



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

## **Códigos Corretores de Erros e Empacotamentos de Discos**

Darlei dos Santos Miranda

Dissertação de Mestrado

Recife-PE  
13 de agosto de 2013



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
Departamento de Matemática

Darlei dos Santos Miranda

**Códigos Corretores de Erros  
e Empacotamentos de Discos**

*Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Orientador: *Prof. Dr. Adriano Regis Rodrigues*

Recife-PE  
13 de agosto de 2013

MIRANDA, Darlei dos Santos Miranda

## **Códigos corretores de erros e empacotamentos de discos**

43 páginas

Trabalho de Conclusão(Mestrado Profissional) - Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

1. Códigos corretores de erros
2. Código de Hamming
3. Diagrama de Voronoi e empacotamento de discos
4. Densidade de um empacotamento

Universidade Federal Rural de Pernambuco.  
Departamento de Matemática.

## **Comissão Julgadora**

---

Prof. Dr. Adriano Regis Rodrigues - DM / UFRPE  
Presidente (orientador)

---

Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão - DMAT / UFPE  
Membro

---

Profa. Dra. Isis Gabriella de Arruda Quinteiro Silva - DM / UFRPE  
Membro

---

Profa. Dra. Jeane Cecília Bezerra de Melo - DEINFO / UFRPE  
Membro

# Apresentação

Motivar o estudo da Matemática tem seus desafios. Frequentemente os professores dessa disciplina no ensino básico (Fundamental e Médio) são questionados pelos alunos sobre a utilidade prática de certos conteúdos. Muitas vezes, não basta dizer que a matemática está em tudo, que é o exercício do raciocínio e que a racionalidade nos rodeia. É preciso lançar mão de exemplos “concretos” da matemática no dia-a-dia.

Um bom exemplo é mostrado nesse trabalho: a matemática que embasa a transmissão de informações digitais. Mais precisamente, trata-se dos *Códigos Corretores de Erros* e dos *empacotamentos de discos*, estudados aqui a partir dos conteúdos curriculares do ensino básico.

O objetivo é mostrar, utilizando algo presente e útil no cotidiano, que as contribuições práticas da Matemática normalmente dependem de uma teoria já consolidada e que esta pode, no princípio, ter sido estudada sem que vislumbassem alguma aplicação.

Após a apresentação da teoria dos códigos corretores de erros passamos ao estudo dos empacotamentos de discos, encontrando o empacotamento mais “compacto” possível no plano. Esa parte do trabalho é um exemplo do estudo da Matemática por ela mesma, representando como o senso estético e a curiosidade dos matemáticos impulsionam o avanço do conhecimento e como a presença de padrões indica, muitas vezes, uma teoria matemática. Para tratar dos empacotamentos, foram utilizados conceitos geométricos e algébricos vistos ao longo do ensino básico.

Não há um aprofundamento demasiado nos temas tratados, uma vez que esse não é o objetivo do trabalho. Mas a principal pretensão é a de contribuir, devendo o presente estudo ser encarado como incentivador e motivador das atividades em sala de aula. Creio ser interessante para os alunos do Ensino Médio conhecer o assunto aqui abordado, uma vez que eu mesmo tomei contato com ele apenas em estudos paralelos durante a graduação, e isso, na época, me fez pensar “por que não me ensinaram isso antes?”.



*Dedico este trabalho a todos que gostam de aprender e,  
principalmente, aos que gostam de ensinar.*





# Agradecimentos

A Deus, que se mostra em todas as coisas. À família, aos amigos, chefes, alunos e professores por ensinamentos edificantes nas mais variadas situações da caminhada. Ao orientador, Prof. Dr. Adriano Regis Rodrigues, pela condução, compreensão e apoio. À Prof. Dra. Simone Moraes, da UFV, pela dedicação e profissionalismo durante os estudos de iniciação científica durante a graduação. Aos professores e coordenadores do PROFMAT, pela atenção dispensada à turma durante todo o curso. Aos colegas de ProfMat e, particularmente, aos amigos Pedro Júnior e José Ribamar, companheiros de estudo e de trabalho nessa jornada.



*Estudar para aprender.  
Aprender para trabalhar.  
Trabalhar para servir sempre mais.*  
— EMMANUEL



# Resumo

Códigos corretores de erros estão presentes nas transmissões de informações digitais, desde a leitura de dados em um CD até a transmissão de imagens por satélites. Baseiam-se fortemente na álgebra e são excelente exemplo da aplicação da Matemática. Objetivam assegurar a integridade dos dados nas transmissões digitais e consistem, basicamente, numa forma organizada de acrescentar redundâncias em uma informação a ser transmitida, de modo a permitir, na recepção, detectar e corrigir erros. O acréscimo se dá com base em produto de matrizes e resolução de sistemas lineares, bem como a detecção e decodificação. Um exemplo é o código de Hamming binário  $Ham_3$ . Códigos binários geram empacotamentos de esferas, que, no plano, chamam-se empacotamentos de discos (distribuição de círculos disjuntos no plano). Um empacotamento pode ser em reticulado (estrutura de pontos no plano que pode ser gerada por um triângulo) ou não. A densidade do empacotamento refere-se à área relativa que os discos ocupam em certa região. A maior densidade possível no plano é obtida no empacotamento cujos discos estão centrados num reticulado gerado por um triângulo equilátero.

**Palavras-chave:** códigos corretores de erros, código de Hamming, empacotamento de discos, voronoi, densidade, otimização.



# Abstract

Error correcting codes are present in the transmission of digital information, from reading data on a CD to image transmission via satellites. Are based heavily on algebra and are excellent example of the application of mathematics. Aim to ensure data integrity in digital broadcasts and consist basically in an organized way to add redundancy on information to be transmitted, to allow, at the reception, detect and correct errors. The addition is done with the product of matrices and solving linear systems, as well as the detection and decoding. An example is the binary Hamming code  $Ham_3$ . Binary codes generate sphere packings, which, in the plane, are called circle packings distribution of disjoint circles in the plane. A circle packing can be on a lattice structure that can be generated by a triangle, or not. The packing density refers to the relative area of the disks occupy a certain area. The highest possible density in the plane is obtained in the hexagonal packing in which the circles are centered in a lattice generated by an equilateral triangle.

**Keywords:** error correcting codes, Hamming code, sphere packing, Voronoi, density, optimization.





# Sumário

<b>1</b>	<b>Conceitos e Fundamentações</b>	<b>3</b>
1.1	Transmissão de informações digitais	4
1.1.1	Códigos corretores de erros	6
1.1.2	Sistema de numeração binário e conjunto $\mathbb{Z}_2$	9
1.1.3	Bits e bytes	10
1.1.4	Princípio de funcionamento dos discos ópticos	11
1.1.5	Código de Hamming binário de redundância 3 - $Ham_3$	12
1.2	Geometria euclidiana	17
1.2.1	Diagrama de Voronoi	17
1.2.2	Códigos e empacotamentos de discos	20
1.2.3	Densidade máxima para um empacotamento de discos	24
<b>2</b>	<b>Sequência Didática</b>	<b>33</b>
2.1	Considerações iniciais	34
2.2	Aplicando a Sequência	36
2.2.1	Aulas 1 e 2 - Transmissão de informações digitais	36
2.2.2	Aulas 3 e 4 - Código binário $Ham_3$	38
2.2.3	Aulas 5 e 6 - Empacotamentos de discos	39
<b>3</b>	<b>Conclusão</b>	<b>41</b>



# Lista de Figuras

1.1	Sistema de comunicação digital	4
1.2	Código perfeito 1-corretor de erro	7
1.3	Sistema binário	10
1.4	Funcionamento dos CD's e DVD's	11
1.5	Codificação	13
1.6	Matriz geradora	14
1.7	Decodificação	15
1.8	Diagrama de Voronoi e antenas de transmissão	17
1.9	Diagrama de Voronoi - passo 1	17
1.10	Diagrama de Voronoi - passo 2	18
1.11	Diagrama de Voronoi - passo 3	19
1.12	Diagrama de Voronoi - exemplos	19
1.13	Empacotamentos de discos	20
1.14	Empacotamento em reticulado gerado por um triângulo	20
1.15	Densidade - definição 1	21
1.16	Densidade máxima no espaço	22
1.17	Reticulado e código binário	22
1.18	Empacotamento hexagonal	23
1.19	Célula de Voronoi e a densidade	23
1.20	Interseção entre um empacotamento e um triângulo	24
1.21	Densidade - definição 2	24
1.22	Triângulo máximo em um empacotamento ótimo	25
1.23	Densidade máxima no plano	27
1.24	Limitante para a densidade	27
1.25	Empacotamento ótimo na natureza	31



# Introdução

Quando o professor de matemática mostra aplicações da sua disciplina ela se torna mais interessante e, em consequência, os alunos aprendem mais (vide [1]). O objetivo deste trabalho é apresentar uma sequência didática abordando uma dessas aplicações: a matemática envolvida na transmissão de informações digitais.

Veremos conceitos básicos sobre códigos corretores de erros e empacotamentos de discos, o que inclui o sistema binário de numeração, as matrizes, os sistemas lineares, e a geometria plana.

A sequência didática aqui proposta destina-se a alunos que estejam cursando, no mínimo, o segundo ano do ensino médio, uma vez que já terão visto o conteúdo de matrizes e sistemas lineares. Mas a parte de empacotamento de discos pode ser aplicada aos alunos do nono ano em diante por demandar basicamente conceitos de geometria plana.

O capítulo 1 traz os fundamentos teóricos necessários ao professor que aplicará a sequência. Na primeira parte apresentamos as etapas da codificação para transmissão de informações, mostrando o papel dos códigos corretores de erros nesse processo. Vemos então, como são gravados os dados digitais (bits) nos discos ópticos, a utilidade do sistema binário, e, finalmente, o código binário  $Ham_3$ .

Na segunda parte, tratamos da geometria relacionada aos códigos corretores de erros, exemplificando como um código binário dá origem a um estrutura chamada reticulado. Mostra-se a obtenção de um reticulado a partir de um triângulo e é apresentado o diagrama de Voronoi, com as etapas de sua construção. Em seguida, são definidos os empacotamentos de discos e passa-se a analisar a sua densidade. A densidade, então, é definida de forma adequada para que se possa dar uma prova sobre qual seria o empacotamento ótimo no plano.

No capítulo 2, é apresentada uma proposta de roteiro para ministrar os conteúdos abordados no capítulo 1, contendo indicações metodológicas ao professor e atividades para os alunos.

Finalmente, no capítulo 3 é feita a conclusão e a indicação de trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 1

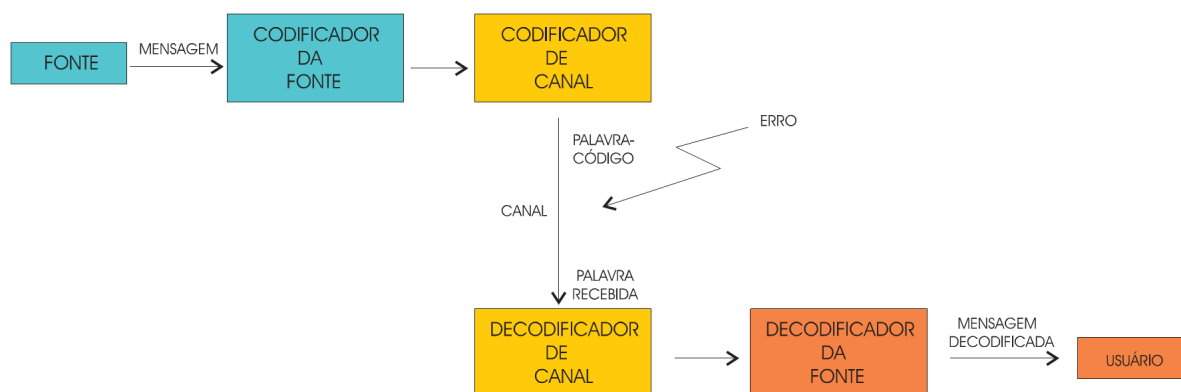
# Conceitos e Fundamentações

Este capítulo contém o estudo direcionado de parte da matemática utilizada nas comunicações digitais. Nele são abordados os códigos corretores de erros e, particularmente, o código de Hammig binário  $Ham_3$ , bem como o diagrama de Voronoi e os empacotamentos de discos, proporcionando ao professor as ferramentas necessárias para compreender o assunto e repassá-lo aos seus alunos.

