UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Somas Telescópicas

Hugo Leonardo Coutinho Dantas

Dissertação de Mestrado

RECIFE/PE
Agosto 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Hugo Leonardo Coutinho Dantas

Somas Telescópicas

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Rodrigo José Gondim Neves*

RECIFE/PE
Agosto 2013

Comissão Julgadora

Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves - DM UFRPE
Presidente (orientador)

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva - DM UFRPE
Membro

Prof. Dr. Airton Temístocles Gonçalves de Castro - DMat UFPE
Membro

Prof. Dra. Anete Soares Cavalcanti - DM UFRPE
Membro

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Hugo Leonardo Coutinho Dantas

Somas Telescópicas

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Rodrigo José Gondim Neves*

RECIFE/PE
Agosto 2013

Aos meus pais, meu amor, familiares, amigos e professores.
A mim.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Fernando e Izete. Por uma vida de investimentos na minha educação, pelo apoio e respeito as minhas escolhas.

Obrigado Karla por estar sempre me pressionando e incentivando, mais que todos, para que eu lougrasse êxito neste curso.

Obrigado a todos os amigos feitos nesses dois anos, principalmente os que formavam o grupo de estudos do IPSEP, sem vocês eu não teria conseguido chegar aqui. Em particular, obrigado a Bruno Eloi e Pedro Pessoa, sempre juntos nesta jornada.

Agradeço aos professores da UFRPE, onde fiz graduação e pós, entre eles, Rodrigo Gondim, meu orientador e referência.

Obrigado titia Débora pela correção do abstract.

Agradeço a Deus, a Nossa Senhora e ao meu anjo da guarda pela realização deste sonho.

Brincar é condição fundamental para ser sério.

—ARQUIMEDES

Resumo

Grande parte dos problemas que envolvem somatórios são resolvidos com uso da propriedade telescópica que consiste em observar que os termos da sequência a ser somada podem ser escritos como diferenças entre termos consecutivos de uma outra sequência. Este trabalho traz aplicações desta propriedade em somas dos tipos: aritméticas, trigonométricas, binomiais, com potências fatoriais negativas e polinomiais.

É comum, por exemplo, realizar o cálculo de somas polinomais de modo recursivo. Neste trabalho é mostrado uma alternativa, através de números binomiais e da soma de uma coluna do triângulo de Tartaglia-Pascal (com uso da propriedade telescópica), que torna o processo mais eficaz.

Palavras-chave: somas telescópicas, somas polinomiais, números binomiais, potências fatoriais negativas

Abstract

A big part of the problems involving summation are solved with the use of telescopic property, which consists of observing that the terms of the sequence to be calculated could be be written as differences between consecutive terms of another sequence. This work brings applications of this property in figures of the following types: arithmetic, trigonometric, binomial, with negative factorial power and polynomial.

It is common to perform the calculation of polynomial sums on a recursively way. In this work, it is shown an alternative, through binomial-coefficients and the sum of a column of Tartaglia-Pascal's triangle (using the telescopic property), which makes the process more effective.

Keywords: telescopic sums, polynomial sums, binomial-coefficients, negative factorial powers

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

O cálculo de somas acompanha os estudos desde a educação básica. Partindo da idéia inicial da operação aditiva e vai sendo aprofundada: adição de várias parcelas, as propriedades comutativa e associativa,

i) A adição é comutativa: $a+b=b+a$;

ii) A adição é associativa: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

até chegar nos somatórios.

Conta a "história", que Carl Friedrich Gauss[1] entrou para a escola aos 7 anos e que, em certa aula, um de seus professores pediu aos alunos que somassem os números inteiros de 1 a 100, e, rapidamente, o pequeno Gauss colocou sua solução sobre a mesa, com o resultado do problema. A sua resposta, 5050. Especula-se que Gauss teria agrupado os pares dos números equidistantes aos extremos, ou seja

$$1+2+3+...+98+99+100=(1+100)+(2+99)+(3+98)+...+(50+51)$$

Tem-se então 50 parcelas de 101, logo $50\cdot 101=5050$.

Em jornadas olímpicas é comum encontrar problemas que envolvem somatórios. Este trabalho tem como objetivo mostrar meios que possam facilitar o contato dos alunos com os diversos tipos de somas: aritméticas, com números binomiais, trigonométricas, polinomiais, com potências fatoriais negativos e somas infinitas. Utilizando, principalmente, a propriedade telescópica.

Até somas infinitas, que requer do aluno um estudo mais profundo do assunto, é visto na educação fundamental já nos primeiros anos, vide, por exemplo, as dízimas periódicas,

ora $1,333...=1+0,3+0,03+0,003+...=1+\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{100}+\dfrac{3}{1000}+....$

No ensino médio, tem-se as progressões geométricas infinitas. Sendo necessário a análise da convergência na soma dos termos destes tipos de progressões.

[1] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi um matemático, astrónomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números e análise matemática.

A propriedade telescópica das somas,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1$$

é tratada no primeiro capítulo, com aplicações diversificadas, inclusive de somas trigonométricas e somas com potências fatoriais negativas.

No segundo capítulo, tem-se atenção os números binomiais. Algumas propriedades do triângulo de Tartaglia-Pascal[2] e outras identidades famosas, como a de Euller, são explanadas com o auxílio das propriedades de somatórios.

O capítulo tem continuidade com as somas polinomiais. Existem vários métodos para somar polinômios, porém alguns bem trabalhosos. Através de produtos notáveis do tipo $(n-1)^k$; com auxílio dos números de Bernoulli[3] (B_k); com uso dos números Eulerianos[4] (números definidos por uma recorrência); entre outros. Neste capítulo é mostrado uma maneira prática para calcular somas polinomiais com uso dos números binomiais, de maneira direta, tornando-se assim, mais acessível a sala de aula do ensino médio.

O capítulo três é direcionado as somas infinitas e conceitos de convergências, inclusive, no uso da propriedade telescópica.

Por fim, tem-se no quarto capítulo a proposta pedagógica para desenvolvimento dos assuntos abordados em sala de aula e a uma lista de problemas propostos.

O trabalho conta com várias aplicações tentando diversificar o uso e a compreensão do leitor nas temáticas de cada capítulo. É intuito do autor que este trabalho sirva como um apoio e estímulo no estudo dos somatórios e no uso da propriedade telescópica.

---

[2]Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557), matemático e engenheiro italiano. E Blaise Pascal (1623-1662), matemático, físico e filósofo francês. A dupla dá nome ao triângulo aritmético formado pelos números binomiais. A autoria do triângulo não é da dupla, mas escreveram obras com vasta contribuição das características do triângulo, como a *General Tratado di numeri et misure* de Tartaglia.

[3]Jakob Bernoulli (1654-1705) matemático suíço.

[4]Leonhard Euler (1707-1783) matemático e físico suíço. Os números de Bernoulli e os números Eulerianos tem lugar destaque no cálculo de diferenças.

CAPÍTULO 1

Somas telescópicas

1.1 Somatórios

Seja A um conjunto com duas operações $(+,\cdot)$ satisfazendo as leis básicas da aritmética, por exemplo em um dos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

Definição 1.1.1. *Se (a_n) é uma sequência em A, define-se o somatório dos seus n primeiros termos como sendo*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Sejam (a_k) e (b_k) duas sequências em A. Então

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$;

ii) Seja $c \in A$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$;

iii) Seja $c \in A$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc$;

iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ com $1 < m < n$;

v) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+m}^{m+n} a_{k-m}$;

vi) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=n}^{p} a_k b_i = \sum_{k=1}^{m} a_k \sum_{i=n}^{p} b_i$.

vii) Produto de Cauchy: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{m+n}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right) x^i$ com $a_i = 0$ se $i > n$ e $b_i = 0$ se $i > m$.

Prova:

i) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+...+(a_n+b_n)=$

$=a_1+b_1+a_2+b_2+...+a_n+b_n=(a_1+a_2+...++a_n)+(b_1+b_2+...+b_n)=$

$=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{i=1}^{n}b_k$. Análogo para $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$.

ii) $\sum_{k=1}^{n}c\cdot a_k=c\cdot a_1+c\cdot a_2+...+c\cdot a_n=c\cdot(a_1+a_2+...+a_n)=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$.

iii) É um caso particular do item ii) quando $a_k=1$.

iv) $\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+...+a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+...+a_n$, pois $1<m<n$, então $\sum_{k=1}^{m}a_k+\sum_{k=m+1}^{n}a_k$.

v) $\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+...+a_n=a_{1+m-m}+a_{2+m-m}+...+a_{n+m-m}=\sum_{k=1+m}^{m+n}a_{k-m}$.

vi) $\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=n}^{p}a_kb_i=\sum_{i=n}^{p}a_1b_i+\sum_{i=n}^{p}a_2b_i+...+\sum_{i=n}^{p}a_mb_i=$

Aplicando a propriedade número ii) fica-se com:

$a_1\sum_{i=n}^{p}b_i+a_2\sum_{i=n}^{p}b_i+...+a_m\sum_{i=n}^{p}b_i=(a_1+a_2+...a+m)\left(\sum_{i=n}^{p}b_i\right)=\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)\left(\sum_{i=n}^{p}b_i\right)$.

vii) $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\sum_{i=0}^{m}b_ix^i=\sum_{i=0}^{m+n}\left(\sum_{j=0}^{i}a_jb_{i-j}\right)x^i$

$\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\sum_{i=0}^{m}b_ix^i=(a_0+a_1x^1+a_2x^2+...+a_nx^n)(b_0+b_1x^1+b_2x^2+...+b_mx^m)=$

