos somente um valor para abscissa. Logo, o discriminante da equação seja igual a zero, ou seja, $\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 8m + 16 = 0 \Rightarrow m = 4$.

Então a equação da reta r tangente à curva no ponto P, é $y = 4x - 4$.

(3.2) P pertence ao exterior de ρ;

Prova: Tome P = (1;0) e verificamos facilmente que esse ponto é exterior à curva. Pois a distância desse ponto para a diretriz é 1/4 e 1/4 é a medida do cateto VF do triângulo PVF como o cateto é menor que a hipotenusa PF, onde P é o ponto dado, V é o vértice da curva e F é o foco.

Queremos determinar a equação das retas tangentes à curva no ponto P. Sendo r uma reta que passa por P, temos que sua equação é $y - 0 = m(x - 1)$ e como r e ρ se intersectam em um único ponto, eles possuem a mesma ordenada. Logo, $m(x-1) = x^2$, onde mais uma vez o discriminate é zero(para que só tenham um único ponto em comum), ou seja, $x^2 - mx + m = 0 \Rightarrow m = 0\, ou\, m = 4$. Então, as equações das retas tangentes a parábola que passam por P, são:

$y = 0$ e $y = 4x - 4$.

(3.3) P pertence ao interior de ρ;

Prova: As retas que passam por um ponto $P = (1;2)$ e são tangentes a parábola ρ, não existem. Já que P é interno a curva e qualquer reta que passe por P será secante a ρ.

Atividade 4: Simular um farol no geogebra.

Para formar tais simulações nos dois primeiros casos, escolhemos um ponto F denominado de foco, escolhemos um outro ponto O para ser a origem e tomamos o seu ponto médio, sendo esse o vértice V da parábola. Com isso, traçamos a reta e, eixo de simetria da parábola passando por F e V, traçamos a reta d(reta diretriz) perpendicular a e passando por O e formamos a parábola. Já que temos o foco e a diretriz.

Traçamos P, um ponto genérico na curva e ligando do foco para para P, temos os raios vetores. Em seguida, traçamos respectivamente as retas tangente t e normal n em P e selecionando a reflexão em torno de uma reta, escolhendo o segmento FP como objeto e a reta normal como a reta de reflexão. Geramos assim um modelo de funcionamento do farol de carro com luz baixa.

Nos dois últimos casos, partindo da parábola e seus elementos construídos, de forma análoga, traçamos P, um ponto genérico na curva, tomamos um outro ponto F' entre o vértice e o foco, ligamos os segmentos com extremos em F' e P, assim, temos raios luminosos que serão refletidos no espelho parabólico em P. Por P, tracemos as retas tangente e normal a curva e selecionando a reflexão em torno de uma reta, onde $F'P$ sendo o objeto e a reta normal, sendo a reta de reflexão, esses raios refletidos divergirão e não serão paralelos ao eixo e conforme provamos na seção 4.

(4.1) Farol baixo;

(4.2) Farol baixo com rastro;

Observação 4.0.7. A parte dos raios rastreados em destaque, são aqueles que inicialmente foram ou são direcionados para o espelho parabólico, e em seguida são refletidos na direção do eixo e(paralelos a e). Já a parte interna branca dentro da parábola são os raios que de