## 1.1 Transmissão de informações digitais

As comunicações digitais têm na Matemática as bases de funcionamento. Veremos como esta ciência se aplica na solução de um dos problemas mais básicos quando se trata de telecomunicações e teoria da informação: o da integridade dos dados na transmissão informações digitais.

Para começarmos, observe o esquema básico de um sistema de comunicação digital, na figura a seguir.



**Figura 1.1** Sistema de comunicação digital

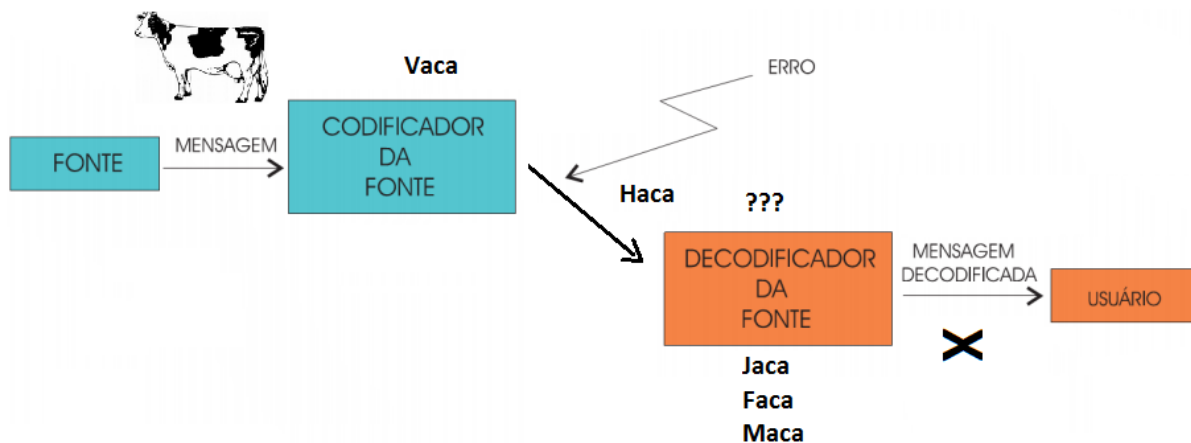
Na transmissão digital de informações pode se dizer que é normal a ocorrência de erros, devido a fatores como interferências eletromagnéticas, envelhecimento de componentes, curto-circuito etc. Esses erros acabam afetando as mensagens fazendo com que, por exemplo, um “0” seja enviado e, na transmissão, acabe transformado em “1”, chegando ao receptor uma informação diferente da que foi enviada.

Para contornar esse problema são utilizados códigos corretores de erros.

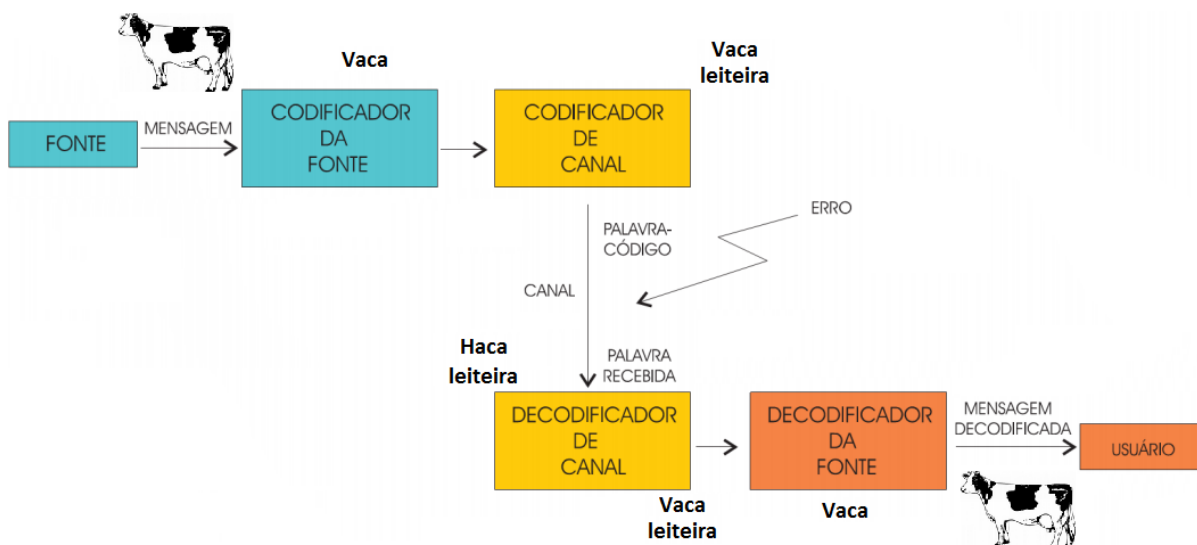
Para entender o que são esses códigos, façamos a analogia com um código muito conhecido: o nosso idioma (baseado em [3], p. 4). Usamos um alfabeto de 23 letras e as palavras são sequências de letras. Observe que nem toda sequência é palavra da língua portuguesa. Suponha que recebemos uma mensagem com a palavra TRABZLHO. Imediatamente percebemos que ocorreu um erro, pois esta não é uma palavra da língua. Mas descobrimos a palavra correta ao verificar que a palavra “mais próxima” de nossa língua é TRABALHO.



Por outro lado, se recebermos a palavra HACA, percebemos que há erro(s) mas a correção segura é impossível pois há muitas palavras da língua igualmente “próximas” daquela como, por exemplo, FACA, VACA, JACA etc.



Agora, se a mensagem que chega é HACA LEITEIRA, o acréscimo de informação “LEITEIRA” nos permite corrigir o erro: VACA LEITEIRA.



Essa analogia nos possibilita adentrar em alguns conceitos da teoria da codificação e correção de erros.

### 1.1.1 Códigos corretores de erros

Um código corretor de erros consiste em um modo organizado de acrescentar algum dado adicional (redundância) a cada informação que se queira transmitir ou armazenar, de modo a permitir, ao recuperar a informação, detectar e corrigir erros. O matemático norte-americano Richard Hamming foi pioneiro neste campo em 1940 e inventou o primeiro código de correção de erros, em 1950: o código de Hamming  $Ham_3$  (ver [4]).

**Definição 1.1** (Código binário). *Um código binário  $C$  de comprimento  $k$  é um subconjunto de  $k$ -uplas em que as coordenadas são apenas “0’s” e “1’s”.*

**Definição 1.2** (Palavra-código). *Uma palavra-código é um elemento de um código  $C$ .*

Vamos a um exemplo para melhor entendimento.

Suponha que enviaremos via rádio as mensagens SIM e NÃO. Podemos codificar essas mensagens (código da fonte) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{SIM} &\mapsto 1 \\ \text{NÃO} &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Na transmissão desses sinais podem ocorrer interferências de tal modo que o “0”, por exemplo, pode ser recebido como “1”, ou seja, seria recebida a mensagem SIM ao invés da mensagem NÃO.

Para evitar isso, vamos acrescentar redundâncias a fim de detectar e corrigir possíveis erros, o que pode ser feito da seguinte forma (código do canal):

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 000 \\ 1 &\mapsto 111 \end{aligned}$$

Daí, temos as seguintes informações:

- Código da fonte:  $\{0, 1\}$ ;
- Código de canal:  $\{000, 111\}$  e
- Palavras-código que podem ser recebidas:  $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ .

Agora, imagine que foi transmitida a mensagem 111 (SIM) e ocorreu um erro, sendo recebida a palavra 101. A pergunta principal é:

***Como detectar e corrigir o erro?***

**Definição 1.3** (Distância de Hamming). *A distância de Hamming entre duas palavras-código é a quantidade de posições, nessas palavras, em que o dígito de uma é diferente do da outra.*

Exemplo: comparando “111” e “100”, vemos que há dígitos diferentes em duas posições (a segunda e a terceira) e, assim, a distância de Hamming entre essas palavras-código é  $d_H(111, 100) = 2$ .

Distribuindo os comandos recebíveis “em torno” das palavras do código de canal (ver figura 1.2), temos então dois “discos”, cada um centralizado numa palavra do código, em que cada disco é formado pelas palavras que diferem em apenas um dígito do “centro”.

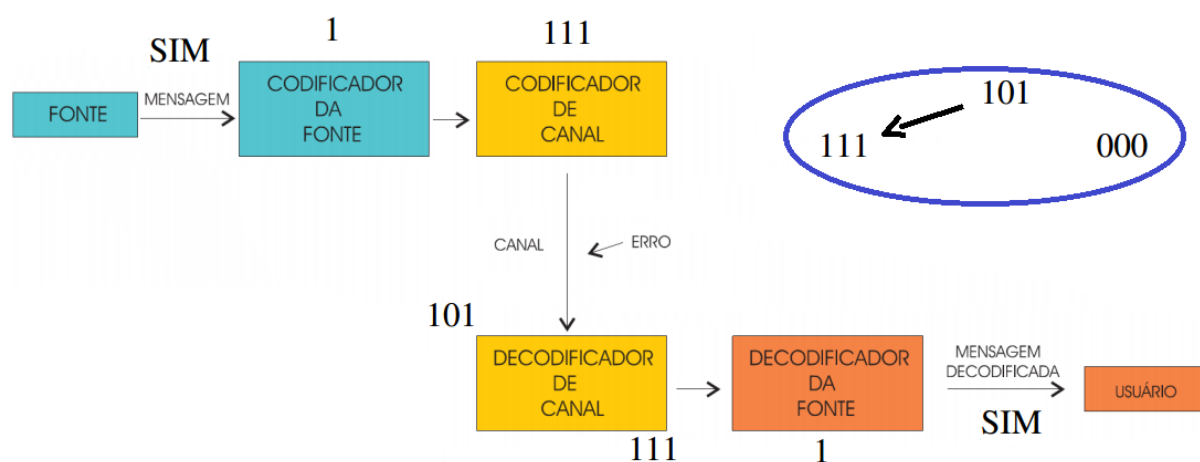
Podemos, então, falar em “discos de raio 1 (um)”, considerando a distância de Hamming, e visualizar que o código que definimos é perfeito para se corrigir até 1(um) erro:



**Figura 1.2** Código perfeito 1-corretor de erro

Respondendo agora à primeira parte da pergunta anterior, temos então a detecção do erro, que ocorre quando comparamos a palavra 101 com as palavras do código e vemos que esta não lhe pertence.

Na próxima etapa, que é a correção do erro propriamente dita, vemos que a palavra do código mais “próxima” a 101 é a palavra 111, sendo esta precisamente a palavra transmitida.



### **Observações sobre o canal**

Como exemplos de canais de comunicação (fig. 1.1) temos a transmissão via rádio-frequência, a digitação de uma mensagem eletrônica, a leitura via laser de um CD, a leitura de dados em discos rígidos e memórias eletrônicas etc. Conhecido previamente o canal, sabe-se estatisticamente a quantidade de erros que podem ocorrer na transmissão e, assim, utiliza-se um código com capacidade de correção adequada.