$=a_0(b_0+b_1x^1+b_2x^2+...+b_mx^m)+a_1x^1(b_0+b_1x^1+b_2x^2+...+b_mx^m)+a_2x^2(b_0+b_1x^1+$ $b_2x^2+...+b_mx^m)+...+a_nx^n(b_0+b_1x^1+b_2x^2+...+b_mx^m)=$

$= a_0b_0 + a_0b_1x^1 + a_0b_2x^2 + ... + a_0b_mx^m + a_1b_0x^1 + a_1b_1x^2 + a_1b_2x^3 + ... + a_1b_mx^{m+1} + a_2b_0x^2 + a_2b_1x^3 + b_2x^4 + ... + b_mx^{m+2} + ... + a_nb_0x^n + a_nb_1x^{n+1} + a_nb_2x^{n+2} + ... + a_nb_mx^{n+m} =$

$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^1 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + ... + a_3b_0)x^3 + ... + (a_0b_m + a_1b_{m-1} + ... + a_mb_0)x^m + (a_0b_{m+1} + a_1b_m + ... + a_{m+1}b_0)x^{m+1} + ... + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + ... + a_nb_0)x^n + (a_0b_{n+1} + a_1b_n + ... + a_{n+1}b_0)x^{n+1} + ... + (a_0b_{n+m} + a_1b_{n+m-1} + ... + a_{n+m}b_0)x^{n+m} =$

$= \sum_{i=0}^{n+m} [a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + (a_0b_3 + a_1b_2 + ... + a_3b_0) + ... + (a_0b_m + a_1b_{m-1} + ... + a_mb_0) + (a_0b_{m+1} + a_1b_m + ... + a_{m+1}b_0) + ... + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + ... + a_nb_0) + (a_0b_{n+1} + a_1b_n + ... + a_{n+1}b_0) + ... + (a_0b_{n+m} + a_1b_{n+m-1} + ... + a_{n+m}b_0)]x^i =$

Logo, $= \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j=0}^{i} a_jb_{i-j} \right) x^i$ com $a_i = 0$ se $i > n$ e $b_i = 0$ se $i > m$.

Exemplo 1.1.2. *Calcule* $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i + j)$.

Solução: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i + j) = \sum_{i=1}^{n} [(i+1) + (i+2) + (i+3) + ...(i+n)] =$

$$= \sum_{i=1}^{n} [ni + (1 + 2 + 3 + ... + n)] = \sum_{i=1}^{n} ni + \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= n \sum_{i=1}^{n} i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} = n^2(n+1).$$

1.2 Soma telescópica

"A ideia por trás do nome é a seguinte: assim como olhando num telescópio encurtamos a imensa distância de um corpo celeste a nossos olhos, a propriedade telescópica encurta o caminho entre a soma inicial de muitas parcelas e o cálculo do resultado da mesma."(CAMINHA)

Teorema 1.2.1. *Dada uma sequência* (X_n), *com* $n \in \mathbb{N}$ *tem-se que* $\Delta X_k = X_{k+1} - X_k$. *Aplicando somatórios a todos os termos desta equação fica-se com:*

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta X_k = X_{n+1} - X_1.$$

A soma $\sum_{k=1}^{n} \Delta X_k$ *é chamada soma telescópica.*

Prova: Tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta X_1 &= X_2 - X_1 \\
\Delta X_2 &= X_3 - X_2 \\
\Delta X_3 &= X_4 - X_3 \\
&\dots \\
\Delta X_{n-1} &= X_n - X_{n-1} \\
\Delta X_n &= X_{n+1} - X_n
\end{aligned}$$

Somando todas as equações membro a membro

$$\Delta X_1 + \Delta X_2 + \dots + \Delta X_n = X_2 - X_1 + X_3 - X_2 + \dots + X_n - X_{n-1} + X_{n+1} - X_n$$

Efetuando os devidos cancelamentos resulta que

$$\Delta X_1 + \Delta X_2 + \dots + \Delta X_n = X_{n+1} - X_1$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta X_k = X_{n+1} - X_1$$

Exemplo 1.2.2. *(IEZZI, 1997) Chama-se progressão aritmética (PA) de 1ª ordem uma sequencia dada pela seguinte fórmula de recorrência:* $A_1 = a$ e $A_n = A_{n-1} + r$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *com* a, $r \in \mathbb{R}$.

Vamos então, calcular o termo geral das progressões aritméticas de 1ª ordem de razão r *e* $A_1 = a$.

Solução: Para calcular deve-se observar o comportamento termo a termo da progressão

$$\begin{aligned}
A_2 &= A_1 + r \\
A_3 &= A_2 + r \\
&\dots \\
A_{n-1} &= A_{n-2} + r \\
A_n &= A_{n-1} + r
\end{aligned}$$

Observa-se que ao adiconar membro a membro todas as equações alguns termos serão cancelados e obtem-se a equação do termo geral

$$A_n = A_1 + (n-1)r$$

Pode-se chegar a esta equação mais rapidamente fazendo uso da equação da soma telescópica (1) com $X_i = A_i$ e $\Delta X_n = r$:

$$\begin{aligned} A_n - A_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} r \\ A_n - A_1 &= r\sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ A_n - A_1 &= (n-1)r \\ A_n &= A_1 + (n-1)r \end{aligned}$$

Exemplo 1.2.3. *Diz-se que uma sequência (A_n) é uma progressão aritmética de 2ª ordem se as diferenças entre os termos consecutivos formam uma P.A. de 1ª ordem com razão r e primeiro termo $B_1 = b$, ou seja:*

$$A_{n+1} - A_n = B_n, \text{ onde } B_n = B_1 + (n-1)r.$$

Vamos calcular o termo geral das progressões aritméticas de 2ª ordem.

Solução:
Pela equação da soma telescópica, com $\Delta X_k = B_k$:

$$A_n - A_1 = \sum_{k=1}^{n-1} B_k$$

Mas, $\sum_{k=1}^{n-1} B_k$ é a soma de uma P.A. de 1ª ordem, então $\sum_{k=1}^{n-1} B_k = \frac{(B_1 + B_{n-1})(n-1)}{2}$.
Logo, o termo geral de uma P.A. de 2ª ordem é:

$$\begin{aligned} A_n - A_1 &= \frac{(B_1 + B_{n-1})(n-1)}{2} \\ A_n &= A_1 + \frac{B_1}{2}(n-1) + \frac{B_1 + (n-2)r}{2}(n-1) \end{aligned}$$

$$A_n = A_1 + B_1(n-1) + \frac{r}{2}(n-1)(n-2)$$

Exemplo 1.2.4. *Calcular* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A_k A_{k+1}}$ *onde os* A_k*'s são elementos não nulos de uma progressão aritmética de 1ª ordem com razão* r.

Solução: Quando $r = 0$ tem-se uma P.A. de termos constante ($A_k = A_1$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$) então sua soma seria $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A_1^2} = n \frac{1}{A_1^2}$

Vamos calcular para $r \neq 0$, tem-se

$$\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} = \frac{A_2 - A_1}{A_1 A_2} = \frac{1}{A_1 A_2} r$$
$$\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3} = \frac{1}{A_2 A_3} r$$
$$\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_4} = \frac{1}{A_3 A_4} r$$
$$\cdots$$
$$\frac{1}{A_{n-1}} - \frac{1}{A_n} = \frac{1}{A_{n-1} A_n} r$$
$$\frac{1}{A_n} - \frac{1}{A_{n+1}} = \frac{1}{A_n A_{n+1}} r$$

Telescopicando resulta que

$$\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_{n+1}} = r \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A_k A_{k+1}}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A_k A_{k+1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_{n+1}}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{A_{n+1} - A_1}{A_1 A_{n+1}}\right)$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A_k A_{k+1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{A_1 + nr - A_1}{A_1 A_{n+1}}\right) = \frac{n}{A_1 A_{n+1}}$$

Em particular, quando $r = 1$ e $A_1 = 1$ tem-se:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Veja agora o exemplo a seguir. Inicialmente obersava-se o comportamento de ΔX_k.

Exemplo 1.2.5. $\sum_{k=1}^{n} k2^k = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n$.

Observe que

$\Delta k2^k = (k+1)2^{k+1} - k2^k = (2k+2-k)2^k = k2^k + 2^{k+1}$ *(**)*

Ora, note que

$\sum_{k=1}^{n} \Delta k2^k = (n+1)2^{n+1} - 2$ *(Propriedade telescópica)*

E que

$\sum_{k=1}^{n} 2^{k+1}$ *é a soma dos* n *termos de uma progressão geométrica*[1] *de razão* 2 *com* $a_1 = 4$.

Então $\sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} = 4\frac{2^n - 1}{2-1} = 2^{n+2} - 4$

Logo, voltando para a equação (**) e aplicando somatório a todos os termos:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta k2^k = \sum_{k=1}^{n} k2^k + \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} \Delta k2^k - \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} = (n+1)2^{n+1} - 2 - (2^{n+2} - 4) =$$

$$= (n+1)2^{n+1} - 2^{n+2} + 2 = (n+1)2^{n+1} - 2 \cdot 2^{n+1} + 2 =$$

$$= (n+1-2)2^{n+1} + 2 = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

1.3 Utilizando "truques", exemplos em somas trigonométricas

Algumas vezes são necessários "truques"para chegar as somas telescópicas. Como, por exemplo, utilizar expressões trigonométricas:

[1](IEZZI, 1977) Chama-se progressão geométrica (PG) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = a$ e $a_n = a_{n-1} \cdot q$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $q \in \mathbb{R}$. A demonstração da soma da PG finita e infinita encontram-se na página 28.