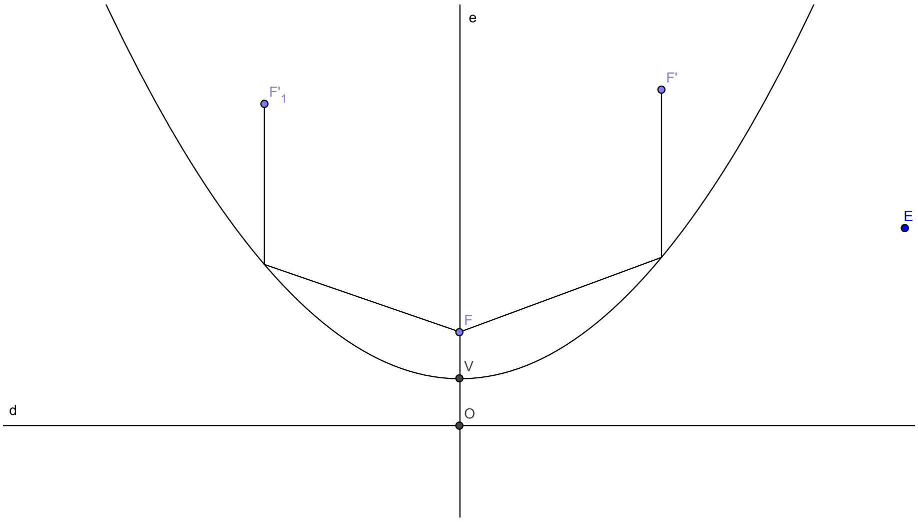

Figura 4.1: simulação do farol baixo

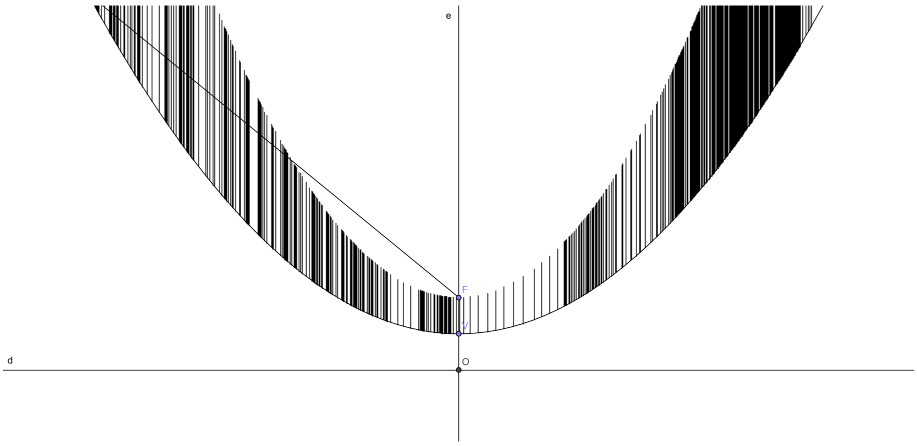

Figura 4.2: simulação do farol baixo com rastro

imediato são emitidos na direção vértice-foco. Logo, esses não são refletidos e se misturam com aqueles que foram mencionados ao serem refletidos.

(4.3) Farol alto;

(4.4) Farol alto com rastro;

Observação 4.0.8. A parte dos raios rastreados em destaque, são aqueles que inicialmente foram ou são direcionados para o espelho parabólico, e em seguida são refletidos divergentemente

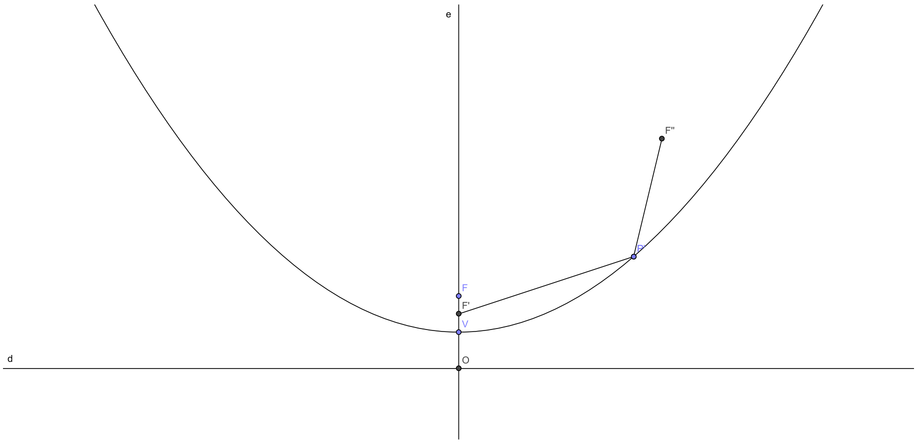

Figura 4.3: simulação do farol alto

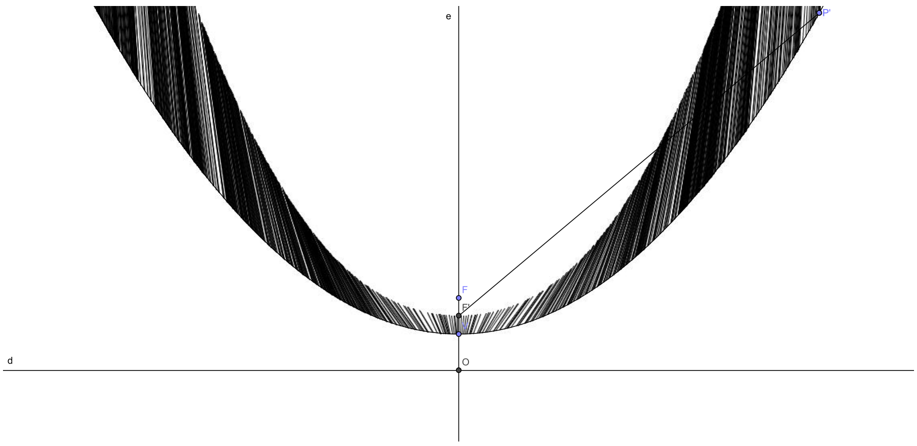

Figura 4.4: simulação do farol alto com rastro

na direção vértice-foco(não paralelos ao eixo e). Já a parte interna branca dentro da parábola são os raios que de imediato são emitidos para fora do parabolóide. Logo, esses não são refletidos e se misturam com parte daqueles que foram mencionados ao serem refletidos.

Capítulo 5

Conclusão

O objetivo deste trabalho foi apresentar uma abordagem da parábola sobre diversos aspectos que normalmente são omitidos no ensino médio, tais como: a equivalência de algumas definições, a apresentação e a demonstração da parábola como uma seção no cone. Também realizamos a exploração das propriedades refletoras aplicada principalmente nos faróis de carros parabólicos e, através de exemplos, sugerimos algumas atividades de extrema importância que deveriam ser aplicadas no ensino de tal assunto.

Referências Bibliográficas

G. Aválla. *História da Matemática.* Editora Edgard Blucher, Sao Paulo, 2 edition, 1996.

B. Boyer. *História da Matemática.* Editora Blucher, 2 edition, 2002.

K. c. l. Delgado, j. e Frensel. *Notas do profmat de geometria analítica.* SBM, Rio de Janeiro.

G. Garbi. *A rainha das ciências.* Editora Livraria da Física, Sao Paulo, 5 edition, 2010.

S. Strogatz. *A Matemática do dia a dia*, volume 1. Editora Campus, Sao Paulo, 1 edition, 2013.