O código “SIM/NÃO”, por exemplo, é sempre capaz de corrigir 1 (um) erro, o que representa 1/3 (um terço) dos dígitos de cada mensagem transmitida. Isso quer dizer que para um canal cuja probabilidade de ocorrência de erros seja, por exemplo, de 20 por cento, esse código

é adequado, mas para um canal com 60 por cento de probabilidade de erros esse código não serve. Aliás, nesse último caso temos uma probabilidade de ocorrência de erros nada razoável - 60 por cento - estando o problema com o canal de transmissão e não com o código.

### *Principal problema da teoria de códigos*

O exemplo anterior nos mostra o que ocorre em todos os códigos corretores de erros: a capacidade de correção está ligada ao quão distantes as palavras-código estão umas das outras.

Na codificação, o objetivo é a construção de códigos que possuam muitas palavras, permitindo transmitir muitas informações, e que aquelas sejam distantes umas das outras, para que o código tenha boa capacidade de correção. Mas essas características são conflitantes entre si, uma vez que, fixado o comprimento do código, quanto mais distantes umas das outras as palavras estão, menor é o número de palavras do código.

A obtenção de códigos eficientes, no sentido da melhor relação entre comprimento, número de palavras e capacidade de correção (distância entre as palavras) é o **principal problema da teoria de códigos** (adaptação de [3], p. 13).

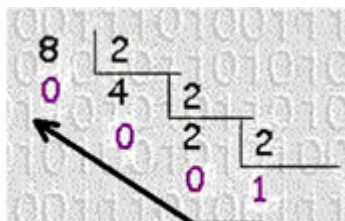
### 1.1.2 Sistema de numeração binário e conjunto $\mathbb{Z}_2$

O sistema binário ou de base 2 é um sistema de numeração posicional em que todas as quantidades são representadas utilizando apenas dois símbolos, quais sejam, os algarismos “0” e “1”.

A conversão para a notação decimal de um número escrito na notação binária é feita com base no valor posicional de cada dígito:

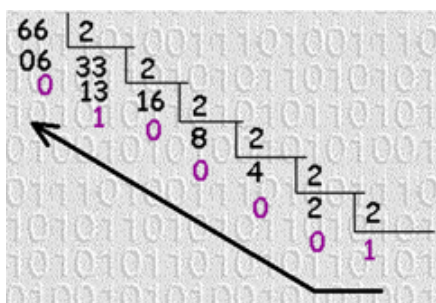
$$\begin{aligned} 10011010_{(2)} &= 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= 128 + 0 + 0 + 16 + 8 + 0 + 2 + 0 \\ &= 154_{(10)} \end{aligned}$$

Já a conversão da notação decimal em notação binária é feita através de divisões sucessivas por 2 (dois) até que o último quociente seja 1 (um). A representação binária é obtida tomando-se esse 1 (um) e os restos conforme os exemplos a seguir:



$$8_{(10)} = 1000_{(2)}$$

$$(8 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0)$$



$$66_{(10)} = 1000010_{(2)}$$

$$(66 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0)$$

#### Conjunto $\mathbb{Z}_2$

Os dígitos “0” e “1” nos códigos corretores de erros são considerados como elementos do conjunto  $\mathbb{Z}_2$  (obtido a partir da relação de congruência módulo 2) com as operações de soma e produto da tabela abaixo, cujas propriedades são análogas às dos números reais (ambos são exemplos dos chamados “corpos”).

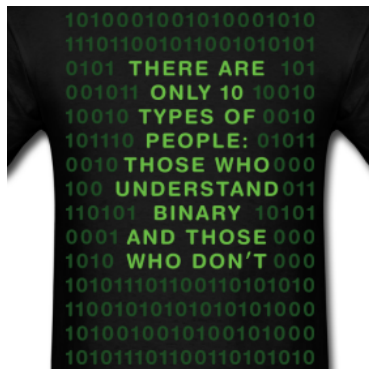
<b>+</b>	0	1
0	0	1
1	1	0

<b>×</b>	0	1
0	0	0
1	0	1

### 1.1.3 Bits e bytes

Os computadores se utilizam do sistema binário para armazenar arquivos de texto, com letras, números, símbolos e algumas estruturas fundamentais. Eles trabalham internamente com dois níveis de tensão (aceso, apagado), motivo pelo qual o seu sistema de numeração natural é o sistema binário.

Em computação, chama-se um dígito binário (0 ou 1) de bit, que vem do inglês Binary Digit. Um agrupamento de 8 bits corresponde a um byte (Binary Term).



**Figura 1.3** “Há apenas dois tipos de pessoas: as que entendem o sistema binário, e as que não entendem.”

Para trabalhar com texto, os computadores, equipamentos de comunicação e outros dispositivos se utilizam de uma linguagem chamada ASCII (*American Standard Code for Information Interchange*, ou “Código Padrão Americano para Troca de Informação”), desenvolvida a partir de 1960. As palavras-código na tabela ASCII possuem 8 dígitos, o que corresponde a um byte (8 bits), sendo que o oitavo bit serve como um bit de paridade, utilizado para detecção de erro.

$$1 \text{ byte} = 8 \text{ bits}$$

Com os sete bits disponíveis obtém-se 128 sequências possíveis ( $2^7 = 128$ ), que correspondem à representação binária dos números 0 a 127, associados a 128 caracteres. As primeiras 33 palavras-código, ou seja, os números de 0 a 32, são não-imprimíveis, e só dizem ao computador coisas do tipo “fim de linha”, ou “tabulação horizontal”, enquanto os números de 33 até 126 representam os algarismos, letras e símbolos como aspas, parênteses e acentos. O número 127 é usado para o “delete”.

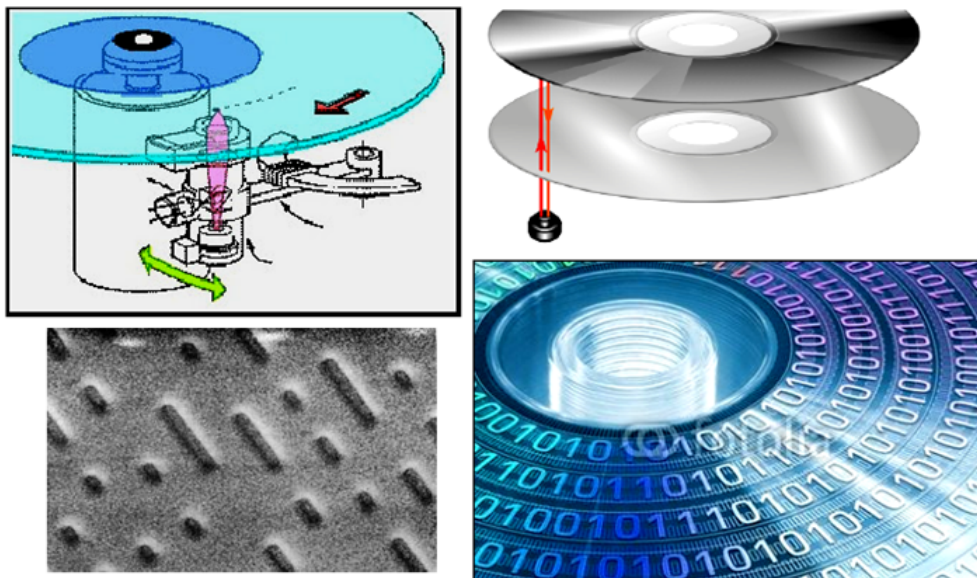
Por exemplo, o número 81 é representado na forma binária por 01010001, codificação da letra maiúscula “Q”.

Uma palavra de quatro letras dispõe de quatro bytes no disco rígido, um para cada letra. Por exemplo, a palavra gato é escrita da seguinte forma:

palavra	gato			
letra	g	a	t	o
número	103	97	116	111
binário	01100111	01100001	01110100	01101111

#### 1.1.4 Princípio de funcionamento dos discos ópticos

Os CD's , DVD's e os discos blu-ray são discos ópticos. Os dados nesses discos são lidos utilizando-se um laser, que passa pela superfície do disco buscando furos ou não. Quando o laser encontra um furo, conta um zero. Quando não o encontra, conta um dígito um. A sequência de zeros e uns lida pelo aparelho gera a informação.



**Figura 1.4** 0's e 1's nos discos ópticos

### 1.1.5 Código de Hamming binário de redundância 3 - $Ham_3$

No final dos anos 1940, Richard Hamming trabalhava na Bell Laboratories e constatou a necessidade de correção de erros em computadores. Ele percebeu que um modelo mais sofisticado de verificação de paridade permitia a correção de erros isolados, juntamente com a detecção de erros duplos. Os códigos que Hamming inventou marcaram o início da teoria de codificação (mais detalhes em [4]).

O código de Hamming binário de redundância  $r$ , que denotaremos por  $Ham_r$ , possui comprimento  $2^r - 1$  e é definido por uma matriz, chamada “matriz teste de paridade”, cujas colunas consistem na representação binária dos números 1 a  $2^r - 1$ , em uma ordem qualquer.

Para facilitar a decodificação, trabalha-se com a matriz cujas colunas contém a representação binária dos números 1 a  $2^r - 1$ , ordenados de forma crescente.

Nesta seção, vamos tratar do código  $Ham_3$ , que tem comprimento 7 ( $= 2^3 - 1$ ) e matriz de paridade:

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

A partir de agora vamos associar as palavras de um código binário com matrizes-linha sobre  $\mathbb{Z}_2$ .

O código binário  $Ham_3$  é definido como o conjunto das palavras-código que são soluções do sistema linear obtido do produto:

$$H_3 \cdot [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7]^T = [0] \ , \ x_i \in \{0,1\} \ , \ i = 1, \dots, 7.$$

O que nos dá o sistema

$$\begin{cases} x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Para resolver o sistema, acrescentamos termos adequados em cada lado das igualdades:

$$\begin{cases} x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + \mathbf{x_5} + \mathbf{x_6} + \mathbf{x_7} = 0 + \mathbf{x_5} + \mathbf{x_6} + \mathbf{x_7} \\ x_2 + x_3 + x_6 + x_7 + \mathbf{x_3} + \mathbf{x_6} + \mathbf{x_7} = 0 + \mathbf{x_3} + \mathbf{x_6} + \mathbf{x_7} \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + \mathbf{x_3} + \mathbf{x_5} + \mathbf{x_7} = 0 + \mathbf{x_3} + \mathbf{x_5} + \mathbf{x_7} \end{cases}$$

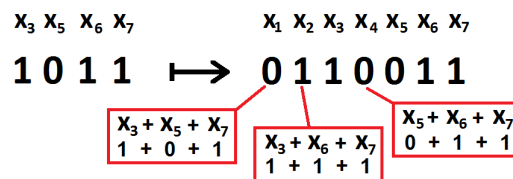


E lembrando que  $x+x=0, \forall x \in \mathbb{Z}_2$ , o sistema tem como solução:

$$\begin{cases} x_4 = x_5 + x_6 + x_7 \\ x_2 = x_3 + x_6 + x_7 \\ x_1 = x_3 + x_5 + x_7 \end{cases}$$

Observe que a solução do sistema apresenta 4 variáveis independentes ( $x_3, x_5, x_6$  e  $x_7$ ), que se referem ao código da fonte, e 3 variáveis dependentes ( $x_1, x_2$  e  $x_4$ ), que representam a redundância acrescentada a fim de se detectar e corrigir possíveis erros.