Exemplo 1.3.1. *Prove que:*

$$\frac{sen(x)}{\cos(x)}+\frac{sen(2x)}{\cos^2(x)}+\frac{sen(3x)}{\cos^3(x)}+...+\frac{sen(nx)}{\cos^n(x)}=cotg(x)-\frac{\cos((n+1)x)}{sen(x)\cdot cos^n(x)},\ \forall x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Solução:

$$\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}+\frac{\mathrm{sen}(2x)}{\cos^2(x)}+\frac{\mathrm{sen}(3x)}{\cos^3(x)}+...+\frac{\mathrm{sen}(nx)}{\cos^n(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{sen}(kx)}{\cos^k(x)}$$

A príncipio não temos com utilizar a propriedade telescópica, mas realizando alguns "truques"conseguimos chegar a tal.

Primeiro multiplicando por $\frac{\mathrm{sen}(x)}{\mathrm{sen}(x)}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{sen}(kx)}{\cos^k(x)}=\frac{\mathrm{sen}(x)}{\mathrm{sen}(x)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{sen}(kx)}{\cos^k(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(kx)}{\mathrm{sen}(x)\cos^k(x)}$$

Agora, adicionando e retirando a parcela $\cos(kx)\cos(x)$ ao numerador, desenvolvendo as expressões trigonométricas e simplificando as frações:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{sen}(kx)}{\cos^k(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(kx)\cos(x)+\mathrm{sen}(kx)\mathrm{sen}(x)-\cos(kx)\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)\cos^k(x)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos(kx)\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)\cos^k(x)}-\frac{\cos(kx)\cos(x)-\mathrm{sen}(kx)\mathrm{sen}(x)}{\mathrm{sen}(x)\cos^k(x)}\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos(kx)}{\mathrm{sen}(x)\cos^{k-1}(x)}-\frac{\cos(kx+x)}{\mathrm{sen}(x)\cos^k(x)}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos(kx)}{\mathrm{sen}(x)\cos^{k-1}(x)}-\frac{\cos((k+1)x)}{\mathrm{sen}(x)\cos^k(x)}\right]$$

Tem-se então uma soma telescópica. Logo

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{sen}(kx)}{\cos^k(x)}=\frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}-\frac{\cos((n+1)x)}{\mathrm{sen}(x)\cos^n(x)}=cotg(x)-\frac{\cos((n+1)x)}{\mathrm{sen}(x)\cos^n(x)}.$$

Exemplo 1.3.2. *Calcule* $\frac{tg(1)}{\cos(2)}+\frac{tg(2)}{\cos(4)}+\frac{tg(4)}{\cos(8)}+...+\frac{tg(2^n)}{\cos(2^{n+1})}$.

Solução:

$$\frac{tg(1)}{\cos(2)}+\frac{tg(2)}{\cos(4)}+\frac{tg(4)}{\cos(8)}+...+\frac{tg(2^n)}{\cos(2^{n+1})}=\sum_{k=0}^{n}\frac{tg(2^k)}{\cos(2^{k+1})}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{tg(2^k)}{\cos(2^{k+1})}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\operatorname{sen}(2^k)}{\cos(2^k)\cos(2^{k+1})}=$$

Escrevendo 2^k como $2^{k+1}-2^k$ no numerador, tem-se

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\operatorname{sen}(2^{k+1}-2^k)}{\cos(2^k)\cos(2^{k+1})}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\operatorname{sen}(2^{k+1})\cos(2^k)-\operatorname{sen}(2^k)\cos(2^{k+1})}{\cos(2^k)\cos(2^{k+1})}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\operatorname{sen}(2^{k+1})}{\cos(2^{k+1})}-\frac{\operatorname{sen}(2^k)}{\cos(2^k)}\right]=\sum_{k=0}^{n}\left[tg(2^{k+1})-tg(2^k)\right]$$

Ora, uma soma telescópica, então

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{tg(2^k)}{\cos(2^{k+1})}=tg(2^{n+1})-tg(1).$$

1.4 Somas com potências fatoriais

Também nas somas de potências fatoriais encontra-se uso da propriedade telescópica. Shchepin E. possui um arquivo[2] sobre somas telescópicas onde denota as potências fatoriais da seguinte maneira:

$k^{\underline{p}}=k(k-1)(k-2)(k-3)...(k-p+1)$ e $k^{\underline{-p}}=\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)...(k+p-1)}$ com $k\in\mathbb{R}$ e $p\in\mathbb{N}$ e nenhum fator nulo.

O primeiro tipo, $k^{\underline{p}}$, origina um polinômio de grau igual a p. No próximo capítulo, somas polinomais terão uma atenção mais detalhada. Já o segundo tipo das potências fatoriais, $k^{\underline{-p}}$, ganha as atenções agora.

Proposição 1.4.1. *Seja* $\Delta k^{\underline{p}}=(k+1)^{\underline{p}}-k^{\underline{p}}$ *então* $\Delta k^{\underline{p}}=pk^{\underline{p-1}}$.

Prova:
$\Delta k^{\underline{p}}=(k+1)^{\underline{p}}-k^{\underline{p}}=$

$(k+1)^{\underline{p}}$ tem p fatores e $k^{\underline{p}}$ também. Então

[2]Telescopic Sums (5 p.)- http://libgen.info/view.php?id=139620 ou http://mechmath.org/books/40969

$\Delta k^{\underline{p}} = (k+1)k(k-1)(k-2)...(k-p+2) - k(k-1)(k-2)...(k-p+1) =$

$= k(k-1)(k-2)...(k-p+2)[(k+1)-(k-p+1)] = p \cdot k(k-1)(k-2)...(k-p+2)$

Mas $k(k-1)(k-2)...(k-p+2)$ tem $p-1$ fatores, logo

$$\Delta k^{\underline{p}} = pk^{\underline{p-1}}.$$

Analogamente tem-se que $\Delta k^{\underline{-p}} = -pk^{\underline{-p-1}}$.

Proposição 1.4.2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)...(k+p-1)} = \frac{1}{-p+1}((n+1)^{\underline{-p+1}} - 1^{\underline{-p+1}})$.

Prova:
$\displaystyle\sum \frac{1}{k(k+1)(k+2)...(k+p-1)} = \sum k^{\underline{-p}}$

Pela proposição 1.4.1: $k^{\underline{-p}} = \dfrac{1}{-p+1}\Delta k^{\underline{-p+1}}$

Então, $\displaystyle\sum k^{\underline{-p}} = \sum \frac{1}{-p+1}\Delta k^{\underline{-p+1}} = \frac{1}{-p+1}\sum \Delta k^{\underline{-p+1}} = \frac{1}{-p+1}\sum((k+1)^{\underline{-p+1}} - k^{\underline{-p+1}})$

Pela propriedade telescópica, somando de $k=1$ até n

$$= \frac{1}{-p+1}\sum_{k=1}^{n}((k+1)^{\underline{-p+1}} - k^{\underline{-p+1}}) = \frac{1}{-p+1}((n+1)^{\underline{-p+1}} - 1^{\underline{-p+1}}).$$

Exemplo 1.4.3. *(SVSU 2011 Math Olympics - Adaptada)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = ?$

Solução: *Escrevendo esta soma como*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} k^{\underline{-3}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \Delta k^{\underline{-2}}$$

Então,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\underline{-3}} = \frac{1}{-2}((n+1)^{\underline{-2}} - 1^{\underline{-2}}) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{1\cdot 2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Exemplo 1.4.4. *Calcular* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)}$.

Solução: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k(k+1)(k+2)(k+3)} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{k(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{2}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k+1)^{\underline{-3}} + 2\sum_{k=1}^{n} k^{\underline{-4}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \Delta(k+1)^{\underline{-2}} - \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n} \Delta k^{\underline{-3}} =$$

$$= -\frac{1}{2}((n+2)^{\underline{-2}} - 2^{\underline{-2}}) - \frac{2}{3}((n+1)^{\underline{-3}} - 1^{\underline{-3}}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2(n+2)(n+3)} + \frac{1}{12} - \frac{2}{3(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{1}{9} =$$

$$= \frac{7}{36} - \frac{3n+7}{6(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Definição 1.4.5. *Seja* $a \in \mathbb{Q}$. *Escreve-se* $\sum_{i=1}^{n} f(a+i) = f(a+1) + f(a+2) + ... + f(a+n)$.

Exemplo 1.4.6. *Calcular a soma* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(5k-2)(5k+3)}$.

Solução: *Primeiramente divide-se o numerador e o denominador por 25:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(5k-2)(5k+3)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{25}}{(k-\frac{2}{5})(k+\frac{3}{5})}$$

$$\frac{1}{25}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-\frac{2}{5})(k-\frac{2}{5}+1)} = \frac{1}{25}\sum_{k=1}^{n} \left(k-\frac{2}{5}\right)^{\underline{-2}} = -\frac{1}{25}\sum_{k=1}^{n} \Delta\left(k-\frac{2}{5}\right)^{\underline{-1}} =$$

$$= -\frac{1}{25}\left[\left(n-\frac{2}{5}+1\right)^{\underline{-1}} - \left(\frac{3}{5}\right)^{\underline{-1}}\right] = -\frac{1}{25}\left[\left(\frac{5n+3}{5}\right)^{\underline{-1}} - \left(\frac{3}{5}\right)^{\underline{-1}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{25}\left(\frac{5}{5n+3} - \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{25}\cdot\frac{5}{3} - \frac{1}{25}\cdot\frac{5}{5n+3} = \frac{1}{15} - \frac{1}{5(5n+3)}.$$

CAPÍTULO 2

Somas binomiais e aplicações

2.1 Os números binomiais

Definição 2.1.1. *Os números binomiais, denotados por* $\binom{n}{p}$ *com* $p = 0,1,2,...,n$ $(n, p \in \mathbb{N})$, *são os coeficientes dos monômios do desenvolvimento do binômio de Newton*[1] $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n^{\underline{p}}}{p!} \text{ se } n \geq p \text{ ou } \binom{n}{p} = 0 \text{ quando } n < p.$$

i) $\binom{n}{n} = 1$.

ii) $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$ são números binomiais complementares (ou simétricos) e $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

iii) $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

iv) Relação de Fermat[2] $\binom{n}{p+1} = \frac{n-p}{p+1}\binom{n}{p}$.

v) Relação de Stifel[3] $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Prova:

i) $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!} = 1$.

[1] Sir Isaac Newton PRS MP (1642-1727), físico e matemático inglês dos mais influentes na história.

[2] Pierre de Fermat (1601-1665) advogado francês do Parlamento de Toulouse e amante da matemática. A ele é atribuido grandes desenvolvimentos no cálculo infinitesimal.

[3] Michael Stifel (1487-1567), monge e matemático alemão.

ii) $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!(n-(n-p)!} = \binom{n}{n-p}$.

iii) $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!} = \dfrac{n}{p} \cdot \dfrac{(n-1)!}{(p-1)![(n-1)-(p-1))]!} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

iv) $\binom{n}{p+1} = \dfrac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \dfrac{n-p}{n-p} \cdot \dfrac{n!}{(p+1)p!(n-p-1)!} =$
$= \dfrac{n-p}{p+1} \cdot \dfrac{n!}{p!(n-p)(n-p-1)!} = \dfrac{n-p}{p+1} \cdot \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n-p}{p+1}\binom{n}{p}$.

v) $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n}{p} + \dfrac{n-p}{p+1}\binom{n}{p} = \binom{n}{p}\left(1 + \dfrac{n-p}{p+1}\right) =$
$= \binom{n}{p}(\dfrac{p+1+n-p}{p+1}) = \binom{n}{p} \cdot \dfrac{n+1}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Teorema 2.1.2. *(Teorema binomial de Tartaglia-Pascal)* $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

Prova:
Se $a = 0$, $(0+b)^n = \binom{n}{0}0^n + \binom{n}{1}0^{n-1}b + \binom{n}{2}0^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}0b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = b^n$.

Se $a \neq 0$, desenvolve-se o binômio de Newton $(1+x)^n$, tomando $x = \dfrac{b}{a}$ fica-se com:

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{b}{a}\right)^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{b}{a} + \binom{n}{2}\frac{b^2}{a^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{b^n}{a^n}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por a^n:

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \cdot a^n = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{b}{a} + \binom{n}{2}\frac{b^2}{a^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{b^n}{a^n}\right] \cdot a^n$$

$$\left(1 \cdot a + \frac{b}{a} \cdot a\right)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1}\frac{b}{a} \cdot a^n + \binom{n}{2}\frac{b^2}{a^2} \cdot a^n + \ldots + \binom{n}{n}\frac{b^n}{a^n} \cdot a^n$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Definição 2.1.3. *(IEZZI, 1977) O triângulo de Tartaglia-Pascal é uma tabela onde pode-se dispor ordenadamente os coeficientes binomiais* $\binom{n}{p}$.

Linha 0: $\binom{0}{0}$

Linha 1: $\binom{1}{0}\binom{1}{1}$

Linha 2: $\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$

Linha 3: $\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$

...

Linha k: $\binom{k}{0}\binom{k}{1}\binom{k}{2}\binom{k}{3}...\binom{k}{k}$

...

Exemplo 2.1.4. *Mostre que a soma dos termos de uma linha do triângulo de Tartaglia-Pascal é dada por* $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

Solução:
Basta tomar $x = 1$ no desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}1 + \binom{n}{2}1^2 + ... + \binom{n}{n}1^n$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n}.$$

Exemplo 2.1.5. *Calcule a soma dos termos de ordem par de uma linha do triângulo de Tartaglia-Pascal, isto é,* $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... + \binom{n}{n-1}$, *para n ímpar.*

Calcule também a soma dos termos de ordem ímpar, $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + ... + \binom{n}{n}$.

Solução:
Já é conhecido, pelo exemplo anterior, que $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

Então,

$$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n\ (*)$$

$$(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0\ (**)$$

Somando membro a membro as equações (*) e (**), fica-se com:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=2^n+0$$

$$\sum_{k=0}^{n}[1+(-1)^k]\binom{n}{k}=2^n$$

Quando k é par, tem-se $\sum_{k=0}^{n}2\binom{n}{k}=2^n$, então, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n-1}$ para k par.

Por outro lado, subtraindo membro a membro as equações (*) e (**), tem-se:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=2^n-0$$

$$\sum_{k=0}^{n}[1-(-1)^k]\binom{n}{k}=2^n$$

Quando k é ímpar, tem-se $\sum_{k=0}^{n}2\binom{n}{k}=2^n$, então, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n-1}$ para k ímpar.

Exemplo 2.1.6. *Demonstrar, para todos n, m, $k\in\mathbb{N}$, a identidade de Vandermonde[4]-Euler:*

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}.$$

[4] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) foi um músico, matemático e químico francês que tem trabalhos ao lado de Bézout e Lavoisier.

Solução: Pelo binômio de Newton tem-se

$(1+x)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i$ e $(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$

Considere então

$$\sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k = (1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$$

Realizando uma mudança de variavéis, $j = k - i$:

$$\sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k-i} x^{k-i} = \sum_{k=0}^{m+n} \left[\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} \right] x^k$$

Logo, cancelando os somatórios externos,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

Em particular, quando $n = m = k$ está deduzida a identidade de Lagrange[5]:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exemplo 2.1.7. *Relação de Stifel generalizada (Soma de uma coluna).*

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \text{ com } n > p$$

Solução: Pela relação de Stifel

$$\binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1} = \Delta \binom{n}{p+1}$$

Então, aplicando somatórios,

[5] Joseph-Louis Lagrange (Giuseppe Luigi Lagrancia) (1736-1813) foi um matemático e astrônomo italiano.

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{p}=\sum_{k=p}^{n}\Delta\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}-\binom{p}{p+1}$$

Como pela definição 2.1.1 $\binom{p}{p+1}=0$, temos:

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p+1}$$

Exemplo 2.1.8. *Mostre que* $\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k}\binom{k}{p}=\frac{1}{p}\binom{p}{p}+\frac{1}{p+1}\binom{p+1}{p}+...+\frac{1}{n}\binom{n}{p}$.

Solução:

$$\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k}\cdot\binom{k}{p}=\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k}\cdot\frac{k}{p}\binom{k-1}{p-1}$$

$$\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k}\cdot\binom{k}{p}=\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{p}\binom{k-1}{p-1}$$

$$\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k}\cdot\binom{k}{p}=\frac{1}{p}\cdot\sum_{k=p}^{n}\binom{k-1}{p-1}$$

$$\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k}\cdot\binom{k}{p}=\frac{1}{p}\binom{n}{p}.$$

2.2 Somas polinomiais

O uso dos números binomiais é uma ferramenta no cálculo das somas polinomiais. É comum calcular somas de quadrados ou cubos partindo do desenvolvimento dos binômios de Newton.

Para calcular $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$, observa-se os desenvolvimentos a seguir

$$(1-1)^3=1^3-3\cdot1^2\cdot1+3\cdot1\cdot1^2-1^3$$
$$(2-1)^3=2^3-3\cdot2^2\cdot1+3\cdot2\cdot1^2-1^3$$
$$(3-1)^3=3^3-3\cdot3^2\cdot1+3\cdot3\cdot1^2-1^3$$
$$...$$
$$(n-1)^3=n^3-3\cdot n^2\cdot1+3\cdot n\cdot1^2-1^3$$

Então, mais uma vez, somando todas as equações membro a membro e efetuando os devidos cancelamentos fica-se com

$$0 = n^3 - 3\cdot(1^2+2^2+3^2+...+n^2)+3\cdot(1+2+3+...+n)-n$$
$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3+3\cdot(1+2+3+...+n)-n$$

Ou seja, aparece uma dependência. Para que seja calculada a soma dos n primeiros quadrados precisa-se, inicialmente, saber calcular a soma dos n primeiros naturais.

Para isso desenvolve-se os produtos notáveis

$$\begin{gathered}(1-1)^2 = 1^2-2\cdot1\cdot1+1^2\\ (2-1)^2 = 2^2-2\cdot2\cdot1+1^2\\ (3-1)^2 = 3^2-2\cdot3\cdot1+1^2\\ ...\\ (n-1)^2 = n^2-2\cdot n\cdot1+1^2\end{gathered}$$

Somando todas as equações membro a membro e efetuando os devidos cancelamentos resulta que

$$0 = n^2-2\cdot(1+2+3+...+n)+n$$
$$2\sum_{k=1}^{n} k = n^2+n$$
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2}$$

Voltando a soma dos quadrados

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3+3\cdot\frac{n^2+n}{2}-n$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3+3n^2+3n-2n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{3!}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$$

Pode-se escrevê-la como uma soma de números binomiais

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)n}{2!} + 2\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$$

Ora, para calcular a soma dos n primeiros cubos será necessário, previamente, saber a soma dos n primeiros quadrados! Que por sua vez é necessário conhecer a soma dos n primeiros naturais! Imaginem então para calcular a soma de um polinômio de grau 8? Tem-se que conhecer cada uma das somas dos polinômios de graus menores que 8. Tem-se, então, um impecílio.