Assim, o código  $Ham_3$  transforma uma palavra-código de 4 dígitos em uma palavra-código de 7 dígitos, através do acréscimo de uma redundância de 3 dígitos. Por exemplo:



**Figura 1.5** Codificação: acréscimo de redundância

Na verdade, para se gerar o código de forma direta, usa-se multiplicação de matrizes. A partir do sistema (\*\*), obtém-se uma matriz  $G$ , chamada matriz geradora do código, que satisfaz:

$$[x_3 \ x_5 \ x_6 \ x_7] \cdot G = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7]$$

Em nosso caso, para encontrar a matriz geradora de  $Ham_3$ , vamos escrever o sistema (\*\*) da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_5 + 0.x_6 + x_7 \\ x_2 = x_3 + 0.x_5 + x_6 + x_7 \\ x_3 = x_3 + 0.x_5 + 0.x_6 + 0.x_7 \\ x_4 = 0.x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \\ x_5 = 0.x_3 + x_5 + 0.x_6 + 0.x_7 \\ x_6 = 0.x_3 + 0.x_5 + x_6 + 0.x_7 \\ x_7 = 0.x_3 + 0.x_5 + 0.x_6 + x_7 \end{cases}$$

Agora, note que o sistema equivale ao produto de matrizes:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

Tomando as transpostas dos dois lados da igualdade, segue que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}^T \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T .$$

E, conseqüentemente,

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_5 & x_6 & x_7 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{bmatrix} .$$

Logo, a matriz geradora do código  $Ham_3$  é

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$$

... e a codificação é obtida efetuando-se o produto:

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_5 & x_6 & x_7 \end{bmatrix} \cdot G = \begin{bmatrix} x_3 & x_5 & x_6 & x_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Observação: se a matriz de paridade estivesse na forma da matriz H, abaixo, seria simples obter a matriz G:

$$H = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Figura 1.6 Obtenção da matriz geradora G

**Decodificação**

O algoritmo de decodificação, descrito a seguir, também é baseado em produto de matrizes e é extremamente simples quando a matriz está na forma (\*):

1. Recebida a palavra  $\mathbf{r}$ , calcule  $H_3 \cdot \mathbf{r}^T$ ;
2. Se  $H_3 \cdot \mathbf{r}^T = [0]$  então assuma que  $\mathbf{r}$  foi a palavra transmitida;
3. Se  $H_3 \cdot \mathbf{r}^T \neq [0]$ , então assuma que ocorreu apenas um erro. Temos que  $H_3 \cdot \mathbf{r}^T$  coincide com uma das colunas de  $H_3$  e essa coluna é a representação binária da posição em que ocorreu o erro em  $\mathbf{r}$ ;
4. Troque em  $\mathbf{r}$  o dígito incorreto e tem-se a palavra transmitida.

Exemplo - Palavra recebida:  $\mathbf{r} = 0110101$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1+0+1 \\ 1+1+0+1 \\ 0+1+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Coincide com a coluna "3"

**Figura 1.7** Decodificação: multiplicação pela matriz de paridade

Conclusão: houve um erro na transmissão estando o 3º dígito incorreto. A palavra-código correta é **0100101!**

**Por que o algoritmo funciona?**

Vamos chamar a palavra-código transmitida originalmente de  $\mathbf{c} = 0100101$ . Observe que a palavra recebida  $\mathbf{r} = 0110101$  é obtida ao adicionarmos o erro  $\mathbf{e} = 0010000$  à palavra  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{c} + \mathbf{e} = [0100101] + [0010000] = [0110101] = \mathbf{r}$$

Logo,

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} + \mathbf{e}.$$

Calculando  $H_3 \cdot \mathbf{r}^T$ , temos

$$H_3 \cdot \mathbf{r}^T = H_3 \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{e})^T \Leftrightarrow H_3 \cdot \mathbf{r}^T = H_3 \cdot (\mathbf{c}^T + \mathbf{e}^T) \Leftrightarrow H_3 \cdot \mathbf{r}^T = H_3 \cdot \mathbf{c}^T + H_3 \cdot \mathbf{e}^T.$$

Como  $H_3 \cdot \mathbf{c}^T = [0]$ , pois  $\mathbf{c}$  é uma palavra do código  $Ham_3$ , vemos que

$$H_3 \cdot \mathbf{r}^T = H_3 \cdot \mathbf{e}^T.$$

Agora, observe que  $H_3 \cdot \mathbf{e}^T$  é uma coluna de  $H_3$ , posicionada na matriz na mesma posição do dígito "1" em  $\mathbf{e}$ , e esta é precisamente a posição do erro em  $\mathbf{r}$ .

$$\begin{pmatrix} \diamond & \diamond & \blacktriangle & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \\ \diamond & \diamond & \blacktriangle & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \\ \diamond & \diamond & \blacktriangle & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \blacktriangle \\ \blacktriangle \\ \blacktriangle \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, lembrando que as colunas de  $H_3$  estão ordenadas – forma (\*) –, segue que  $H_3 \cdot \mathbf{r}^T$  é a representação binária da posição do erro em  $\mathbf{r}$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \textcircled{0} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Coluna 3
Posição do erro
Forma binária do "3"

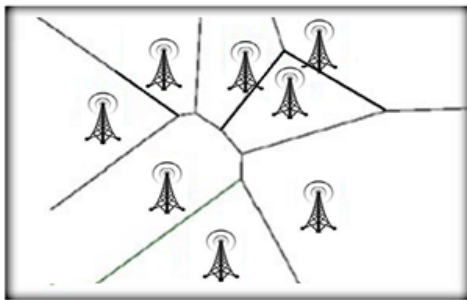
## 1.2 Geometria euclidiana

### 1.2.1 Diagrama de Voronoi

O diagrama de Voronoi é uma forma de particionar o espaço que contém um conjunto inicial de pontos. A cada ponto é atribuída a sua região mais próxima, sendo as regiões obtidas denominadas células de Voronoi.

O diagrama foi inventado para resolver um problema simples: “Como dividir uma cidade em áreas irregulares de forma que a área coberta por um carteiro vinculado a uma determinada agência de correio seja otimizada?”

Esse problema se aplica, por exemplo, na distribuição das torres de transmissão de uma rede de telefonia celular, onde cada aparelho teoricamente poderia utilizar a torre mais próxima para se conectar à rede.

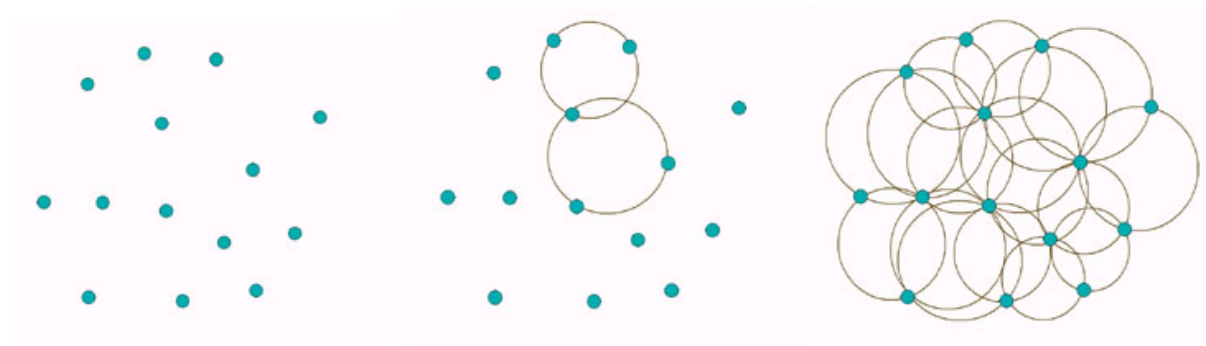


**Figura 1.8** Regiões com pontos mais próximos de cada antena de transmissão

O algoritmo a seguir que descreve os passos necessários para a geração de um diagrama de Voronoi para uma distribuição qualquer de pontos sobre o plano (adaptação de [6], [11] e [12]).

#### **Passo 1: Determinação dos pontos para os triângulos (condição de Delaunay)**

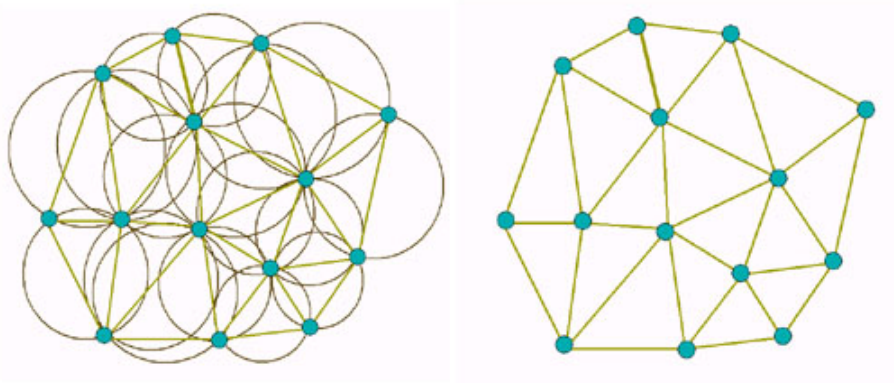
Dada a distribuição de pontos, encontre todos os círculos definidos por três ou mais desses pontos, de tal forma que um círculo que passe por um conjunto de três pontos não inclua nenhum outro ponto da distribuição em seu interior:



**Figura 1.9** Passo 1 - círculos que passam por três pontos

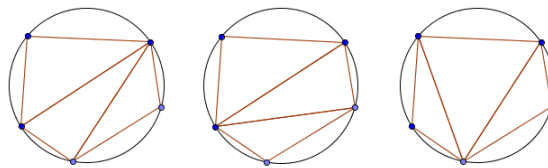
### Passo 2: Triangulação de Delaunay

Para cada conjunto de três pontos satisfazendo a condição de Delaunay gere um triângulo.



**Figura 1.10** Passo 2 - triângulos inscritos nos círculos

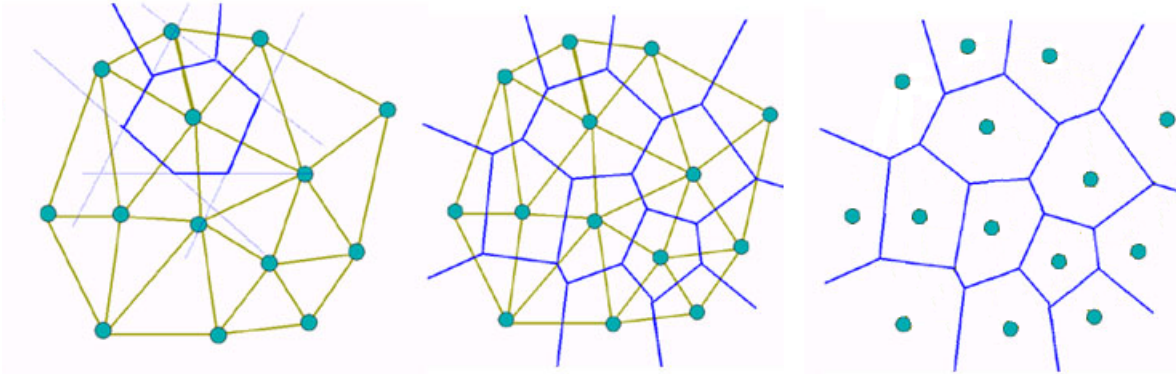
Observação: caso um círculo contenha mais que 3 pontos, considere triângulos que não tenham pontos internos em comum. No caso de um círculo conter 5 pontos, por exemplo, isso pode ser feito de várias formas, algumas constando na figura abaixo.



### Passo 3: Determinação das células (Diagrama de Voronoi)

**3.1** - Determine a mediatriz de cada uma das arestas dos triângulos, obtendo os circuncentros destes.

**3.2** - Construa segmentos ligando os circuncentros de triângulos adjacentes ou, na impossibilidade, semirretas com ponto inicial em um circuncentro e que interceptam o lado do triângulo respectivo. Cada polígono ou região aberta formados por esses segmentos e semirretas é um célula do diagrama de Voronoi.



**Figura 1.11** Passo 3 - Obtenção das células de Voronoi

Muitas estruturas encontradas na natureza nos remetem ao Diagrama de Voronoi, que também é usado como referência na arte, no design e na engenharia.