Não se desesperem! Para nossa sorte, existe uma boa solução!

Lema 2.2.1. *É possível escrever um monômio de grau d na variável n como um produto de d fatores do 1º grau em n mais um polinômio residual que tem grau menor ou igual a $d-1$*

$$n^d = n^{\underline{d}} + P'(n)$$

Prova:
$P'(n) = n^d - n(n-1)(n-2)...(n-d+1) =$

$= n^d - n^d + a_{d-1}n^{d-1} + a_{d-1}n^{d-1} + ... + a_1n + a_0 = a_{d-1}n^{d-1} + a_{d-1}n^{d-1} + ... + a_1n + a_0.$

Teorema 2.2.2. *Todo polinômio f de grau menor ou igual a d, na variável n, pode ser escrito, de uma única forma, como combinação linear dos seguintes polinômios*

$P_0(n) = \binom{n}{0} = 1;$

$P_1(n) = \binom{n}{1} = n;$

$P_2(n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2};$

...

$$P_d(n) = \binom{n}{d} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-d+1)}{d!} = \frac{1}{d!}n^d$$

Ou seja, $f(n) = a_0P_0(n) + a_1P_1(n) + a_2P_2(n) + ... + a_dP_d(n)$.

Prova:
A demonstração está dividida em duas partes.

<ins>Existência</ins>:

A demonstração seguirá por indução em d

Para $d = 1$ tem-se

$$f(n) = a_0 + a_1n = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot n = \alpha_0\binom{n}{0} + \alpha_1\binom{n}{1} \text{ com } a_0 = \alpha_0 \text{ e } a_1 = \alpha_1$$

Hipótese indutiva: todo polinômio de grau menor ou igual a d pode ser escrito como combinação linear dos binomiais $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ..., $\binom{n}{d}$.

Seja agora $f(n)$ um polinômio de grau $d+1$

$$f(n) = a_0 + a_1n + a_2n^2 + ... + a_dn^d + a_{d+1}n^{d+1}$$

Pelo lema 2.2.1 escreve-se

$$f(n) = a_0 + a_1n + a_2n^2 + ... + a_dn^d + a_{d+1}n(n-1)(n-2)...(n-d) + P'(n)$$

$P'(n)$ tem grau menor ou igual a d e ainda, $a_0 + a_1n + a_2n^2 + ... + a_dn^d = P(n)$. Ora, $P(n) + P'(n)$ tem grau menor ou igual a d, denote essa soma de $Q(n)$. Então escreve-se

$$f(n) = Q(n) + a_{d+1}n(n-1)(n-2)...(n-d) \cdot \frac{(d+1)!}{(d+1)!} = Q(n) + \alpha_{d+1}\binom{n}{d+1}$$

Pela hipótese indutiva $Q(n) = \alpha_0\binom{n}{0} + \alpha_1\binom{n}{1} + \alpha_2\binom{n}{2} + ... + \alpha_d\binom{n}{d}$, então

$$f(n) = \alpha_0\binom{n}{0} + \alpha_1\binom{n}{1} + \alpha_2\binom{n}{2} + ... + \alpha_d\binom{n}{d} + \alpha_{d+1}\binom{n}{d+1}, \text{ com } \alpha_{d+1} = \frac{a_{d+1}}{(d+1)!}.$$

<u>Unicidade</u>:

Considere agora que existem α_i's e β_i's tais que

$$\alpha_0\binom{n}{0}+\alpha_1\binom{n}{1}+\alpha_2\binom{n}{2}+...+\alpha_d\binom{n}{d}=\beta_0\binom{n}{0}+\beta_1\binom{n}{1}+\beta_2\binom{n}{2}+...+\beta_d\binom{n}{d}$$

Tem-se que $\alpha_0=\beta_0$ (monômios de grau 0 ou $\alpha_0=\beta_0=0$).

Hipótese de indução: Se $\alpha_1\binom{n}{1}+\alpha_2\binom{n}{2}+...+\alpha_d\binom{n}{d}$ tem grau menor ou igual a d e $\beta_1\binom{n}{1}+\beta_2\binom{n}{2}+...+\beta_d\binom{n}{d}$ tem grau menor ou igual a d então $\alpha_i=\beta_i$.

Considere agora

$f(n)=\alpha_1\binom{n}{1}+\alpha_2\binom{n}{2}+...+\alpha_{d+1}\binom{n}{d+1}$ e $f'(n)=\beta_1\binom{n}{1}+\beta_2\binom{n}{2}+...+\beta_{d+1}\binom{n}{d+1}$

polinômios de grau $d+1$.

Então $\alpha_1\binom{n}{1}+\alpha_2\binom{n}{2}+...+\alpha_{d+1}\binom{n}{d+1}=\beta_1\binom{n}{1}+\beta_2\binom{n}{2}+...+\beta_{d+1}\binom{n}{d+1}$

Aplicando a propriedade iii) dos números binomais,

$$\alpha_1\frac{n}{1}\binom{n-1}{0}+\alpha_2\frac{n}{2}\binom{n-1}{1}+...+\alpha_{d+1}\frac{n}{d+1}\binom{n-1}{d}=\beta_1\frac{n}{1}\binom{n-1}{0}+...+\beta_{d+1}\frac{n}{d+1}\binom{n-1}{d}$$

$$\frac{\alpha_1}{1}\binom{n-1}{0}+\frac{\alpha_2}{2}\binom{n-1}{1}+...+\frac{\alpha_{d+1}}{d+1}\binom{n-1}{d}=\frac{\beta_1}{1}\binom{n-1}{0}+\frac{\beta_2}{2}\binom{n-1}{1}+...+\frac{\beta_{d+1}}{d+1}\binom{n-1}{d}$$

Realizando uma troca de variáveis $n-1=m$. Fica-se com

$$\frac{\alpha_1}{1}\binom{m}{0}+\frac{\alpha_2}{2}\binom{m}{1}+...+\frac{\alpha_{d+1}}{d+1}\binom{m}{d}=\frac{\beta_1}{1}\binom{m}{0}+\frac{\beta_2}{2}\binom{m}{1}+...+\frac{\beta_{d+1}}{d+1}\binom{m}{d}=g(m)$$

Mas, pela hipótese indutiva $g(m)$ tem grau menor ou igual a d. Logo,

$$\frac{\alpha_i}{i}=\frac{\beta_i}{i}\Rightarrow\alpha_i=\beta_i.$$

Exemplo 2.2.3. *Calcular a soma dos n primeiros quadrados utilizando o teorema 2.2.2*

Solução:
Pode-se escrever o polinômio k^2 como

$$k^2 = \alpha_0 \binom{k}{0} + \alpha_1 \binom{k}{1} + \alpha_2 \binom{k}{2}$$

Resulta que

$$k^2 = \alpha_0 + \alpha_1 k + \alpha_2 \frac{k(k-1)}{2} = \alpha_0 + \alpha_1 k + \frac{\alpha_2}{2}k^2 - \frac{\alpha_2}{2}k = \alpha_0 + \frac{(2\alpha_1 - \alpha_2)}{2}k + \frac{\alpha_2}{2}k^2$$

Segue que

$\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 2$.

Então

$$k^2 = 1\binom{k}{1} + 2\binom{k}{2}$$

Aplicando somatórios a cada termo

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} + 2\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2}$$

Por fim, utilizando o teorema das colunas

$$\sum_{k=1}^{n} n^2 = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$$

Não é então necessário calcular a soma dos n primeiros naturais para descobrir a soma dos n primeiros quadrados. Mas é fato que para calcular um polinômio de grau 8, por exemplo, gasta-se um bom tempo até encontrar os α_0, α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7 e α_8.
O que fazer então? Não se preocupem é descrito a seguir uma grande jogada para otimizar esta etapa.

A princípio lembre que por definição $\binom{n}{p} = 0$ quando $n < p$.

Utilizando ainda a soma dos n primeiros quadrados

$$k^2 = \alpha_0 \binom{k}{0} + \alpha_1 \binom{k}{1} + \alpha_2 \binom{k}{2}$$

Para calcular α_0 impõe-se $k=0$

$$0^2=\alpha_0\binom{0}{0}+\alpha_1\binom{0}{1}+\alpha_2\binom{0}{2}\Rightarrow\alpha_0=0$$

Para calcular α_1 impõe-se $k=1$ e já tem-se que $\alpha_0=0$

$$1^2=\alpha_0\binom{1}{0}+\alpha_1\binom{1}{1}+\alpha_2\binom{1}{2}\Rightarrow\alpha_1=1$$

Para calcular α_2 impõe-se $k=2$ e já tem-se que $\alpha_0=0$ e $\alpha_1=1$

$$2^2=\alpha_0\binom{2}{0}+\alpha_1\binom{2}{1}+\alpha_2\binom{2}{2}\Rightarrow 4=2+\alpha_2\Rightarrow\alpha_2=2$$

E "de graça"ganha-se os coeficientes $\alpha_{i's}$ que são necessários.

Exemplo 2.2.4. *Calcular a soma dos n primeiros cubos.*

Solução:

Pelo teorema 2.2.2 tem-se $k^3=\alpha_0\binom{k}{0}+\alpha_1\binom{k}{1}+\alpha_2\binom{k}{2}+\alpha_3\binom{k}{3}$

$k=0\Rightarrow\alpha_0=0.$

$k=1\Rightarrow\alpha_1=1.$

$k=2\Rightarrow\alpha_2=8-2=6.$

$k=3\Rightarrow\alpha_3=27-3-18=6.$

Então $k^3=1\binom{k}{1}+6\binom{k}{2}+6\binom{k}{3}$

Aplicando somatórios em todas as parcelas fica-se com:

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}+6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}+6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{3}=$$

$$=\binom{n+1}{2}+6\binom{n+1}{3}+6\binom{n+1}{4}=\frac{(n+1)(n)}{2}+6\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}+6\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!}=$$

$$=\frac{(n+1)n}{2}\cdot\left[1+6\frac{(n-1)}{3}+6\frac{(n-1)(n-2)}{4\cdot 3}\right]=\frac{(n+1)(n)}{2}\cdot\left[1+4\frac{(n-1)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]=$$

$$= \frac{(n+1)n}{2} \cdot \left[\frac{2}{2} + \frac{(4n-4)}{2} + \frac{(n^2-3n+2)}{2}\right] = \frac{(n+1)(n)}{2} \cdot \frac{(n^2+n)}{2} = \left[\frac{(n+1)(n)}{2}\right]^2.$$

Exemplo 2.2.5. *Mostre que* $1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3$.

Solução: $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} (8k^3 - 12k^2 + 6k - 1)$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = 8\sum_{k=1}^{n} k^3 - 12\sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 =$$

$$= 8\left[\binom{n+1}{2} + 6\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4}\right] - 12\left[\binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}\right] + 6\binom{n+1}{2} - n =$$

$$= 8\binom{n+1}{2} + 48\binom{n+1}{3} + 48\binom{n+1}{4} - 12\binom{n+1}{2} - 24\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{2} - n =$$

$$= 2\binom{n+1}{2} + 24\binom{n+1}{3} + 48\binom{n+1}{4} - n =$$

$$= 2\frac{(n+1)n}{2} + 24\frac{(n+1)n(n-1)}{3!} + 48\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!} - n =$$

$$= (n+1)n + 4(n+1)n(n-1) + 2(n+1)n(n-1)(n-2) - n =$$

$$= n^2 + n + 4n^3 - 4n + 2n^4 - 4n^3 - 2n^2 + 4n - n = 2n^4 - n^2 = n^2(2n^2-1).$$

Capítulo 3
Somas infinitas

"Aquiles nunca pode alcançar a tartaruga; porque na altura em que atinge o ponto donde a tartaruga partiu, ela ter-se-á deslocado para outro ponto; na altura em que alcança esse segundo ponto, ela ter-se-á deslocado de novo; e assim sucessivamente, *ad infinitum*."(KIRK E RAVEN, 1979)

A sitação acima refere-se a um dos paradoxos de Zenão de Eléia[1], Aquiles e a tartaruga: Aquiles e uma tartaruga disputam uma corrida. Ao iniciar a prova, Aquiles dá um espaço X de vantagem ao animal, que se move com metade da velocidade do herói. Deste modo, quando Aquiles percorrer o espaço X, a tartaruga terá percorrido $\frac{X}{2}$. Quando o herói tiver percorrido o novo espaço $\frac{X}{2}$, a sua rival terá percorrido mais $\frac{X}{4}$ e, desta maneira, segundo Zenão, por mais rápido que Aquiles tente correr, nunca vencerá a corrida.

Aquiles teria então que percorrer as distâncias X, $\frac{X}{2}$, $\frac{X}{4}$, $\frac{X}{8}$, $\frac{X}{16}$, ... para tentar alcançar a tartaruga. Pode-se escrever o espaço total percorrido por Aquiles:

$$X+\frac{X}{2}+\frac{X}{4}+\frac{X}{8}++\frac{X}{16}+...+\frac{X}{2^n}+...=X\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

Tem-se então uma "soma infinita".

No 'Conceitos fundamentais da matemática', Caraça (1951), simula um diálogo entre leitor e autor indagando as características de somas com uma quantidade infinita de parcelas (adaptado):

"Podemos chamar soma à entidade $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}+...$? Não é verdade que a adição é uma operação que envolve um número finito de parcelas? Que acontecerá então se esta entidade, apesar de revestir a aparência duma soma, não possuir as suas propriedades? Não será perigoso continuar a chamar-lhe soma? Àquilo a que chamaste soma duma infinidade de parcelas, vamos dar, desde já, outro nome; vamos passar a chamar-lhe uma série."

[1]Zenão de Eléia (490 a.C. - 430 a.C.) foi um filosófo italiano pré-Socrates e membro da Eleatic School.

Então mostra nas páginas seguintes, conceitos de convergência e divergência, resultados essenciais das propriedades associativas e comutativas, séries de termos positivos e, um tipo específico de séries que gozam das mesmas propriedades da soma, ou seja, vale a comutatividade, a associatividade. Essas séries são chamadas séries convergentes absolutas ou absolutamente convergentes e é vislumbrado algumas destas neste trabalho.

Seja a série $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$. Denota-se suas somas parciais:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

...

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

Toma-se a sequência S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ... como sequência que define a série.

Definição 3.0.6. *Se existe S tal que $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, então a série $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ é dita convergente. E,*

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Definição 3.0.7. *Uma série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é chamada absolutamente convergente ou de convergência absoluta se a série de valores absolutos $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ for convergente.*

Alguns critérios para testar a convergência de uma série:

i) Critério do termo geral: Se a série $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ converge, então $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Prova:

Pelas somas parciais tem-se que $S_n = S_{n-1} + a_n$.

Chamando $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ e aplicando limite a todos os termos,

Tem-se $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim_{n\to\infty} a_n$

Logo, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$

Corolário 3.0.8. *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *então a série é divergente.*

Exemplo 3.0.9. *Analise a convergência ou divergência da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.*

Solução:
Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$ termos de uma progressão geométrica infinita de razão q e a_i's $\neq 0$.

O termo geral de uma progressão geométrica é dado por, $a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 q^{n-1}$.

Seja $a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^k$.

Considere a soma parcial $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Multiplicando S_n por q fica-se com a soma

$qS_n = qa_1 + qa_2 + ... + qa_n = a_2 + a_3 + ... + a_{n+1}$.

Subtraindo estas duas somas,

$S_n - qS_n = (a_1 + a_2 + ... + a_n) - (a_2 + a_3 + ... + a_{n+1}) = a_1 + (a_2 - a_2) + ... + (a_n - a_n) - a_{n+1}$

$(1-q)S_n = a_1 - a_{n+1}) = a_1 - a_1 q^n = a_1(1-q^n) \Rightarrow S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$, para $q \neq 1$.

Se $|q| < 1$, quando $n \to \infty$, então $q^n \to 0$, logo $S_n \to a_1 \dfrac{1-0}{1-q} = \dfrac{a_1}{1-q}$.

E se $|q| \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} q^n \neq 0$, logo pelo corolário 3.0.8, a série diverge.

ii) (Guidorizzi, 1991) Critério da comparação: Sejam as séries de termos positivos $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ e $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ...$ com $a_n \leq b_n$:

* Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$, então $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$, ou seja, divergem;

* Se $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, então $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ também converge.

Exemplo 3.0.10. *Mostre que a série harmônica* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente. E que a série dos quadrados dos números harmônicos* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente.*

Solução:

Inicialmente, $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right)$

Considere a sequência $(b_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, ...\right)$ *note que cada termo satisfaz* $b_n < \frac{1}{n}$.

E ainda a série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+... = \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+... =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \text{ diverge!}$$

Logo, pelo critério da comparação $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{n}+...$ *também diverge.*

Agora tome

$$(c_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}, \text{se } n > 1 \\ 1, \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Então

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_n = 1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2, \text{ série convergente!}$$

Mas $c_n = \frac{1}{n^2-n} > \frac{1}{n^2}$*, logo, pelo critério da comparação,* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}$ *também converge.*

De maneira geral, as p-séries $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}\right)$ converge, se e somente se, $p > 1$:

* $p > 1$, então $\frac{1}{n^p} < \frac{1}{n}$ e a série converge.

* $0 < p < 1$, então $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$ e a série diverge.

iii) Critério da razão: Seja a série $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ se existe $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, então, quando:

$L < 1 \Rightarrow$ convergência absoluta,
$L > 1 \Rightarrow$ não convergência,
$L = 1 \Rightarrow$ não diz nada.

Prova: Inicialmente suponha que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$.

Uma sequência (a_n) tem o limite L, se para todo $\varepsilon > 0$, existe um número $N > 0$, tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo inteiro $n > N$ e escreve-se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Escolha M tal que $L < M < 1$. Existe $N > 0$ tal que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < M$ para todo $n > N$. Então, pode-se escrever as seguintes desigualdades

$|a_{N+1}| < |a_N|M$

$|a_{N+2}| < |a_{N+1}|M < |a_N|M^2$

$|a_{N+3}| < |a_{N+2}|M < |a_{N+1}|M^2 < |a_N|M^3$
...

Note que os termos do lado direito de cada desigualdade estão em progressão geométrica.

A soma da progressão geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} |a_N|M^k = |a_N|M + |a_N|M^2 + |a_N|M^3 + ... + |a_N|M^n + ...$ converge já que $M < 1$. Então, pelo critério da comparação,

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + ... + |a_{N+n}| + ...$ também converge.

Logo, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$ também é convergente, já que retirar um número finito de termos $(n = N-1)$ não afeta a convergência.

De modo análogo verifica-se que quando $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ a série diverge.