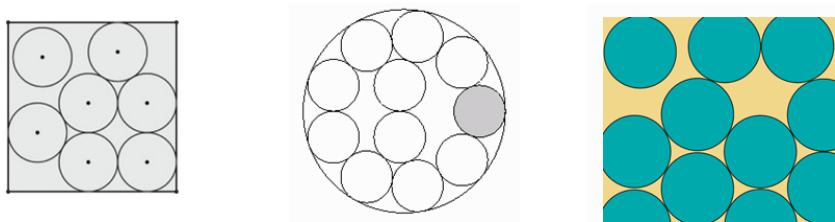


**Figura 1.12** Exemplos do diagrama de Voronoi

### 1.2.2 Códigos e empacotamentos de discos

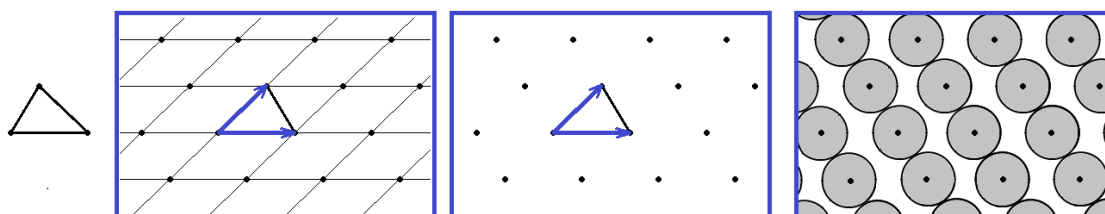
Agora veremos um assunto interessante relacionado aos códigos binários: os empacotamentos de discos.

**Definição 1.4.** Um empacotamento de discos de mesmo raio -  $\Omega$  - consiste num conjunto de círculos (de mesmo raio) distribuídos no plano de modo que os pontos de interseção entre eles, caso existam, sejam apenas pontos de tangência.



**Figura 1.13** Círculos distribuídos no plano sem pontos interiores em comum

Um empacotamento de discos pode apresentar uma distribuição não-aleatória, e ter todos os centros dos discos centrados nos pontos de um *reticulado*. Um reticulado é uma estrutura em  $\mathbb{R}^n$  gerada por vetores linearmente independentes. Não vamos nos aprofundar nesse assunto, pois este não é o objetivo do trabalho (para detalhes, consultar [10]). Basta sabermos que um reticulado plano pode ser gerado por um triângulo (fig. 1.14), e que sobre este pode ser construído um empacotamento de discos.



**Figura 1.14** Empacotamento de discos em reticulado e o triângulo gerador

Sabemos que há infinitas formas de se arranjar círculos de mesmo raio no plano. Mas qual será a forma mais “compacta” possível? Para responder a essa pergunta, precisamos de algumas definições.

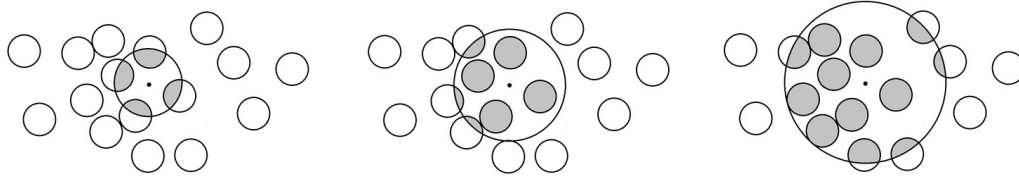
**Definição 1.5.** (Densidade local) Seja  $R$  uma região fechada do plano e  $\Omega$  um empacotamento de discos. A densidade local de  $\Omega$  com relação a  $R$  é dada por :

$$\delta_{\Omega,R} = \frac{\text{Área}(\Omega \cap R)}{\text{Área } R}.$$



**Definição 1.6.** (Densidade) Seja  $\Omega$  um empacotamento de discos e  $C(P_o, r)$  um círculo de raio  $r$  e centro em  $P_o$ , onde  $P_o$  é um ponto qualquer do plano. A densidade de  $\Omega$  é dada por :

$$\delta_{\Omega} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{Área} [\Omega \cap C(P_o, r)]}{\text{Área} [C(P_o, r)]} .$$



**Figura 1.15** Densidade de um empacotamento

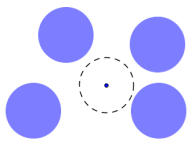
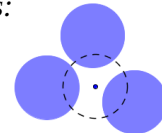
Segue da definição que a densidade de um empacotamento de discos será sempre um número pertencente ao intervalo  $[0,1]$ , podendo-se mostrar, ainda, que a densidade independe do ponto  $P_o$  escolhido (ver [9], p. 49).

Segue também que sempre que for possível acrescentar um disco em um empacotamento, obtendo um novo empacotamento, este último terá densidade igual ou maior que a densidade do empacotamento inicial.

Mais adiante mostraremos que existe um valor máximo para a densidade, exibindo o respectivo empacotamento de discos. Enquanto isso, admitindo a existência do empacotamento citado, considere a definição seguinte.

**Definição 1.7.** (Empacotamento ótimo) Seja  $\Omega$  um empacotamento de discos de raio  $r$ . Diremos que o empacotamento  $\Omega$  é ótimo quando atendidas as seguintes condições:

- (i)  $\delta_{\Omega'} \leq \delta_{\Omega}$ ,  $\forall$  empacotamento de discos  $\Omega'$ ;
- (ii) a região interna de qualquer círculo de raio  $r$  tem interseção não vazia com algum disco de  $\Omega$ .



A condição (ii) da definição acima indica que não é possível acrescentar um disco em um empacotamento ótimo, pois não ocorre o caso da figura ao lado.

**A relação código-empacotamento**

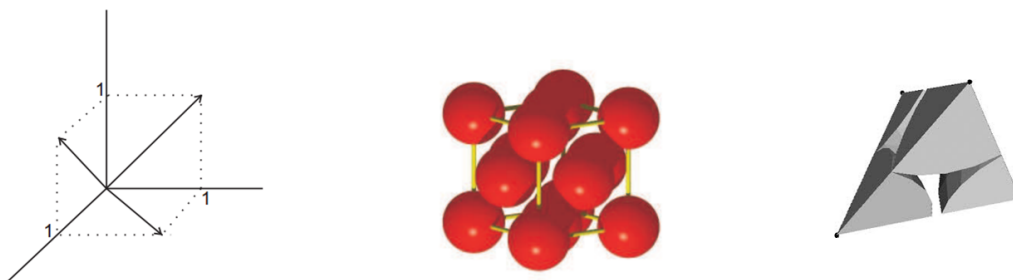
Os estudos sobre empacotamentos de discos fazem parte do que se chama, genericamente, de empacotamentos de esferas, quando se considera outras dimensões do espaço euclidiano, além do plano. Há uma íntima relação entre códigos e empacotamentos de esferas: a partir de um código binário de comprimento  $n$  pode-se construir um reticulado em  $\mathbb{R}^n$  e, nos pontos deste reticulado, centrar esferas de mesmo raio obtendo um empacotamento (mais detalhes em [10] e em [7]).

código binário - reticulado - empacotamento de esferas

**Exemplo 1:** A partir do código

$$C = \{(000), (011), (101), (110)\}$$

pode-se construir um reticulado chamado cúbico de faces centradas e um respectivo empacotamento de esferas (figura 1.16), que atinge a maior densidade em  $\mathbb{R}^3$  (vide [8]).



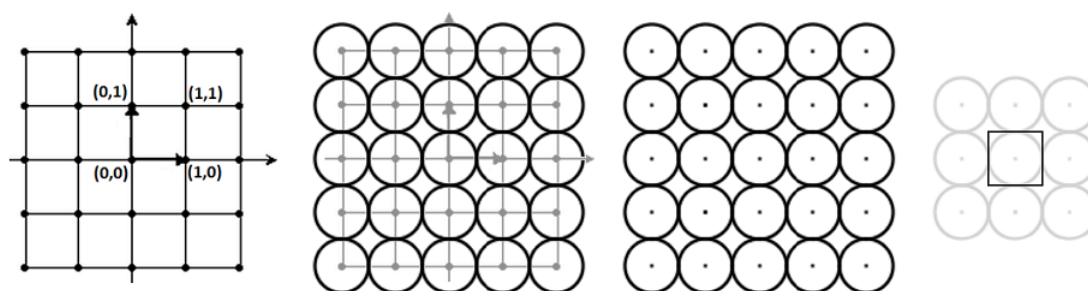
**Figura 1.16** Empacotamento ótimo no espaço euclidiano tridimensional

**Exemplo 2:** Considere esse outro código:  $C = \{00, 01, 10, 11\}$ .

Tomando as palavras-código como pares ordenados no plano cartesiano formamos um quadrado e efetuando translações desse quadrado de forma que os lados se sobreponham conseguimos um reticulado plano (fig. 1.17).

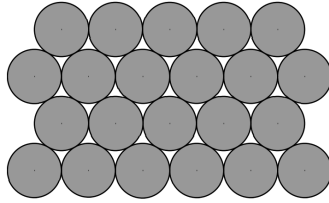
Centrando em cada ponto do reticulado (vértices dos quadrados) um círculo de raio  $\frac{1}{2}$  temos um empacotamento de discos em reticulado gerado por um código binário.

Nesse caso, cada disco toca quatro outros e as células de Voronoi são quadrados de lado um.



**Figura 1.17** Reticulado e empacotamento gerados por um código binário

Agora, já definida a densidade, podemos perguntar novamente: qual será a forma “mais densa” possível para um empacotamento de discos? Veremos que a resposta a essa pergunta é o empacotamento da figura abaixo, que denotaremos por  $\Omega_2$ .

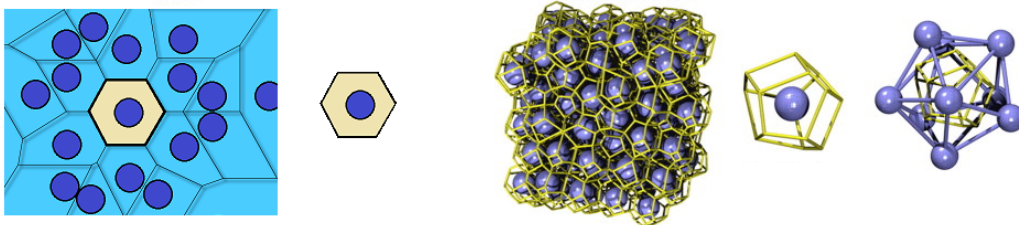


**Figura 1.18** Empacotamento de discos  $\Omega_2$

Os matemáticos sabem que questões aparentemente simples podem ser extremamente difíceis de se responder. Provar que  $\Omega_2$  é o empacotamento de maior densidade no plano foi uma dessas questões. Johannes Kepler já investigava o fato em 1611, ao analisar flocos de neve, mas somente em 1940 foi dada uma demonstração, pelo matemático húngaro László Fejes Tóth. Ainda assim, a prova dada por Tóth era bastante difícil, havendo a necessidade de checar cerca de 40 casos. Registre-se que em 1892, Axel Thue esboçou uma prova, apresentando mais detalhes em 1910, mas ainda deixou algumas lacunas ([8], p. 242-245).

No caso tridimensional, Kepler também fez o comentário casual de que, para sementes de romã, a disposição da figura 1.16 (reticulado cúbico de faces centradas) é o “encaixe mais compacto possível”. A prova de que Kepler estava certo, agora nos referindo aos empacotamentos de esferas, só aconteceu em 1998, quando Thomas Hales anunciou ter encontrado a prova com grande auxílio do computador, baseando-se na verificação de milhares de casos. Tratando-se apenas dos empacotamentos em reticulado, Gauss provou, em 1831, que a disposição de Kepler é o arranjo mais compacto ([8]).

A abordagem inicial da densidade parece determinar a dificuldade para se provar resultados acerca dos empacotamentos ótimos. Por exemplo, uma abordagem comum na literatura é considerar a densidade local de um empacotamento na região de Voronoi de determinado disco ou esfera (fig 1.19). O problema é que movimentação de um disco ou esfera altera a densidade de todas as células adjacentes, havendo muitos parâmetros a serem considerados.



**Figura 1.19** Células de Voronoi em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

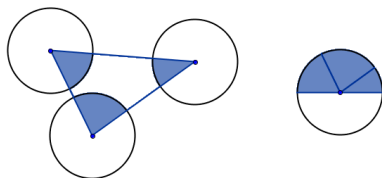
Com base nessas informações, a prova que daremos neste trabalho, de que  $\Omega_2$  é o empacotamento ótimo no plano, pode ser considerada simples, uma vez que nela serão utilizados basicamente, conceitos da Matemática vista no Ensino Médio.

### 1.2.3 Densidade máxima para um empacotamento de discos

Nesta seção vamos encontrar a maior densidade possível para um empacotamento de discos. Sem perda de generalidade, consideraremos apenas empacotamentos de discos unitários, ou seja, círculos de raio 1 (um).

Na busca pelo empacotamento ótimo no plano, daremos uma definição alternativa para a densidade desse empacotamento, utilizando a triangulação de Delaunay (seção 1.2.1, passo 2). Ressaltamos que, nas referências pesquisadas e em outras fontes que não listamos aqui, tal definição e a prova apresentada na sequência sobre a densidade ótima no plano não foram encontradas, de modo que podem ser contribuições teóricas efetivas desse trabalho.

A prova baseia-se em duas ideias básicas: a primeira é de que os triângulos obtidos na triangulação de Delaunay nos permitem calcular a densidade do empacotamento ótimo. E a segunda é que a interseção do empacotamento com qualquer desses triângulos tem sempre área  $\pi$ , uma vez que é sempre um semicírculo de raio 1 (fig. 1.20).

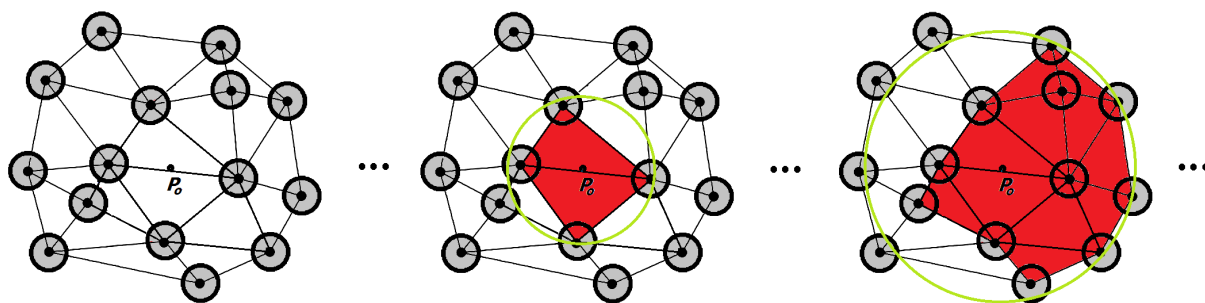


**Figura 1.20** A intersecção forma sempre um semi-círculo

Para usarmos as ideias acima, precisamos contruir polígonos adequados a partir de um empacotamento de discos. Vamos chamar esse método de “Construção D”.

#### Construção D

Seja  $\Omega$  um empacotamento de discos, considere a triangulação de Delaunay associada e as regiões triangulares obtidas. Fixe um ponto qualquer  $P_o$  e, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , construa uma circunferência de raio  $k$  centrada em  $P_o$ . Defina o polígono  $R_k$  como sendo a união dos triângulos que estão inteiramente contidos na circunferência  $C(P_o, k)$ .



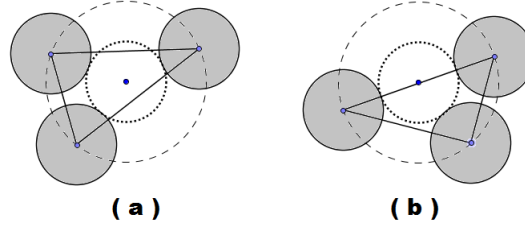
**Figura 1.21** Polígonos  $R_k$ , em vermelho

Temos, assim, que para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe uma densidade local do empacotamento  $\Omega$ , quando restrito à região interna do polígono  $R_k$ .

**Proposição 1.1.** (Densidade do empacotamento ótimo) Seja  $\Omega$  um empacotamento de discos no plano e  $R_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , os polígonos definidos pela construção D a partir do ponto  $P_o$ . Se  $\Omega$  é um empacotamento ótimo então sua densidade é dada por:

$$\delta_\Omega = \lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_{\Omega, R_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{Área} [\Omega \cap R_k]}{\text{Área} [R_k]}.$$

*Demonstração.* Primeiramente, note que os círculos que circunscrevem os triângulos que compõem  $R_k$  (construção D) não contêm em seu interior qualquer centro de disco, devido à condição de Delaunay (seção 1.2.1, passo 1). Como  $\Omega$  é um empacotamento que alcança a maior densidade, estes círculos possuem raio menor que 2 (dois), pois, do contrário, poderíamos acrescentar um disco ao empacotamento  $\Omega$  e este não seria ótimo (fig. 1.22, (a)). Daí, os triângulos que compõem  $R_k$  possuem arestas de tamanho menor que 4 (quatro), pois que cada uma é corda de um círculo de Delaunay e, portanto, menor ou igual ao seu diâmetro (figura 1.22, (b))



**Figura 1.22** Triângulo máximo em um empacotamento ótimo

Como as arestas de  $R_k$  são arestas de algum triângulo, segue que  $\forall k > 4$ ,

$$C(P_o, k-4) \subset R_k \subset C(P_o, k).$$

Daí,

$$\frac{\text{Área } C(P_o, k-4)}{\text{Área } C(P_o, k)} = \frac{(k-4)^2}{k^2} < \frac{\text{Área } R_k}{\text{Área } C(P_o, k)} < 1.$$

Considerando  $A_k = C(P_o, k) - R_k$  e  $\alpha_k = \frac{\text{Área } R_k}{\text{Área } C(P_o, k)}$ , segue que

$$k \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{(k-4)^2}{k^2} \rightarrow 1 \Rightarrow \alpha_k \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{\text{Área } A_k}{\text{Área } C(P_o, k)} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\text{Área} [\Omega \cap A_k]}{\text{Área } C(P_o, k)} \rightarrow 0.$$

Daí,

$$\frac{\text{Área} [\Omega \cap C(P_o, k)]}{\text{Área} [C(P_o, k)]} = \frac{\alpha_k \cdot \text{Área} [\Omega \cap C(P_o, k)]}{\alpha_k \cdot \text{Área} [C(P_o, k)]} = \frac{\alpha_k \cdot \text{Área} [\Omega \cap R_k] + \alpha_k \cdot \text{Área} [\Omega \cap A_k]}{\text{Área } R_k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_k \cdot \text{Área} [\Omega \cap R_k]}{\text{Área } R_k} + \frac{\alpha_k \cdot \text{Área} [\Omega \cap A_k]}{\text{Área } R_k} \\
&= \alpha_k \cdot \frac{\text{Área} [\Omega \cap R_k]}{\text{Área } R_k} + \frac{\text{Área} [\Omega \cap A_k]}{\text{Área } C(P_o, k)}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\delta_\Omega = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{Área} [\Omega \cap C(P_o, k)]}{\text{Área} [C(P_o, k)]} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ \alpha_k \cdot \frac{\text{Área} [\Omega \cap R_k]}{\text{Área } R_k} + \frac{\text{Área} [\Omega \cap A_k]}{\text{Área } C(P_o, k)} \right\}$$

$$\delta_\Omega = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{Área} [\Omega \cap C(P_o, k)]}{\text{Área} [C(P_o, k)]} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{Área} [\Omega \cap R_k]}{\text{Área } R_k} + \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{Área} [\Omega \cap A_k]}{\text{Área } C(P_o, k)}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\delta_\Omega &= 1 \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{Área} [\Omega \cap R_k]}{\text{Área } R_k} + 0 \\
\Rightarrow \delta_\Omega &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{Área} [\Omega \cap R_k]}{\text{Área } R_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_{\Omega, R_k}.
\end{aligned}$$

□

Uma consequência do resultado anterior é que a densidade de um empacotamento de discos em reticulado coincide com a densidade do empacotamento no triângulo gerador do reticulado, pois, nesse caso, todos os triângulos obtidos na Construção D são congruentes.

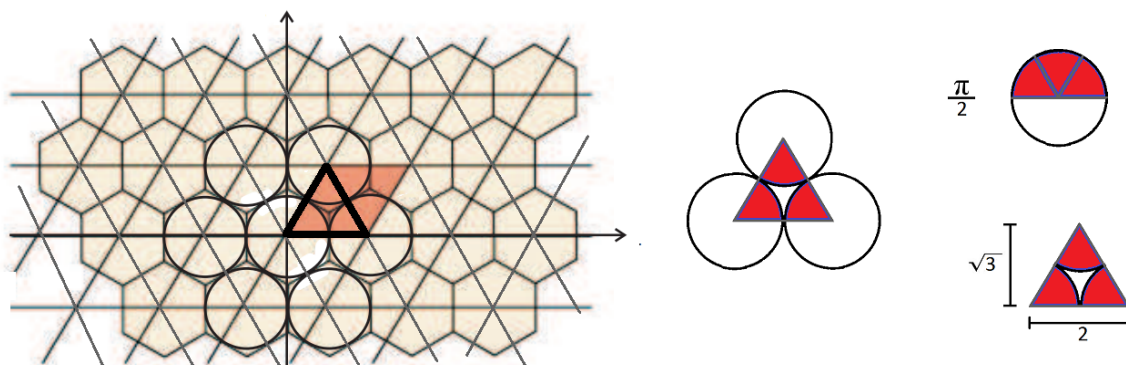
**Exemplo 1:** No caso do empacotamento exibido na figura 1.17, os triângulos possuem todos a mesma área e densidade. Daí a densidade daquele empacotamento ser dada por

$$\delta = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$



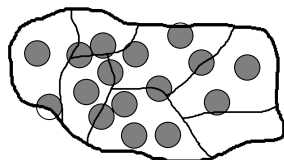
**Exemplo 2:** No empacotamento  $\Omega_2$  (fig. 1.18) todos os discos estão centrados nos pontos do reticulado obtido a partir de um triângulo equilátero de lado 2 (dois). Daí, sua densidade ser dada por

$$\delta = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,9069.$$



**Figura 1.23** Empacotamento  $\Omega_2$

O resultado a seguir mostra um limite superior para a densidade no polígono  $R_k$ , relacionando a densidade de uma região fechada com as densidades de suas sub-regiões.



**Figura 1.24** A densidade numa região e nas sub-regiões

**Lema 1.2.** *Seja  $R$  uma região fechada do plano e  $\Omega$  um empacotamento de discos. Se  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , são regiões fechadas tais que  $\bigcup_{i=1}^n R_i = R$  e cada interseção  $R_i \cap R_j$  ( $i \neq j$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) consiste apenas em pontos de fronteira, então*

$$\delta_{\Omega, R} \leq \max\{\delta_{\Omega, R_i}; i = 1, \dots, n\}.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \delta_{\Omega, R} &= \frac{\text{Área}(\Omega \cap R)}{\text{Área}(R)} = \frac{\text{Área}(\Omega \cap R_1) + \text{Área}(\Omega \cap R_2) + \dots + \text{Área}(\Omega \cap R_n)}{\text{Área}(R)} \\ &= \frac{\text{Área}(R_1) \cdot \frac{\text{Área}(\Omega \cap R_1)}{\text{Área}(R_1)} + \text{Área}(R_2) \cdot \frac{\text{Área}(\Omega \cap R_2)}{\text{Área}(R_2)} + \dots + \text{Área}(R_n) \cdot \frac{\text{Área}(\Omega \cap R_n)}{\text{Área}(R_n)}}{\text{Área}(R)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\text{Área}(R_1) \cdot \delta_{\Omega, R_1} + \text{Área}(R_2) \cdot \delta_{\Omega, R_2} + \dots + \text{Área}(R_n) \cdot \delta_{\Omega, R_n}}{\text{Área}(R)} \\
&\leq \frac{[\text{Área}(R_1) + \dots + \text{Área}(R_n)]}{\text{Área}(R)} \cdot \max\{\delta_{\Omega, R_i}; i=1, \dots, n\} = \max\{\delta_{\Omega, R_i}; i=1, \dots, n\}.
\end{aligned}$$

□

**Corolário 1.3.** Seja  $\Delta_k$  o triângulo de maior densidade em  $R_k$ . Então

$$\delta_{\Omega, R_k} \leq \delta_{\Omega, \Delta_k}.$$

**Proposição 1.4.** Seja  $\Delta ABC$  um triângulo cujas medidas dos lados são maiores ou iguais a 2 (dois) e  $\Delta_E$  um triângulo equilátero de lado 2 (dois). Se  $\Delta ABC$  está inscrito em um círculo de raio  $r < 2$ , tem-se

(i) seu maior ângulo é maior ou igual a  $60^\circ$  e menor que  $120^\circ$ .

(ii)  $\text{Área}(\Delta ABC) \geq \text{Área}(\Delta_E)$ , ocorrendo a igualdade se, e somente se,  $\Delta ABC$  é equilátero de lado 2.

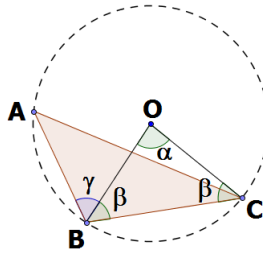
(iii) a altura relativa ao lado oposto ao maior ângulo é maior que 1 (um).

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, defina  $\widehat{B}$  como sendo o maior ângulo de  $\Delta ABC$ .

(i) Como  $\widehat{B}$  é o maior ângulo segue que

$$180^\circ = \text{med}(\widehat{B}) + \text{med}(\widehat{A}) + \text{med}(\widehat{C}) \leq 3 \cdot \text{med}(\widehat{B}) \Rightarrow \text{med}(\widehat{B}) \geq 60^\circ.$$

Denotando o circuncentro de  $\Delta ABC$  por  $O$  e observando a figura abaixo, temos que o lado  $\overline{BC}$  é uma corda do círculo de centro  $O$ .



Como  $\overline{BC} \geq 2 > \overline{OC}$ , segue que  $\alpha > \beta$  (mesma relação entre os lados opostos). Daí, como  $\Delta BCO$  é isósceles de base  $\overline{BC}$ , temos

$$3 \cdot \beta < \alpha + \beta + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta < 60^\circ$$

Analogamente, temos  $\gamma < 60^\circ$ . Portanto,

$$\text{med}(\widehat{B}) = \beta + \gamma < 120^\circ.$$

E, assim,

$$60^\circ \leq \text{med}(\widehat{B}) < 120^\circ.$$

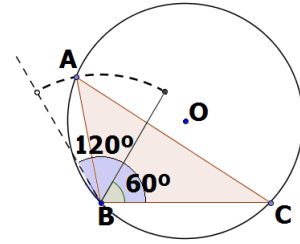


( ii ) Agora, fazendo  $b = \text{med}(\overline{BC})$  e  $L = \text{med}(\overline{AB})$ , temos

$$60^\circ \leq \widehat{B} < 120^\circ$$

$$\Rightarrow \text{sen}(\widehat{B}) \geq \text{sen}(60^\circ)$$

$$\Rightarrow L \cdot \text{sen}(\widehat{B}) \geq L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Como os lados de  $\Delta ABC$  são maiores ou iguais a 2(dois) e  $\text{Área}(\Delta_E) = \sqrt{3}$ , segue que

$$\text{Área}(\Delta ABC) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot L \cdot \text{sen}(\widehat{B})}{2} \geq \frac{b \cdot L \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} \geq \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{Área}(\Delta ABC) \geq \text{Área}(\Delta_E).$$

Daí,

$$\frac{b \cdot L \cdot \text{sen}(\widehat{B})}{2} = \frac{b \cdot L \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow b = L = 2 \text{ e } \widehat{B} = 60^\circ.$$

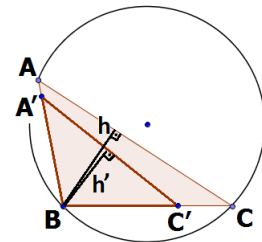
Logo, a igualdade ocorre se, e somente se,  $\Delta ABC$  é equilátero de lado 2.

( iii ) Tomando o ponto  $A'$  no lado  $\overline{AB}$  tal que  $\text{med}(\overline{A'B}) = 2$  e o ponto  $C'$  em  $\overline{BC}$  tal que  $\text{med}(\overline{C'B}) = 2$  temos que o triângulo  $\Delta A'BC'$  é interno ao triângulo  $\Delta ABC$  e, além disso, isósceles de base  $\overline{A'C'}$ . Denotando por  $h'$  a altura de  $\Delta A'BC'$  relativa ao lado  $\overline{A'C'}$  e por  $h$  a altura de  $\Delta ABC$  relativa ao lado  $\overline{AC}$ , temos  $h \geq h'$  e, conseqüentemente:

$$30^\circ \leq \frac{\widehat{B}}{2} < 60^\circ$$

$$\Rightarrow h' = 2 \cdot \cos\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right) \geq 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow h > 1.$$



□

Esses resultados nos permitem agora provar que  $\Omega_2$  é o empacotamento ótimo no plano.

**Teorema 1.5.** *A maior densidade possível para um empacotamento de discos no plano é*

$$\delta_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

*Demonstração.* Seja  $\Omega$  um empacotamento de discos unitários que alcança a maior densidade no plano e  $R_k$ ,  $k > 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , os polígonos definidos pela construção D a partir de um ponto inicial  $P_0$ . Denote por  $\Delta_k$  o triângulo de maior densidade em  $R_k$ .

Combinando o lema 1.2 com a proposição 1.1, temos

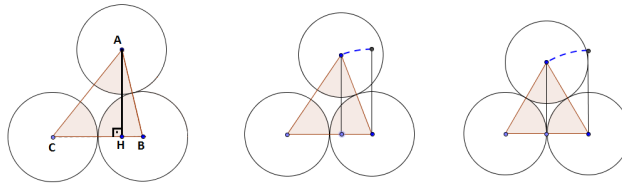
$$\delta_\Omega = \lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_{\Omega, R_k} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_{\Omega, \Delta_k}$$

Agora note que, devido à observação da figura 1.20 e à proposição 1.4, temos que

$$\text{Área}(\Omega \cap \Delta_k) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \delta_{\Omega, \Delta_k} = \frac{\pi}{2 \cdot \text{Área} \Delta_k}$$

Daí,  $\delta_{\Omega, \Delta_k}$  possui valor máximo quando a área de  $\Delta_k$  é a menor possível.

Na demonstração da proposição 1.1 (figura 1.22), vimos que cada triângulo  $\Delta_k$  está inscrito em um círculo de raio menor que 2, o qual não possui em seu interior nenhum centro de disco (pois a construção D utiliza-se da triangulação de Delaunay). E como as arestas de  $\Delta_k$  possuem tamanho maior ou igual a 2 (dois), podemos utilizar a proposição 1.4 e concluir que  $\Delta_k$  atinge a menor área possível se, e somente se,  $\Delta_k$  é equilátero de lado 2 (dois).



Assim,  $\text{Área} \Delta_k \geq \sqrt{3}$ ,  $\forall k$ , e, conseqüentemente,

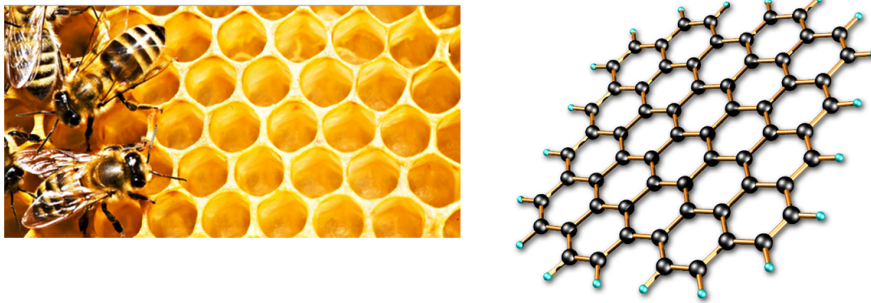
$$\delta_\Omega = \lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_{\Omega, R_k} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Portanto, é fácil ver que se um empacotamento de discos atinge o limite acima em todo triângulo de  $R_k$  (gerado pela construção D usando a triangulação de Delaunay), então este é o empacotamento ótimo no plano. Tal empacotamento é precisamente  $\Omega_2$  (figuras 1.18 e 1.23), que alcança a densidade

$$\delta_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

□

A natureza está repleta de estruturas nas quais visualizamos o empacotamento  $\Omega_2$ . É o caso, por exemplo, da forma como as abelhas constroem os favos de mel, otimizando o espaço, e, no nível microscópico, da forma com que estão arranjados espaços entre os átomos de carbono no grafeno (material tecnologicamente promissor, com apenas um átomo de espessura, composto por átomos de carbono arranjados em hexágonos fortemente ligados).



**Figura 1.25** Dos favos de mel ao grafeno, a natureza otimizando espaço



CAPÍTULO 2

**Sequência Didática**

## 2.1 Considerações iniciais

A sequência possibilitará que o professor mostre aos alunos algumas relações entre os diferentes assuntos da Matemática do Ensino Médio, mostrando as aplicações destes em tecnologias presentes no cotidiano.

### Objetivos:

- Estudar um pouco da Matemática relacionada com a transmissão de dados digitais, particularmente aquela relativa aos códigos corretores de erros;
- Mostrar que o conjunto  $\{0, 1\}$ , em que se definem operações de soma e produto adequadas, se torna uma estrutura parecida com o conjunto dos números reais;
- Estudar as vantagens e desvantagens de um sistema de numeração não convencional, como o binário;
  - Visualizar a relação entre sistemas lineares e matrizes;
  - Verificar o funcionamento do código binário  $Ham_3$ ;
  - Verificar a geometria que pode ser associada a um código corretor de erros binário;
  - Construir um diagrama de Voronoi sobre uma distribuição qualquer de pontos;
  - Entender a densidade de um empacotamento de discos, tanto localmente quanto em todo o plano.

### Público Alvo:

A Sequência Didática apresentada neste capítulo seria indicada a alunos do 2º ou 3º Ano do Ensino Médio, uma vez que necessita de conhecimentos de geometria, matrizes e sistemas lineares.

### Pré-Requisitos:

- Conhecer as propriedades do conjunto  $\mathbb{R}$ ;
- Dominar conceitos de multiplicação de matrizes e resolução de sistemas lineares;
- Dominar conceitos de geometria e trigonometria em triângulos;
- Dominar a construção de mediatrizes de segmentos com régua e compasso;
- Conhecer as fórmulas de cálculo de área das figuras planas.

**Materiais e Tecnologias:**

- Papel, lápis, régua, compasso e transferidor;
- Programas de computador: Geogebra, Bloco de Notas;
- Cartolina e tesoura.