E quando $L = 1$ nada pode-se dizer, vide o exemplo anterior das p-séries que em $\sum \frac{1}{n}$ diverge e em $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, e em ambos os casos, pelo critério da comparação,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2+2n+1}}{\frac{1}{n^2}}\right| = 1$$

Na obra 'Várias Faces da Matemática', Ávila (2007), relata a série de Suiseth[2] $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}\right)$:

"Suiseth achou o valor 2 para a soma por meio de um longo e complicado argumento verbal. Mais tarde Oresme[3] deu uma explicação geométrica bastante interessante para a soma da série. Observe que essa soma é igual à área da figura formada com uma infinidade de retângulos verticais, como ilustra a Figura 3.1. O raciocínio de Suiseth, combinado com a interpretação geométrica de Oresme, se traduz simplesmente no seguinte: a soma das áreas desses retângulos verticais é igual à soma das áreas dos retângulos horizontais da Figura 3.2. [...] A soma das áreas dos retângulos da Figura 3.2 é agora dado pela soma da série geométrica

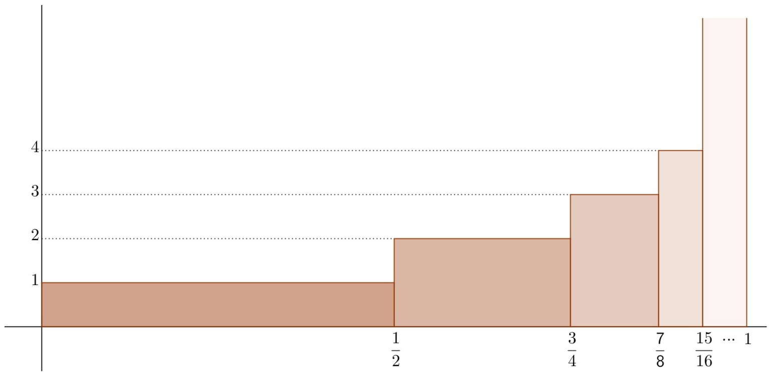

Figura 3.1 soma dos retângulos verticais.

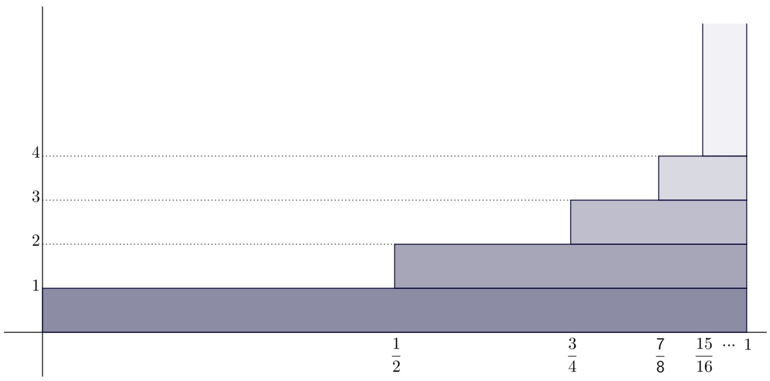

Figura 3.2 soma dos retângulos horizontais.

[2]Richard Swineshead (ou Suiseth) foi um matemático inglês que fazia parte do grupo Oxford Calculators of Merton College entre 1344 e 1355. Este grupo voltou a ter destaque nos estudos das séries infinitas 1700 anos depois de Arquimedes e a quadratura da parabóla.

[3]Nicole Oresme (1320-1382) filosófo francês e bispo de Lisieux. Mantinha contato com o grupo de pesquisadores de Oxford e contribuiu na investigação de várias das séries surgidas e estudadas na época.

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Isso permite obter a soma da série original, pois sabe-se somar os termos de uma série geométrica pela fórmula $S = \dfrac{1}{1-r}$ (neste caso $r = \dfrac{1}{2}$) que dá pra essa última série o valor 2."

Exemplo 3.0.11. *Somando a série de Suiseth* $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + ... + \dfrac{n}{2^n} + ...$

Solução:
Inicialmente nota-se que é uma série de convergência absoluta:

Pelo critério da razão,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{2n} \right| = \frac{1}{2} < 1.$$

Então,

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{2^k}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{k-1}{2^k} \right)$$

Estes limites existem, e como o limite da soma é a soma dos limites, fica-se com

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^k}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} S$$

$$S = 1 + \frac{S}{2} \Rightarrow S - \frac{S}{2} = 1 \Rightarrow S = 2.$$

3.1 Convergência das somas infinitas telescópicas

No Matemática e Natureza, Janos (2010), mostra um exemplo do uso das somas telescópicas através dos números triangulares:

"Números triangulares (Figura 3.3) são aqueles que correspondem às linhas de objetos colocados como em um jogo de boliche, isto é, na forma $\dfrac{k(k+1)}{2}$. A série triangular é a soma dos inversos destes números

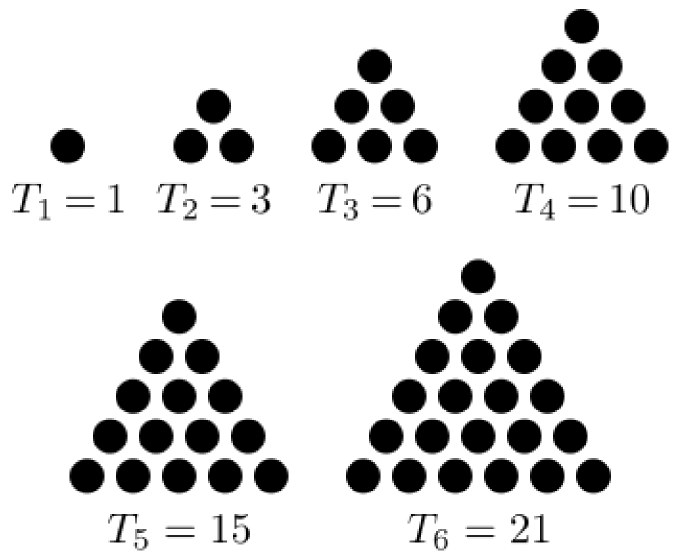

Figura 3.3 Números triangulares.

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + ..."$$

Adiante, Janos, explica como Leibniz[4] fez o cálculo desta soma:

"Leibniz, primeiro, dividiu todos os termos por 2

$\dfrac{S}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{30} + ...$

Depois, genialmente, ele notou o seguinte padrão,

[4] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) foi um categórico matemático, físico e filósofo alemão.

1º termo = $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$

2º termo = $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

3º termo = $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

4º termo = $\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
...

Portanto

$$\frac{S}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + ...$$
$$\frac{S}{2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - ... = 1$$
$$S = 2.\text{''}$$

Nota-se então que Leibniz, utiliza a propriedade telescópica dos somatórios para realizar o cálculo. É percebido que a série dos números triangulares é de convergência absoluta. Mas, como se deve proceder na análise da convergência de uma série telescópica?

Bem, considerando a soma telescópica, então $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$

Na série telescópica tem-se,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Logo, na série triangular,

$$\frac{2}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)} = \frac{(A+B)k+A}{k(k+1)} \Rightarrow A = 2 \text{ e } B = -2.$$

Então, $\frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}$. Logo, $a_n = \frac{2}{n}$ e resulta que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}\right) = \frac{2}{1} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 2 - 0 = 2.$$

CAPÍTULO 4

Proposta Pedagógica

O objetivo deste trabalho é mostrar meios que possam facilitar o contato dos alunos com diversos tipos de somas, tais como telescópicas, com números binomiais, polinomiais, com potências fatoriais negativas e somas infinitas. Em particular, as somas polinomiais, que é calculada hoje em dia, quando vista no conteúdo do ensino médio, de modo recursivo, através dos binômios de Newton $(x-1)^n$.

Este trabalho traz uma alternativa para que o aluno possa, com alguns conhecimentos prévios, calcular de maneira mais rápida e direta somas polinomais.

É recomendável que a aplicação desta prática seja realizada em turmas do 2º ano do ensino médio já familiarizadas com os conteúdos: progressões aritmética e geométrica, sequências numéricas, binômio de Newton e o triângulo de Tartaglia-Pascal (relação de Stifel).

O uso de recurso visual, como slides ou projetor, é estimulante, principalmente que pode-se mostrar o compartamento de algumas sequência com softwares específicos. Porém, os bons e velhos pincel e quadro; lápis e papel satisfazem um bom rendimento didático.

Previsto o uso de uma semana, com 5 aulas, para detalhamento e realização de exercícios propostos e avaliativos.

Antes de iniciar a sequência didática, é fundamental que o professor sonde os conhecimentos prévios necessários do aluno, para que, tendo certeza do domínio destes, o aproveitamento seja o melhor possível. Caso seja notada dificuldades prévias é necessário uma reciclagem dos conceitos de progressões, sequências e binômios, e neste caso, só a partir daí contabilizar o tempo previsto.

O processo inicia com a definição de somatórios ($\sum$) e suas propriedades, dando ênfase a propriedade telescópica e aplicações. Tempo previsto de duas aulas.

Em seguida, utiliza-se a propriedade telescópica na soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Tartaglia-Pascal e após, inicia-se o processo para calcular somas polinomais.

Neste momento, vale mostrar o método recursivo, afim de fazer com que o aluno analise e compare as duas alternativas. A soma de polinômios do primeiro grau pode ser interpretado como a soma dos termos de uma progressão aritmética e não merece, neste momento, demasiada atenção. Começa-se então pela soma de polinômios do segundo grau. Como exemplo introdutório, a soma dos quadrados de 1 a n, com $n \in \mathbb{N}$.

Através do teorema 2.2.2 o professor mostra que todo polinômio f de grau menor ou igual a d, em n pode ser escrito, de forma única, como a soma de binomiais em n. E desta maneira, aplicando a soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Tartaglia-Pascal chegar a uma fórmula fechada para $\sum_{k=1}^{n} k^d$. Com a aplicação de problemas propostos, previstos duas aulas.