**Recomendações Metodológicas:**

1. Preparação da sala: organização das mesas em grupos, distribuição de cartolina em cada grupo.
2. Organização da turma: a divisão em grupos (em torno de 5 integrantes) é adequada, uma vez que se trabalhará com transmissão de mensagens via multiplicação de matrizes. Desta forma, os cálculos podem ser divididos entre os componentes do grupo e os resultados de cada grupo utilizados para compor uma palavra específica. Além disso, a atividade prevê construções geométricas e recortes, tarefas essas que podem ser divididas entre os integrantes do grupo.

**Dificuldades Previstas:**

1. Alunos podem estranhar as operações no conjunto  $\{0,1\}$ ;
2. Dificuldade em compreender a o procedimento de acréscimo de redundâncias através de um código corretor de erros;
3. Necessidade de objetividade no direcionamento do conteúdo;
4. Alguns alunos podem apresentar dificuldade com os conceitos matemáticos assumidos como pré-requisitos.

**Descrição Geral:**

A sequência didática está dividida em três blocos, cada um deles correspondente a 2 (duas) horas-aula, totalizando 6 (seis) horas-aula, detalhadas a seguir.

## 2.2 Aplicando a Sequência

### 2.2.1 Aulas 1 e 2 - Transmissão de informações digitais

#### Objetivos específicos da aula

- Estudar o princípio teórico básico da transmissão de dados digitais e dos códigos corretos de erros.
- Mostrar que no conjunto  $\{0, 1\}$  pode-se definir operações de soma e produto que o tornam uma estrutura parecida com o conjunto dos números reais.
- Estudar as vantagens e desvantagens de um sistema de numeração não convencional, como o binário;

#### Desenvolvimento

Apresentar o funcionamento básico de sistemas de comunicação de dados digital, identificando elementos e a necessidade se precaver contra possíveis erros através do acréscimo de redundâncias.

Explicar o código “SIM/NÃO” (seção 1.1.1). Apresentar, em seguida, o sistema binário e ressaltar como essa linguagem é utilizada em aparelhos digitais como leitores de discos ópticos (CD's e DVD's).

#### Atividades propostas

**Exercício 1.** No código “SIM/NÃO” dado como exemplo na seção 1.1.1, se a codificação fosse SIM = 110 e NÃO = 000, seria possível a decodificação ao se receber a mensagem 010?

Dica: Desenhe os “discos de raio 1 (um)”, considerando a distância de Hamming, cujos centros sejam as palavras do código “SIM/NÃO”, e distribua em torno delas as palavras-código que poderiam ser recebidas.

**Exercício 2.** Digite a frase “Tudo é Matemática!”, sem aspas, no programa “Bloco de Notas” do sistema operacional Windows e salve o arquivo com um nome qualquer. Confira seu tamanho, em bytes. Qual é a relação entre a quantidade de símbolos da frase e o tamanho, em bytes, do arquivo?

**Exercício 3.** Complete o quadro abaixo.

Notação decimal	Notação binária
190	
	101001
30	
	1011



**Exercício 4.** Considere o conjunto  $\{0, 1\}$  definido com as operações de adição (+) e multiplicação (x) da seguinte forma:

<b>+</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>

<b>×</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>

Verifique que essas operações possuem as seguintes propriedades:

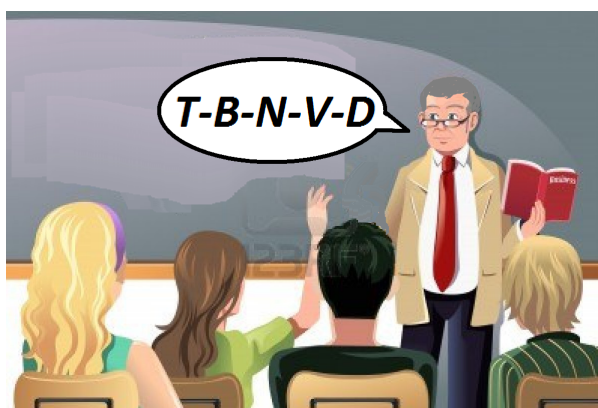
- da adição: comutatividade, associatividade, existência de elemento neutro (0);
- da multiplicação: comutatividade, associatividade, distributividade em relação à adição e existência de elemento neutro (1).

### Sugestões ao professor

Uma boa forma de explicar como funciona a transmissão de informações é adotar o seguinte procedimento: combinar com a turma que eles deverão escrever em um papel certas letras que serão ditadas, pedindo que não se manifestem durante o ditado, mesmo que não entendam alguma letra.

Daí, ditar em voz baixa, de forma contínua e uma única vez, as letras “TBNVD” pedindo para que cada grupo anote-as em um papel. Verificar se houve erros.

Depois ditar a frase as mesmas letras em outra ordem, só que complementadas com algumas informações, como por exemplo: “N de nada, V de viola, T de tatu, D de dado, B de Brasil”. Verificar novamente se houve algum erro. Com base nos resultados relacionar os elementos da comunicação feita com um sistema de comunicação digital.



### 2.2.2 Aulas 3 e 4 - Código binário $Ham_3$

#### Objetivos específicos da aula

- Visualizar a relação entre códigos, sistemas lineares e matrizes;
- Verificar o funcionamento do código binário  $Ham_3$ ;

#### Desenvolvimento

Apresentar a definição do código binário  $Ham_3$ . Construir, com os alunos, a matriz de paridade cujas colunas estão em ordem crescente, considerando os números naturais que representam (1 a 7). Apresentar o sistema gerado e sua solução. Pedir que cada grupo (ou aluno) encontre a matriz geradora do código. Descrever o algoritmo de decodificação e dar exemplos.

#### Atividades propostas

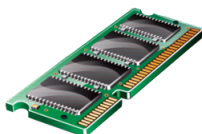
**Exercício 1.** Verificar que o código “SIM/NÃO” pode ser codificado através da multiplicação por uma matriz, determinando assim sua matriz geradora.

**Exercício 2.** Utilizando o algoritmo de decodificação do código  $Ham_3$ , efetuar a decodificação das mensagens :

- a) 0111100.                      b) 0100110.

#### Sugestões ao professor

Uma informação que pode despertar o interesse dos alunos é que o código  $Ham_3$  tem aplicação em memórias de computadores e outros códigos obtidos a partir de sistemas lineares (como o código de Hamming) estão presentes na gravação e leitura de dados em CD's e DVD's



### 2.2.3 Aulas 5 e 6 - Empacotamentos de discos

#### Objetivos específicos da aula

- Verificar a geometria que pode ser associada a um código corretor de erros binário;
- Construir um diagrama de Voronoi sobre uma distribuição qualquer de pontos;
- Entender a densidade de um empacotamento de discos, tanto localmente quanto no plano.

#### Desenvolvimento

Apresentar a forma de construção de um reticulado e construir o reticulado e o empacotamento de discos associados ao código  $C = \{00, 01, 10, 11\}$ .

Apresentar o conceito do diagrama de Voronoi e sua forma de construção. Apresentar o conceito de empacotamento de discos. Demonstrar a proposição 1, do cap. 1 (densidade das sub-regiões), no caso em que uma região fechada  $R$  está particionada apenas em duas sub-regiões.

#### Atividades propostas

**Exercício 1.** Construir, com base em alguns pontos desenhados aleatoriamente em uma folha A4, tanto a triangulação de Delaunay quanto o diagrama de Voronoi associado.

**Exercício 2.** Cada grupo deve recortar na cartolina 10 círculos de raio 5 cm e verificar na mesa diferentes disposições possíveis para um empacotamento de discos e o conceito de densidade local.

**Exercício 3.** Verificar a densidade do empacotamento de discos do empacotamento  $\Omega_2$ .

#### Sugestões ao professor

Para que conheça os diagramas de Voronoi que devem ser construídos, o professor pode imprimir as distribuições de pontos e distribuir aos alunos.

Questionar com os alunos qual parece ser a densidade ótima de um empacotamento de discos.

Ao falar da densidade local, citar o exemplo da densidade populacional do Brasil, que possui Regiões muito populosas, como as grandes capitais, e regiões com densidade populacional bem baixa, como ocorre na região amazônica.



## CAPÍTULO 3

# Conclusão

Os frutos de uma teoria matemática não aparecem de forma imediata e o que parece sem utilidade em dado momento pode ser a base para avanços tecnológicos significativos em um momento posterior. Reforçar essa ideia foi o nosso objetivo ao estudar os códigos corretores de erros, que hoje dão confiabilidade às nossas comunicações digitais ou mesmo nos permitem ouvir com boa qualidade as músicas de um CD. O aluno perceber que algo tão importante pode ser entendido com os conhecimentos que ele já possui pode ser um grande incentivo ao estudo.

Terminada esta etapa e vislumbrando trabalhos futuros, há a possibilidade de se estender para dimensões maiores os estudos aqui realizados sobre empacotamentos de discos. Algo que poderia ser feito de imediato é estudar a densidade de um empacotamento de esferas no espaço euclidiano (dimensão 3), verificando que a extensão do diagrama de Voronoi e da triangulação de Delaunay para  $\mathbb{R}^3$  o espaço tridimensional nos dão uma partição que gera tetraedros. Assim, de maneira análoga ao que ocorre no empacotamento de discos, a densidade de um empacotamento estaria relacionada com a densidade nos tetraedros, podendo este ser um caminho para encontrar uma prova sobre o empacotamento de esferas de maior densidade em  $\mathbb{R}^3$ .



## Referências Bibliográficas

- [1] Adriana Pelizzari et al. *Teoria da Aprendizagem Significativa Segundo Ausubel*. Revista PEC, Curitiba, Vol. II, No. 1, jul. 2001 - jul. 2002.
- [2] Carlos Yuzo Shine. *Códigos Corretores de Erros*. VII Semana Olímpica da Olimpíada Brasileira de Matemática, 2004.
- [3] César Polcino Milies. *Breve Introdução à Teoria dos Códigos Corretores de Erros*. SBM-Sociedade Brasileira de Matemática, Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste, 2009.
- [4] Jonathan I. Hall. *Notes on Coding Theory*. Michigan State University. Dept. of Mathematics, 2010.
- [5] Raúl Alvarado Escamilla. *Códigos para detección y corrección de errores en comunicaciones digitales*. Revista Ingenierías, Vol. VII, No. 25, Outubro-dezembro de 2004. URL: [www.ingenierias.uanl.mx/25/index](http://www.ingenierias.uanl.mx/25/index)
- [6] Aldo von Wangenheim. *Notas de aula da disciplina Reconhecimento de Padrões*. The Cyclops Project, 2007. URL : [www.inf.ufsc.br/patrec/intro.html](http://www.inf.ufsc.br/patrec/intro.html)
- [7] Carina Alves. *Reticulados e Códigos*. Tese de Doutorado, IMECC - UNICAMP, 2008.
- [8] Ian Stewart. *Almanaque das Curiosidades Matemáticas*. Tradução Diego Alfaro, revisão técnica Samuel Jurkiewicz. Rio de Janeiro - Ed. Zahar, 2009.
- [9] Mércio Botelho Faria. *Empacotamentos de Esferas em Espaços Hiperbólicos*. Dissertação de Mestrado, IMECC - UNICAMP, 2000.
- [10] Lígia Rodrigues Bernabé Naves. *A densidade de empacotamentos esféricos em reticulados*. Dissertação de Mestrado, IMECC - UNICAMP, 2009.
- [11] Marco Antônio Piteri et al. *Triangulação de Delaunay e o Princípio de Inserção Randomizado*. Anais do II Simpósio Brasileiro de Geomática/V Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, Presidente Prudente - SP. ISSN 1981-6251, p. 655-663, julho 2007.
- [12] André Maurício Lopes da Gama Cerqueira. *Recuperação de Facetas para Triangulação de Delaunay Conforme de Complexos Curvos*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Elétrica - UFMG, 2010.