Na última aula prevista, faz-se necessária a realização de uma avaliação afim de diagnosticar do aluno: conhecimento e domínio do conceito e das propriedades dos somatórios; reconhecer quando pode utilizar a propriedade telescópica na resolução dos somatórios e saber aplicá-la; uso do teorema 2.2.2 no cálculo de somas poliomiais.

CAPÍTULO 5

Problemas Propostos

Problema 5.1. *(ITA) Suponha que a equação algébrica:*

$$x^{11}+\sum_{n=1}^{10} a_n x^n + a_0 = 0$$

tenha coeficientes reais $a_0, a_1, ..., a_{10}$ tais que as suas onze raízes sejam todas simples e da forma $\beta + i\gamma_n$, em que $\beta, \gamma_n \in \mathbb{R}$, e os γ_n, $n = 1,2,...,11$, formam uma progressão aritmética de razão real $\gamma \neq 0$. Considere as três afirmações abaixo e responda se cada uma delas é, respectivamente, verdadeira ou falsa, justificando sua resposta:

I. Se $\beta = 0$, então $a_0 = 0$.

II. Se $a_{10} = 0$, então $\beta = 0$.

III. Se $\beta = 0$, então $a_1 = 0$.

Problema 5.2. *(Peru/2004) O valor da soma $5\cdot\binom{n}{0}+\frac{5^2}{2}\cdot\binom{n}{1}+\frac{5^3}{3}\cdot\binom{n}{2}+...+\frac{5^{n+1}}{n+1}\cdot\binom{n}{n}$ é igual a:*

a) $\dfrac{5^{n+1}-1}{n+1}$

b) $\dfrac{6^{n+1}+1}{n+1}$

c) $\dfrac{6^{n-1}-1}{n+1}$

d) $\dfrac{6^{n+1}-1}{n+2}$

e) $\dfrac{5^{n+1}-1}{n+2}$

Problema 5.3. *(EUA/2001) Sabendo que*

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+...+\frac{2001}{1999!+2000!+2001!}+\frac{1}{2001!}$$

vale k. Então o valor de 2008k é igual a:

a) 2008

b) 1004

c) 502

d) 2009

e) 251

Problema 5.4. *(URSS) Calcule o valor das somas:*

a) $\binom{n}{0}\cos(x)+\binom{n}{1}\cos(2x)+\binom{n}{2}\cos(3x)+\ldots+\binom{n}{n}\cos((n+1)x)$

b) $\binom{n}{0}sen(x)+\binom{n}{1}sen(2x)+\binom{n}{2}sen(3x)+\ldots+\binom{n}{n}sen((n+1)x)$

Problema 5.5. *(URSS) Mostre que*

$$\cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{2n+1}\right)+\ldots+\cos\left(\frac{2n\pi}{2n+1}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Problema 5.6. *(ITA/73) A solução da equação (com n natural):* $log_u \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{2(k+1)!}\right]x=1$, *com* $u=\frac{1}{(n+2)!}$, *é:*

a) $\frac{2}{(n+1)!-1}$

b) $\frac{2}{n(n+1)!-1}$

c) $\frac{2}{(n+2)!-(n+2)}$

d) $\frac{(n+1)!-1}{2n}$

e) NDA

Problema 5.7. *(Escola Naval) O valor da soma:* $S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{k-1}{k!}$ *é igual a:*

a) 1 - $\frac{1}{k!}$

b) 1 + $\frac{1}{k!}$

c) k! - 1

d) k! + 1

e) 1

Problema 5.8. *(Peru/2005) Seja:*

$a_1 = 2$

$a_2 = 2 + \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{6}$

$a_4 = \frac{8}{3} + \frac{1}{24}$

...

O valor de $a_{100} - \sum_{n=2}^{100} \frac{1}{n!}$ *é:*

a) 5

b) 7

c) 2

d) 8

e) 10

Problema 5.9. *(ITA) Sejam* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ *números reais. A expressão* $(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)^2$ *é igual a:*

a) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 4 \sum_{j=1}^{n} a_j$

b) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \right)$

c) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \binom{n}{2} \sum_{j=1}^{n} a_j$

d) $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \right)$

e) NDA

Problema 5.10. *(SVSU 2012 Math Olympics) Encontre o valor da soma* $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$.

a) $\frac{99}{100}$

b) $\frac{1}{10100}$

c) $\frac{100}{101}$

d) $\frac{194}{100}$

e) NDA

Problema 5.11. *(Olímpiadas Colombianas de Matemática/1998) Qual é o valor da expressão* $\frac{1}{log_2 100!} + \frac{1}{log_3 100!} + \frac{1}{log_4 100!} + ... + \frac{1}{log_{100} 100!}$*?*

a) 0,01

b) 0,1

c) 1

d) 2

e) 10

Problema 5.12. *(OBM) Calcular a soma* $\sum_{k=0}^{999} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$.

Problema 5.13. *(Olímpiada Iberoamericana de Matemática - Venezuela/1992) Para cada inteiro positivo* n, a_n *é o último dígito do número 1 + 2 + 3 + ... + n. Calcular* $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1992}$.

Problema 5.14. *(Singapura/1998) Calcule:*

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

Problema 5.15. *(EUA/1992) Mostre que:*

$$\frac{1}{\cos 0\cdot\cos 1}+\frac{1}{\cos 1\cdot\cos 2}+\frac{1}{\cos 2\cdot\cos 3}+...+\frac{1}{\cos 88\cdot\cos 89}=\frac{1}{sen^2 1}.$$

5.16 Gabarito

5.1 **V V F**

5.2 **c**

5.3 **b**

5.4 a) $\mathbf{2^n}\cos^{\mathbf{n}}\frac{\alpha}{\mathbf{2}}\cos\frac{\mathbf{n+2}}{\mathbf{2}}\alpha$ b) $\mathbf{2^n}\cos^{\mathbf{n}}\frac{\alpha}{\mathbf{2}}\mathrm{sen}\frac{\mathbf{n+2}}{\mathbf{2}}\alpha$

5.6 **c**

5.7 **a**

5.8 **c**

5.9 **d**

5.10 **c**

5.11 **c**

5.12 $\mathbf{\frac{1000}{3001}}$

5.13 **6984**

5.14 $\mathbf{1-\frac{\sqrt{100}}{100}}$

Referências

[1] Antar Neto, Aref. Combinatória, Matrizes e Determinantes: 2º Grau - Noções de Matemática. Vol. 4, Fortaleza, VestSeller, 2009.

[2] Ávila, Geraldo. Várias Faces da Matemática. Tópicos para licenciatura e leitura geral. 2ª Ed, Ed. Diucher, 2007.

[3] Caminha, Antônio. Tópicos de Matemática Elementar - Vol. 1. Números Reais, SBM, 2011.

[4] Caraça, Bento de Jesus. Conceitos Fundamentais da Matemática. Ciência Aberta. Lisboa, 1951.

[5] Carvalho, Paulo Cezar; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto Cesar. A matemática no ensino médio. Vol. 2, SBM, 2011.

[6] Engel, Arthur. Problem-solving strategies. Springer, 1998.

[7] Faddeev, D.; Sominsky, I. Problems in Higher Algebra, Moscou: Ed. MIR, 1968.

[8] Hefez, Abramo. Matemática Discreta. PROFMAT, SBM, 2012.

[9] Janos, Michel. Matemática e Natureza. 1ª Ed. Livraria da Física, 2010.

[10] Larson, Loren C. Problem-solving through problems. New York: Springer, 1983.

[11] Lehoczky, Sandor, and Richard Rusczyk. The Art of Problem Solving. Greater Testing Concepts, 1993.

[12] Lidski, V. B.; Ovsianikov, L. V.; Tulaikov, A. N.; Shabunin M. I. Problemas de Matematicas Elementales, Moscou: Ed. MIR, 1972.

[13] Miranda, Marcílio. Problemas selecionados de matemática. Vol. 1, VestSeller, 2010.

[14] Shklarsky, D.O., Chentzov, N.N., Yaglom, I.M. The USSR Olympiad Problem Book, New York, Dover Publications, Inc., 1994.

[15] Guidorizzi, Hamilton Luiz. Matemática Universitária. Nº 13, 1991.
http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n13/n13_Artigo06.pdf em 18/07/2013.

[16] Massago, Sadao. Sequências e séries.
http://www.dm.ufscar.br/ sadao/download/?file=student/sequencias-e-series.pdf em 18/07/2013.

[17] Matemática Discreta. Unidade 4 - Somatórios e Binômio de Newton. PROFMAT, 2011.
http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/Arquivos/MaterialSemana2011-04-11-17/MA12%20U4.pdf em 18/07/2013.

[18] Matos, Ana. Séries Numéricas. 2000.
http://ltodi.est.ips.pt/amatII/documentos/SERIESN/sn18100.pdf em 18/07/2013.

[19] Possi Jr, Rogério. Somas trigonométricas: de Prostaférese à fórmula de Euler. Eureka! 33. SBM.
http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/Eureka33.doc em 18/07/2013.

[20] Renji. Dados de Deus - Apostilas de somatórios.
http://dadosdedeus.blogspot.com.br/2011/06/apostilas-completas-de-somatorios.html?m=1 em 18/07/2013.

[21] Shchepin E. Telescopic Sums. http://libgen.info/view.php?id=139620 em 18/07/2013.

[22] Schneider, Eduardo. Notas em teoria elementar de números.
http://minerva.ufpel.edu.br/ eduardo.schneider/ufpel/aritmetica/aritmetica_parte1.pdf em 18/07/2013.

Este volume foi tipografado em LaTeX na classe UFPEThesis (www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis).