UFRPE

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Pedro Vitor Silva Rodrigues

Poliedros regulares: Aplicações e construções utilizando o software geométrico GeoGebra como instrumento facilitador no processo de ensino-aprendizagem

RECIFE
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Pedro Vitor Silva Rodrigues

Poliedros regulares: Aplicações e construções utilizando o software geométrico GeoGebra como instrumento facilitador no processo de ensino-aprendizagem

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente

RECIFE
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R696pp Rodrigues, Pedro Vitor Silva

Poliedros regulares: Aplicações e construções utilizando o software geométrico GeoGebra como instrumento facilitador no processo de ensino-aprendizagem: Sólidos platônicos e arquimedianos no geogebra / Pedro Vitor Silva Rodrigues. - 2020.

108 f.

Orientador: Rodrigo Genuino Clemente.

Inclui referências.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2020.

1. GeoGebra. 2. Poliedros Platônicos. 3. Poliedros Arquimedianos. 4. Inclusão digital. I. Clemente, Rodrigo Genuino, orient. II. Título

CDD 510

PEDRO VITOR SILVA RODRIGUES

Poliedros regulares: Aplicações e construções utilizando o software geométrico GeoGebra como instrumento facilitador no processo de ensino-aprendizagem.

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em ____ /____/_____

BANCA EXAMINADORA

Dr. Rodrigo Genuino Clemente (Orientador(a))– UFRPE

Dr. José Carlos de Albuquerque Melo Júnior – UFPE

Dr. José Deibsom da Silva – PROFMAT/UFRPE

Agradecimentos

Existem situações na vida em que é fundamental poder contar com o apoio e a ajuda de algumas pessoas. Para a realização deste curso, pude contar com a ajuda de várias pessoas. E a essas pessoas prestarei, através de poucas palavras, os meus sinceros agradecimentos:

Ao Criador do Universo (DEUS), por ter me dado, além da vida e de tantas outras coisas pelas quais às vezes nem sou grato, a oportunidade de concluir mais uma etapa de minha vida;

A minha querida Mãe Dinalva por ter me criado e me ajudado nesse processo;

Aos meus filhos, João Vitor e Pedro Vinicíus, que mesmo sem entender e saber, me deram forças para não desistir.

A minha namorada e futura esposa Ana Luiza, por ter me dado seu ombro para eu chorar nos momentos em que eu achei que não conseguiria concluir o mestrado, por cada palavra de apoio e por acreditar mais em mim do que eu mesmo;

A meu primo que considero como irmão Emerson Dantas por ter me influenciado, me incentivado e me auxiliando para me tornar um bom profissional;

As meus amigos de sala que, durante todo o curso, tornou o ambiente leve e sadio com apoio multo, em especial aos meus amigos Gabriel Brito, Luiz Manuel, Peterson, Cícero Raimundo, Eliú, Cristiano, Valter Jr. Muito obrigado;

A minha ex-esposa Joana Rodrigues por ter me incentivado lá no início da minha profissão.

Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. (...) se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom "resolvedor de problemas" tem que resolver problemas.

(George Polya)

DECLARAÇÃO

Eu, PEDRO VITOR SILVA RODRIGUES, declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título "**Poliedros regulares: Aplicações e construções utilizando o software geométrico GeoGebra como instrumento facilitador no processo de ensino-prendizagem**", entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processos administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador RODRIGO GENUINO CLEMENTE, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 04 de setembro de 2020.

Pedro Vitor Silva Rodrigues

Resumo

O conceito de poliedros é considerado muito rico do ponto de vista da matemática, pois, é um pólo que congrega os grandes eixos temáticos dos números, da geometria, das grandezas e da álgebra. Várias pesquisas detectaram problemas no ensino aprendizagem das grandezas geométricas.Com a globalização e o surgimento de novas tecnologias na sociedade como um todo, temos a necessidade de nos adaptar a estas evoluções. O docente visando à formação de cidadãos conscientes do seu papel na sociedade deve levar essas tecnologias ao conhecimento de seus alunos.Nada mais interessante do que aliar o conhecimento de poliedros e as tecnologias como a utilização de um software para dinamizar o processo de ensino-aprendizagem.No intuito de participar do envolvimento do docente com a informática e a sua consequente inclusão digital, neste trabalho iremos aplicar uma metodologia de ensino que para muitos professores ainda é desconhecida. Esta metodologia de ensino consiste no uso do software GeoGebra como principal característica para contribuir no conhecimento disciplina de matemática para a construção de conceitos poliedros platônicos e arquimedianos.

Palavras-chave: GeoGebra, Poliedros Platônicos, Poliedros Arquimedianos, Inclusão digital.

Abstract

The concept of polyhedra is very rich from the mathematical point of view, as it is a pole that brings together the major thematic of numbers, geometry, quantities and algebra. Several researches have detected problems of teaching and learning of geometric quantities. With globalization and the new technologies in society, we need to adapt to these evolution. The teacher looking for the formation of citizens aware of their role in society must take these technologies to the knowledge of their students. Nothing more interesting than combining polyhedra and technologies such as the use of software to streamline the teaching and learning process in order to participate in the teacher's involvement with information technology and its consequent digital inclusion, in this work we will apply a teaching methodology that for many teachers is still unknown. This consists of using the software GeoGebra as the main characteristic to contribute in the mathematical discipline knowledge for the construction of concepts related with Platonic and Archimedean polyhedron.

Keywords: GeoGebra, Platonic Polyhedra, Archimedean Polyhedra, Digital Inclusion.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

As discussões sobre qual seria o melhor método para transmissão do conhecimento de Matemática na escola é um tópico importante, pelo fato dos alunos estarem cansados da aula tradicional (quadro – piloto). Nesse sentido, verifica-se o esforço dos professores em construir novos métodos que busquem dos alunos uma melhor compreensão do conteúdo abordado (1).

Buscar realizar tarefas que minimizem as dificuldades dos estudantes é um caminho utilizado pela minoria dos professores. Portanto, introduzir um software no ensino de Matemática é uma proposta importante, no sentido da construção do conhecimento.

O GeoGebra, junção de geometria e álgebra, é um programa computacional educativo específico para o aprendizado de diversas áreas de matemática, principalmente no estudo de geometria. Foi desenvolvido por Markus Hohenwater, em 2001, na Universitat Salzburg - EUA. Possui livre distribuição nos termos da GNU (General Publuc License) e é escrito em Java. O GeoGebra possui muitos recursos na construção das Figuras geométricas possibilitando movê-las e deformá-las, permitindo ao professor explorar e investigar desde a geometria elementar até a geometria mais avançada. O programa pode ser utilizado para diferentes níveis de aprendizado, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

Nota-se que o estudo de poliedros possui bastante relevância para os alunos do 2º ano do ensino médio, pois o mesmo se mostra presentes nos principais vestibulares do Brasil.

No ensino de Geometria Espacial, os problemas são fundamentais, pois permitem ao aluno colocar-se diante de questionamentos e pensar por si próprio, possibilitando o exercício do raciocínio lógico e espacial e não apenas o uso de fórmulas. No entanto, a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas ainda é bastante desconhecida da grande maioria e, quando é incorporada à prática escolar, aparece como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagem de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos(2).

Antes de chegarmos nos poliedros arquimedianos, falaremos sobre os polígonos regulares e provaremos a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono. Mostraremos que os poliedros regulares são formados por polígonos regulares, iremos ver o porquê que existem apenas cinco poliedros platônicos e a relação entre o número de ouro com o raio da esfera inscrita, circunscrita e interesfera de um dodecaedro e icosaedro. Mostraremos que a cosmologia de platão está diretamente ligada aos sólidos platônicos.

O segundo capítulo trata-se dos sólidos arquimedianos, iremos mostrar como se deu suas construções, os tipos de truncamentos feitos nos sólidos platônicos para que nascessem os sólidos arquimedianos. É nesse capítulo que iremos mostrar o passo a passo da construção dos sólidos arquimedianos no software GeoGebra, pois para a construção dos sólidos platônicos já existem comandos específicos e são a partir desses sólidos platônicos que iremos construir os sólidos arquimedianos e como os sólidos arquimedianos são poliedros convexos iremos aplicar a relação de Euler para encontrar o número de vértices, faces e arestas.

No terceiro e último capítulo, aplicaremos um estudo de caso com o intuito de verificar se o processo de ensino-aprendizagem com o uso do GeoGebra para poliedros é mais eficaz que o ensino de forma tradicional utilizando apenas quadro e piloto.

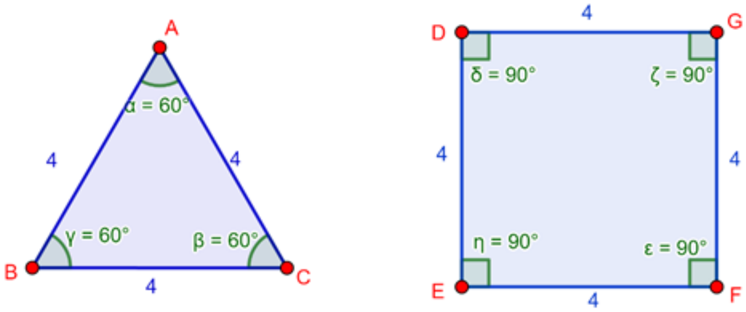
As tecnologias são pontes que abrem a sala de aula para o mundo, que representam, medeiam o nosso conhecimento do mundo. São diferentes formas de representação da realidade, de forma mais abstrata ou concreta, mais estática ou dinâmica, mais linear ou paralela, mas todas elas, combinadas, integradas, possibilitam uma melhor apreensão da realidade e o desenvolvimento de todas as potencialidades do educando, dos diferentes tipos de inteligência, habilidades e atitudes (3).

1 Sólidos Platônicos e Arquimedianos

1.1 Polígonos Regulares

Definição 1.1. Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os seus lados congruentes e seus ângulos internos congruentes. Assim, um polígono regular é equilátero e equiângulo.

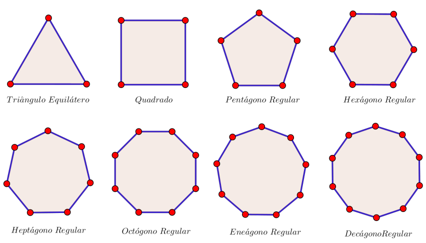
Figura 1 – Triângulo equilátero e quadrado



Fonte: Produzido pelo autor

A ideia de "regularidade" e "figuras geométricas ideais" é muito antiga na geometria. Ela nos remete aos matemáticos e filósofos gregos antigos. O triângulo equilátero é considerado o polígono regular mais simples, pois possui o menor número de lados necessário para limitar parte de um plano. O quadrado (quatro lados), o pentágono (cinco lados), o hexágono (seis lados), o octógono (oito lados), o decágono (dez lados) e assim por diante. É óbvio que não há restrições teóricas no número de lados de um polígono regular, o que significa que existem infinitos polígonos.

Figura 2 – Polígonos regulares convexo



Fonte: Produzido pelo autor

Se pegarmos qualquer vértice de um polígono regular com n lados e traçar todas as diagonais possíveis dentro do polígono, encontraremos $n\breve{}2$ triângulos não interceptores. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$, então a soma dos ângulos internos de qualquer polígono regular é igual a $[180° \cdot (n-2)]$ (veja a prova na proposição 1.2 abaixo). Assim, para encontrar a medida de cada ângulo interno de um polígono regular, basta dividir a soma dos ângulos internos pelo número de lados do polígono regular.

Tabela 1 – Lista dos valores da soma dos ângulos internos e valor de cada ângulo interno de um polígono regular convexo

Nome	**Número de lados**	**Soma dos ângulos internos**	**Ângulo interno**
Triângulo	3	180º	60º
Quadrado	4	360º	90º
Pentágono	5	540º	108º
Hexágono	6	720º	120º
Octógono	8	1080º	135º
Eneágono	9	1260º	140º
Decágono	10	1440º	144º
Dodecágono	12	1800º	150º
...	...	...	...
n-ágono	n	$180°.(n-2)$	$\dfrac{180°.(n-2)}{n}$

Fonte: Produzido pelo autor

Proposição 1.2. *A soma dos ângulos internos de qualquer polígono regular é igual a* $[180° \cdot (n-2)]$.

Demonstração. Iremos mostrar esta afirmação usando o princípio de indução. Seja S_k a soma dos ângulos internos de qualquer polígono regular.

(i) Para $n = 3$

$$S_3 = (3-2) \cdot 180° = 180°.$$

Logo, a afirmação é válida para $n = 3$.

(ii) Suponha que se a proposição é verdadeira para $n = k$, isto é, $S_k = (k-2)\cdot 180°$. Provaremos que deve ser válida para $n = k+1$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= (k-2+1).180° \\ &= (k-2)\cdot 180° + 180° \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, temos que

$$S_{k+1} = S_k + 180°.$$

Portanto, o Princípio de indução garante que a propriedade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

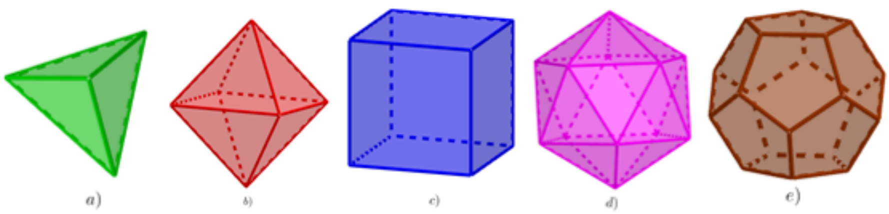
$\square$

1.2 Poliedros Regulares

Definição 1.3. Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Quantos poliedros regulares existem? À primeira vista, a resposta a essa pergunta é muito simples: existem tantos poliedros regulares quantos forem os polígonos regulares, pois os últimos serão as faces dos poliedros. Ou seja, existem infinitos poliedros regulares. No entanto, este não é o caso. Os Elementos de Euclides dão uma prova estrita do fato de que existem apenas cinco poliedros regulares convexos, e suas faces devem ser um dos únicos três tipos de polígonos regulares: triângulos, quadrados e pentágonos (Figura 3).

Figura 3 – Sólidos platônicos: (a) tetraedro (fogo), (b) octaedro (ar), (c) hexaedro ou cubo (Terra), (d) icosaedro (água), (e) dodecaedro (mente universal)



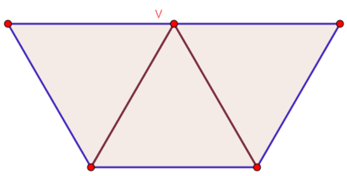
Fonte: Produzido pelo autor

Muitos livros são dedicados a teoria dos poliedros. Os modelos de poliedros do matemático inglês M. Wenninger são os mais conhecidos. A tradução russa deste livro foi publicada em 1974 [147]. A afirmação de Bertrand Russell foi escolhida como epígrafe para este livro: "A matemática possui não apenas a verdade, mas também a beleza suprema... subliminarmente pura e capaz de uma perfeição severa, como somente a melhor arte pode mostrar". Uma relação matemática importante é sobre a relação entre o número de vértices (v), faces (f) e arestas (a) de um poliedro convexo. A relação de Euler como é conhecida, diz que em todo poliedro convexo vale a relação

$$V + F = A + 2. \tag{1.1}$$

Esses poliedros são chamados de sólidos platônicos em homenagem ao filósofo grego Platão, que usava poliedros regulares em sua cosmologia. Começamos nossa consideração com os poliedros regulares que possuem triângulos equiláteros como faces. O tetraedro é o primeiro e mais simples deles (Figura 3-a). A principal observação é que a soma dos ângulos internos dos polígonos que se encontram em todos os vértices é sempre inferior a $360°$, pois se for igual a $360°$ teremos uma região plana. No tetraedro, três triângulos equiláteros (a soma de seus ângulos interiores é igual a $180° = 3 \times 60°$) se encontram em cada vértice; assim, suas bases criam um novo triângulo equilátero.

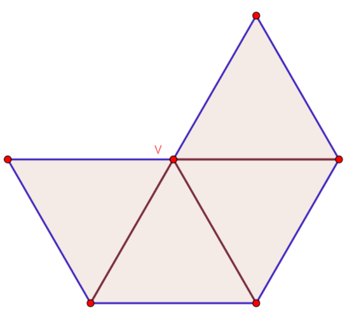
Figura 4 – Três triângulos equiláteros em torno do vértice V



Fonte: Produzido pelo autor

O tetraedro tem o menor número de faces entre os sólidos platônicos e, portanto, é o análogo tridimensional do triângulo equilátero (que obviamente tem o menor número de lados entre os polígonos regulares). O octaedro (Figura 3-b) é a próxima figura geométrica espacial baseada em triângulos equiláteros. No octaedro, quatro triângulos equiláteros (a soma de seus ângulos interiores é igual a $240° = 4 \times 60°$) se reúnem em um vértice; como resultado, surge uma pirâmide com uma base quadrangular.

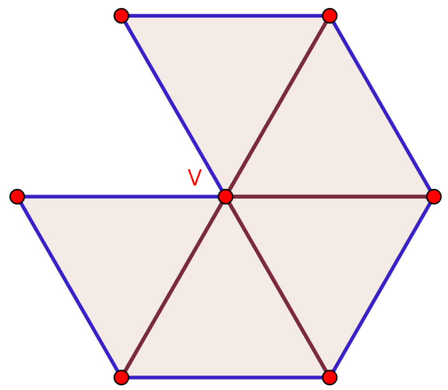
Figura 5 – Quatro triângulos equiláteros em torno do vértice V



Fonte: Produzido pelo autor

Se alguém conectar duas dessas pirâmides por suas bases, a figura simétrica com oito faces triangulares, chamada Octaedro, aparecerá. Agora, podemos tentar conectar 5 triângulos equiláteros em um vértice (a soma dos ângulos internos é igual a $300° = 5 \times 60°$).

Figura 6 – Cinco triângulos equiláteros em torno do vértice V

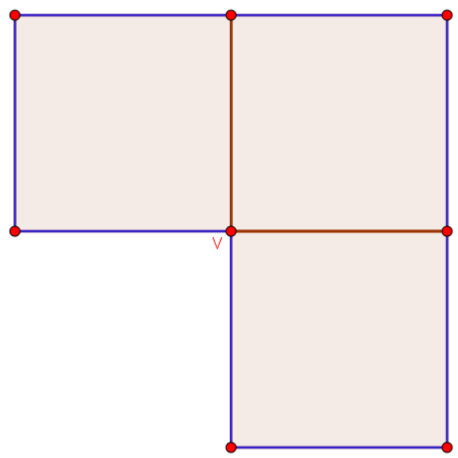


Fonte: Produzido pelo autor

Como resultado, obtemos uma figura geométrica espacial com 20 faces triangulares, chamada Icosaedro (Fig. 3-d). Não será possível a construção de seis triângulos equiláteros em torno do vértice V de um poliedro regular, pois a soma de seus ângulos internos será igual a $360° = 6 \times 60°$.

Um quadrado é o próximo polígono regular (com ângulo interno de $90°$).

Figura 7 – Três quadrados em torno do vértice V

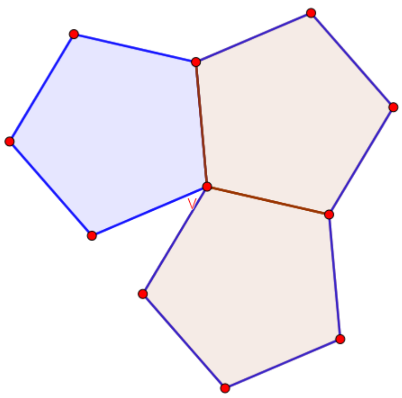


Fonte: Produzido pelo autor

Se unirmos 3 quadrados em um vértice (a soma de seus ângulos interiores igual a $270° = 3 \times 90°$) e, em seguida, adicionarmos a esta figura três novos quadrados, obteremos uma figura geométrica perfeita com 6 faces chamadas Hexaedro ou Cubo (Figura 3-c). Não será possível a construção de quatro quadrados em torno do vértice V de um poliedro regular, pois a soma de seus ângulos internos será igual a $360° = 4 \times 90°$.

Finalmente, há mais um poliedro regular para construir, com base no uso de um pentágono com cada ângulo interno medindo $108°$. Se coletarmos 12 pentágonos para que três pentágonos regulares se reúnam em cada vértice (a soma de seus ângulos internos é igual a $324° = 3 \times 108°$), então obtemos o próximo sólido platônico com 12 faces pentagonais chamado dodecaedro (Fig. 3-e).

Figura 8 – Três pentágonos em torno do vértice V



Fonte: Produzido pelo autor

O hexágono é o próximo polígono regular após o pentágono. Tem um ângulo interior de $120°$. Se conectarmos 3 hexágonos em um vértice, obteremos uma superfície porque a soma de seus ângulos interiores é igual a $360° = 3 \times 120°$. Isso significa que é impossível construir uma figura geométrica tridimensional apenas com hexágonos.

Outros polígonos regulares após o hexágono têm ângulos interiores superiores a $120°$. Isso significa que não podemos construir figuras geométricas espaciais a partir delas. Concluímos que existem apenas 5 poliedros regulares convexos, cujas faces são limitadas a triângulos equiláteros, quadrados e pentágonos.

1.3 Características numéricas dos sólidos platônicos

Em um poliedro regular, vamos chamar de:

n – Número de vértices de cada polígono;

a – Número de arestas de um poliedro;

v – Número de vértices de um poliedro;

f – Número de faces de um poliedro;

m – Número de polígonos em torno de um vértice.

Tabela 2 – Os valores desses números para cada um dos poliedros regulares

	n	a	v	f	m
Tetraedro	3	6	4	4	3
Octaedro	3	12	6	8	4
Icosaedro	3	30	12	20	5
Hexaedro	4	12	8	6	3
Dodecaedro	5	30	20	12	3

Fonte: Produzido pelo autor

Note que em um poliedro o produto entre número de vértices de cada polígono e o número de faces do poliedro é igual ao dobro do número de arestas desse poliedro. Temos que

$$n \cdot f = 2 \cdot a. \tag{1.2}$$

E também, temos que o produto entre o número de polígonos em torno de um vértice de um poliedro e o número de vértices desse mesmo poliedro é igual ao dobro do número de arestas desse poliedro. Assim,

$$m \cdot v = 2 \cdot a. \tag{1.3}$$

Comparando as equações (1.2) e (1.3), temos que:

$$v = \frac{n \cdot f}{m}. \tag{1.4}$$

Isolando o valor de a na equação (1.2), utilizando o valor de v na equação (1.4) e substituindo na relação de Euler (1.1), temos que:

$$\frac{n \cdot f}{m} + f = \frac{n \cdot f}{2} + 2.$$

Multiplicando toda a equação por 2m, temos:

$$2 \cdot n \cdot f + 2 \cdot m \cdot f = m \cdot n \cdot f + 4 \cdot m.$$

Colocando o f em evidência, temos:

$$f = \frac{4m}{2n + 2m - m \cdot n}. \tag{1.5}$$

Como todos os valores da equação (1.5) devem ser números naturais, o denominador deve ser positivo. Assim,

$$\begin{aligned} 2n + 2m - m.n > 0 \quad &\Rightarrow \quad m(2-n) > -2n \\ &\Rightarrow \quad m > \frac{-2n}{2-n} \\ &\Rightarrow \quad m > \frac{2n}{n-2}. \end{aligned}$$

Como o número de polígonos em torno de um vértice tem que ser maior ou igual a três, então, podemos encontrar o intervalor que n pode assumir.

$$\begin{aligned} \frac{2n}{n-2} > 3 \Rightarrow &\quad 2n > 3n - 6 \\ \Rightarrow &\quad 6 > 3n - 2n \\ \Rightarrow &\quad 6 > n. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Portanto, pela desigualdade (1.6), n só pode assumir valores menores que 6, ou seja, n só pode ser $3, 4$ ou 5. Logo, só podemos formar poliedros regulares com triângulos equiláteros, quadrados e pentágonos regulares. Para encontrar o número de faces f, pela equação (1.5), temos:

(i) Para o caso $n = 3$,

$$f = \frac{4m}{6-m}.$$

Se $m = 3$,

$$f = \frac{12}{3} = 4 \quad \text{(Tetraedro)}.$$

Se $m = 4$,

$$f = \frac{16}{2} = 8 \quad \text{(Octaedro)}.$$

Se $m = 5$,

$$f = \frac{20}{1} = 20 \quad \text{(Icosaedro)}.$$

Se $m = 6$,

$$f = \frac{20}{0} \quad \text{(Não existe)}.$$

(ii) Para o caso $n = 4$,

$$f = \frac{4m}{8-2m} = \frac{2m}{4-m}.$$

Se $m = 3$,

$$f = \frac{6}{1} = 6 \quad \text{(Hexaedro)}.$$

Se $m = 4$,

$$f = \frac{8}{0} \quad \text{(Não existe)}.$$

(iii) Para o caso $n = 5$,

$$f = \frac{4m}{10-3m}.$$

Se $m = 3$,

$$f = \frac{12}{1} = 12 \quad \text{(Dodecaedro)}.$$

Se $m = 4$,

$$f = \frac{16}{0} \quad \text{(Não existe)}.$$

Concluímos que podemos construir 3 poliedros regulares com triângulos equiláteros, 1 poliedro regular com quadrados e 1 poliedro regular com pentágonos. Dessa forma está provado que existem apenas 5 poliedros regulares.

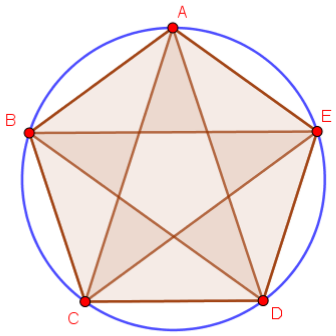
1.4 Proporção áurea do dodecaedro e icosaedro

O dodecaedro (Figura 3-e) e o icosaedro (Figura 3-d), ocupam um lugar especial entre os poliedros regulares. Vamos observar o quanto o dodecaedro e o icosaedro estão diretamente ligados a proporção áurea.

O primeiro número irracional conhecido foi o número de ouro, pois os pitagóricos não conseguiram escrever a razão entre o lado do pentágono estrelado, conhecido como pentáculo e o lado do pentágono regular inscrito numa circunferência. Essa razão é o número de ouro que iremos representar pela letra grega τ. Logo,

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Figura 9 – Pentágono regular e pentáculo inscrito na circunferência



Fonte: Produzido pelo autor

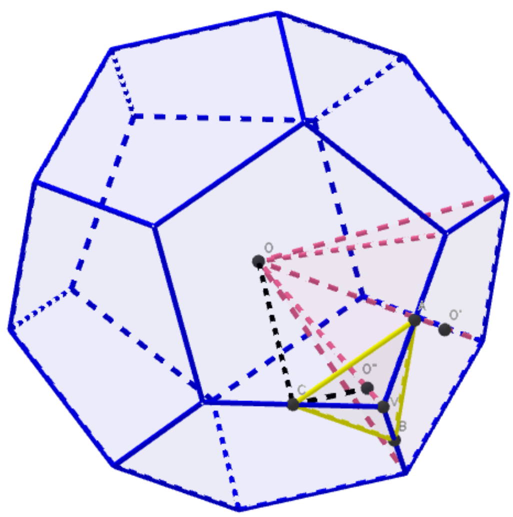
Como as faces do dodecaedro (Figura 3-e) são pentágonos regulares, então estão baseados na proporção áurea. Se analisarmos atenciosamente para o icosaedro (Figura 3-d), podemos ver cinco triângulos equiláteros que se acoplam em cada vértice do icosaedro, assim, seus lados externos formam um pentágono regular ligado à proporção áurea. Existem também relações numéricas entre o dodecaedro e o icosaedro, note que o número de faces do dodecaedro $(f = 12)$ é igual ao número de vértices do icosaedro $(v = 12)$ e o número de vértices do dodecaedro $(v = 20)$ é igual ao número de faces do icosaedro $(f = 20)$ e ambos possuem o mesmo número de arestas $(a = 30)$.

O número de ângulos em torno de cada vértice tanto do dodecaedro quanto do icosaedro apresentam uma característica relevante, no dodecaedro existem 3 pentágonos regulares em torno de cada vértice, como existem 20 vértices, temos um total de 60 ângulos planares. Já o icosaedro apresenta 5 triângulos equiláteros em torno de cada vértice, como temos 12 vértices no total, ficamos com um total de 60 ângulos planares, ou seja, a quantidade de ângulos planares no dodecaedro e no icosaedro são iguais.

Existe um papel mais profundo da proporção áurea no dodecaedro e no icosaedro. Estes sólidos regulares possuem três esferas únicas. A primeira é a esfera inscrita no poliedro platônico, onde seus centróides tocam no centro das faces do poliedro. Chamamos o raio dessa esfera inscrita de (R_i). A segunda esfera ou média esfera (meio da meseta ou interesfera) toca os centroides nas arestas do poliedro platônico. Chamaremos o raio dessa esfera de (R_m). Por último temos a esfera circunscrita no poliedro platônico que passa pelos seus vértices. Chamaremos o raio dessa esfera de (R_e).

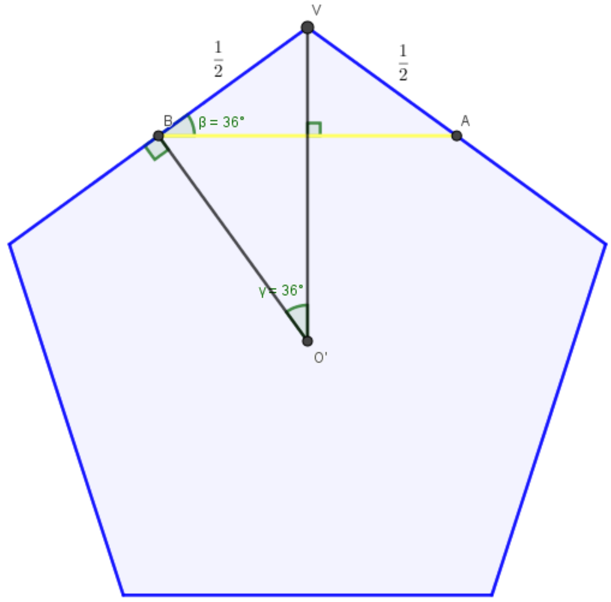
Vamos provar que os comprimentos dos raios tanto para o icosaedro quanto para o dodecaedro com lados iguais a 1 são expressos pela proporção áurea τ. Inicialmente iremos olhar para o poliedro como a união de pirâmides regulares com vértice no centro do poliedro. Tais pirâmides terão altura igual ao raio da esfera inscrita (R_i), aresta lateral igual ao raio da esfera circunscrita (R_e) e apótema da pirâmide igual ao raio da interesfera (R_m).

Agora vamos mostrar esses três raios no dodecaedro. Primeiramente tomamos os três pontos médios A, B e C das três arestas concorrentes ao mesmo vértice V.



Fonte: Produzido pelo autor

Analisando uma face do dodecaedro e chamando o seu centro de O', temos o seguinte: O segmento AO' é o apótema do pentágono regular, logo forma um ângulo reto com a aresta e o segmento VO' é bissetriz do ângulo V. Como cada ângulo interno de um pentágono regular é igual a $108°$, o ângulo AVO' é igual a $54°$. Assim o ângulo AFV é igual a $36°$. Então, pela razão trigonométrica no triângulo retângulo, temos



Fonte: Produzido pelo autor

$$\cos 36° = \frac{\frac{AB}{2}}{\frac{1}{2}} = AB.$$

Logo,

$$AB = \frac{1+\sqrt{5}}{4}. \tag{1.7}$$

Calculando o $\sin 36°$ no triângulo BVO', temos:

$$\sin 36° = \frac{\frac{1}{2}}{VO'} \quad \Rightarrow \quad VO' = \frac{1}{2 \cdot \sin 36°} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}.$$

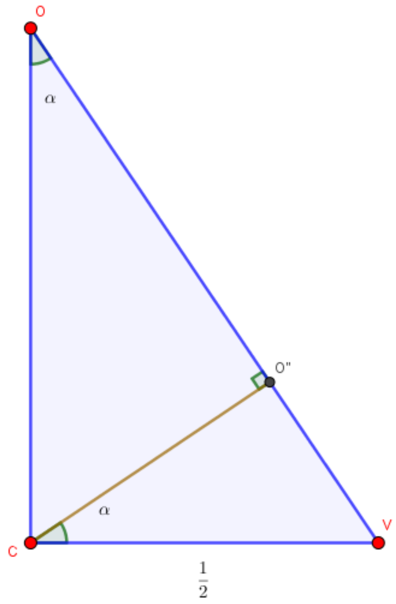
Racionalizando,

$$\sin 36° = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}. \tag{1.8}$$

Para calcular o raio da circunferência circunscrita, precisamos encontrar o valor do segmento CO''. Este segmento corresponde $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo equilátero ABC. Assim,

$$CO'' = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad CO'' = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot (\sqrt{5}+1). \tag{1.9}$$

Agora, para encontrar o R_e utilizaremos o triângulo COV. Por semelhança de triângulos temos que os ângulos VOC e VCO'' são congruentes. Calculando o $\cos \alpha$ no triângulo retângulo VCO'', temos:



Fonte: Produzido pelo autor

$$\cos\alpha = \frac{CO''}{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = 2\cdot CO''. \tag{1.10}$$

substituindo a equação (1.9) na equação (1.10), temos:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot(\sqrt{5}+1). \tag{1.11}$$

calculando o $\sin\alpha$ no triângulo retângulo COV, temos

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{R_e} \Rightarrow R_e = \frac{1}{2\cdot sen\alpha}. \tag{1.12}$$

aplicando a identidade fundamental da trigonometria, temos

$$\sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1.$$

substituindo a equação (1.11) na identidade fundamental da trigonometria, temos:

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot(\sqrt{5}+1)\right)^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad \sin^2\alpha + \frac{1}{6}\cdot(3+\sqrt{5}) = 1 \\ &\Rightarrow \quad \sin^2\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{6} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{18-6\sqrt{5}}}{6}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

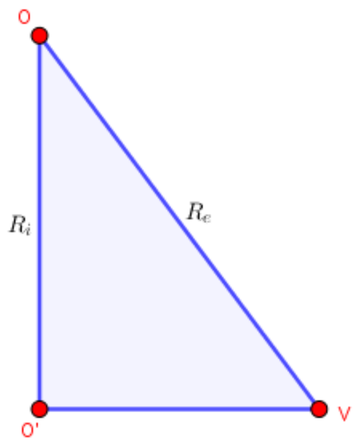
substituindo a equação (1.13) na (1.12) equação , temos:

$$R_e = \frac{1}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{18 - 6\sqrt{5}}}{6}} \quad \Rightarrow \quad R_e = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}}.$$

como $\tau = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, podemos reescrever o raio da esfera circunscrita da seguinte forma:

$$R_e = \frac{\tau.\sqrt{3}}{2}.$$

Para encontrar o raio da esfera inscrita (R_i), utilizaremos o teorema de pitágoras no triângulo retângulo OVO'. Assim:



Fonte: Produzido pelo autor

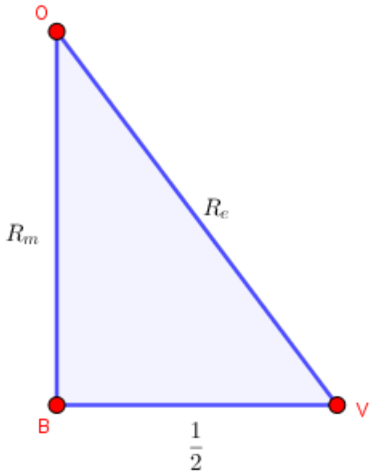
$$R_e^2 = R_i^2 + (VO')^2 \quad \Rightarrow \quad R_i^2 = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{8} - \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$$

$$\Rightarrow \quad R_i = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}.$$

como $\tau = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, podemos reescrever o raio da esfera inscrita da seguinte forma:

$$R_i = \frac{\tau^2}{2\sqrt{3 - \tau}}.$$

Para encontrar o raio da interesfera (R_m), utilizaremos o teorema de pitágoras no triângulo retângulo OBV. Assim,



Fonte: Produzido pelo autor

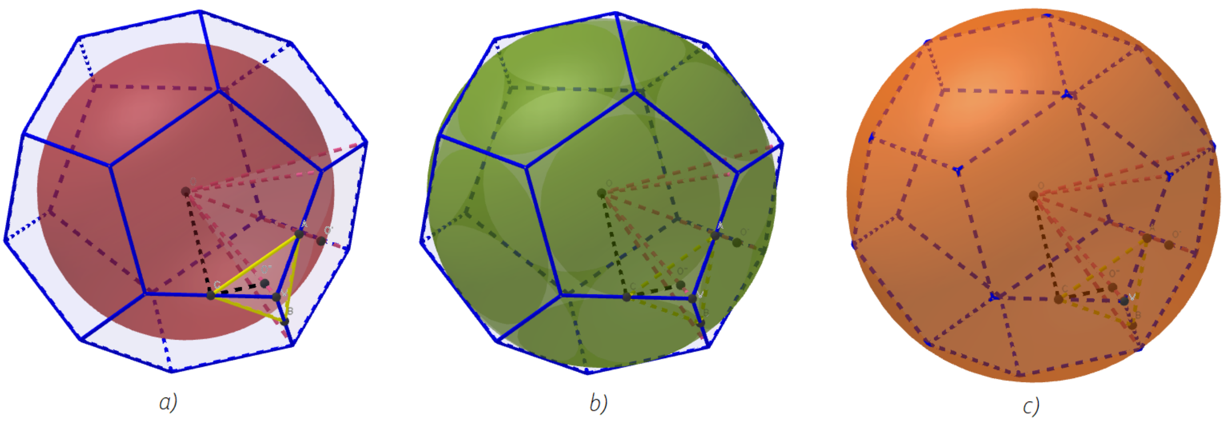
$$R_e^2 = R_m^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad R_m^2 = \frac{9+3\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \quad R_m = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}.$$

colocando (R_m) em função de τ, temos

$$R_m = \frac{\tau^2}{2}.$$

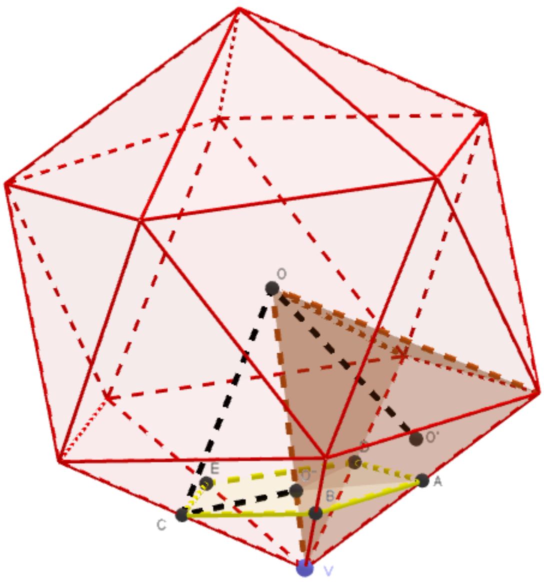
Assim, construímos as três esferas em relação ao dodecaedro:

Figura 10 – Dodecaedro: (a) Esfera inscrita, (b) Interesfera, (c) Esfera circunscrita



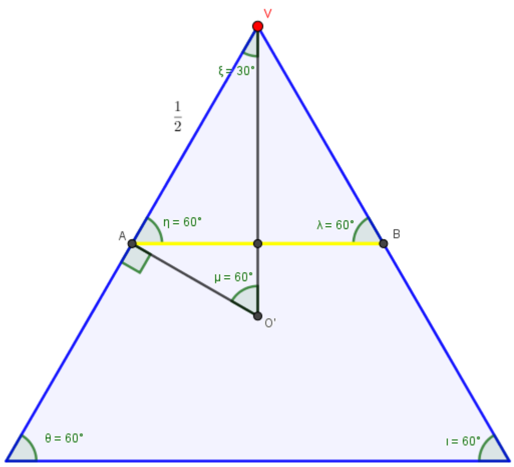
Fonte: Produzido pelo autor

Analogamente, iremos encontrar os três raios no icosaedro. Diferentemente do dodecaedro onde existem três areatas concorrentes ao mesmo vértice, no icosaedro existem cinco arestas.



Fonte: Produzido pelo autor

Assim, tomamos os cinco pontos médios A, B, C, D e E das cinco arestas concorrentes ao mesmo vértice V formando assim um pentágono regular. Analisando uma face do icosaedro e chamando o seu centro de O', temos o seguinte: O segmento AO' é o apótema do triângulo equilátero, logo forma um ângulo reto com a aresta e o segmento VO' é bissetriz do ângulo V. Como cada ângulo interno de um triângulo equilátero é igual a $60°$, o ângulo AVO' é igual a $30°$. Assim, por paralelismo, temos que o ângulo VAB e o ângulo VBA são congruentes, cujos ângulos medem $60°$. Assim, temos que



Fonte: Produzido pelo autor

$$AB = \frac{1}{2}. \tag{1.14}$$

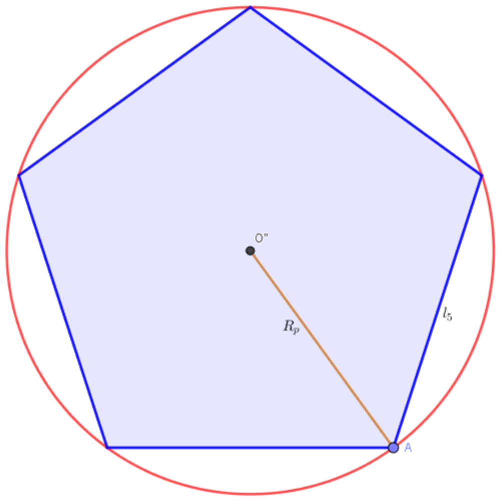
calculando o $\sin 60°$ no triângulo AVO', temos:

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{VO'}.$$

assim,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{VO'} \Rightarrow VO' = \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{1.15}$$

Para calcular o raio da circunferência circunscrita, precisamos encontrar o valor do segmento CO''. Note que este segmento corresponde ao raio da circunferência circunscrita no pentágono regular. Escrevendo o lado do pentágono regular l_5 em função do raio da circunferência circunscrita R_p. Temos,



Fonte: Produzido pelo autor

$$l_5 = \frac{R_p}{2}.\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

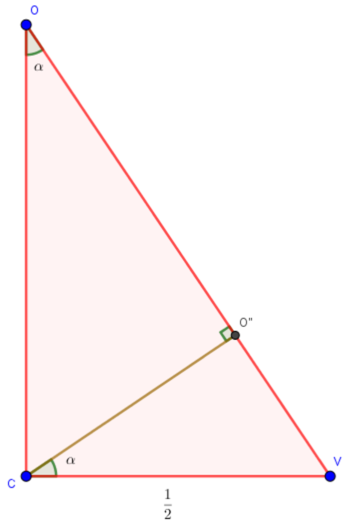
como $l_5 = \frac{1}{2}$, temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{R_p}{2}.\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \Rightarrow R_p = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{80}}.$$

assim, como $CO'' = R_p$, concluímos que:

$$CO'' = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}. \tag{1.16}$$

Agora, para encontrar o R_e utilizaremos o triângulo COV. Por semelhança de triângulos temos que os ângulos VOC e VCO'' são congruentes. Calculando o $\cos \alpha$ no triângulo retângulo VCO'', temos:



Fonte: Produzido pelo autor

$$\cos\alpha = \frac{CO''}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}. \tag{1.17}$$

calculando o $\sin\alpha$ no triângulo retângulo COV, temos

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{R_e} \Rightarrow R_e = \frac{1}{2 \cdot sen\alpha}. \tag{1.18}$$

aplicando a identidade fundamental da trigonometria, temos

$$\sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1.$$

substituindo a equação (1.17) na identidade fundamental da trigonometria, temos:

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right)^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad \sin^2\alpha + \frac{5+\sqrt{5}}{10} = 1 \\ &\Rightarrow \quad \sin^2\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

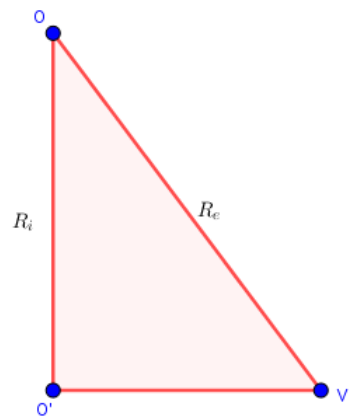
substituindo a equação (1.19) na (1.18) equação , temos:

$$R_e = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}} \quad \Rightarrow \quad R_e = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{10}{5-\sqrt{5}}}$$
$$\Rightarrow \quad R_e = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{2\cdot\sqrt{20}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad R_e = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

como $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, podemos reescrever o raio da esfera circunscrita da seguinte forma:

$$R_e = \frac{\tau\sqrt{3-\tau}}{2}.$$

Para encontrar o raio da esfera inscrita (R_i), utilizaremos o teorema de pitágoras no triângulo retângulo OVO'. Assim:



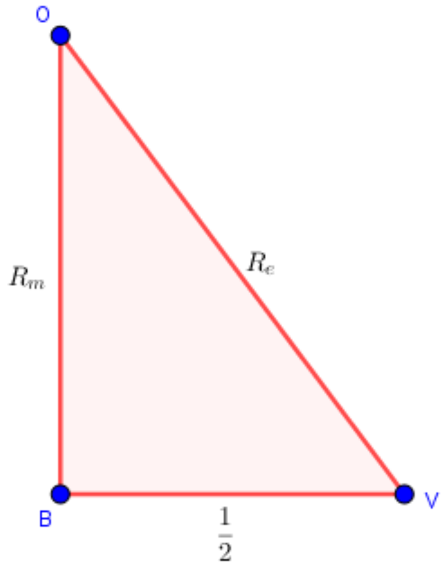
Fonte: Produzido pelo autor

$$R_e^2 = R_i^2 + (VO')^2 \quad \Rightarrow \quad R_i^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \quad R_i = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}.$$

como $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, podemos reescrever o raio da esfera inscrita da seguinte forma:

$$R_i = \frac{\tau^2}{2\sqrt{3}}.$$

Para encontrar o raio da interesfera (R_m), utilizaremos o teorema de pitágoras no triângulo retângulo OBV. Assim,



Fonte: Produzido pelo autor

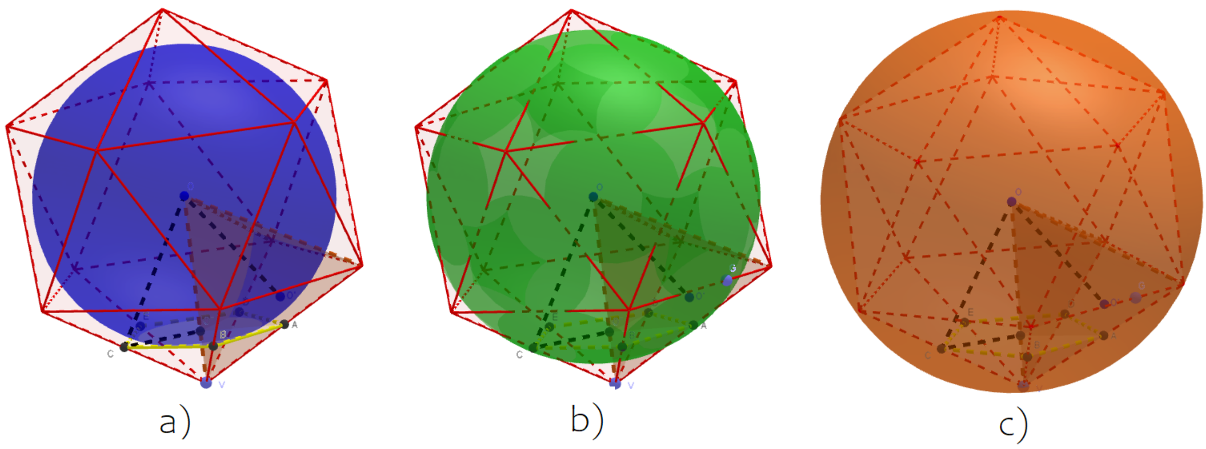
$$R_e^2 = R_m^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad R_m^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \quad R_m = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

colocando (R_m) em função de τ, temos

$$R_m = \frac{\tau}{2}.$$

Assim, construímos as três esferas em relação ao icosaedro:

Figura 11 – Icosaedro: (a) Esfera inscrita, (b) Interesfera, (c) Esfera circunscrita



Fonte: Produzido pelo autor

Tabela 3 – Os três raios do dodecaedro e icosaedro em função do número de ouro

	R_e	R_m	R_i
Icosaedro	$\dfrac{\tau\sqrt{3-\tau}}{2}$	$\dfrac{\tau}{2}$	$\dfrac{\tau^2}{2\sqrt{3}}$
Dodecaedro	$\dfrac{\tau.\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\tau^2}{2}$	$\dfrac{\tau^2}{2.\sqrt{3-\tau}}$

Fonte: Produzido pelo autor

Observe que a razão entre R_e e R_i são iguais tanto para o icosaedro quanto para o dodecaedro. Veja:

- ***Icosaedro***

$$\frac{R_e}{R_i} = \frac{\dfrac{\tau\sqrt{3-\tau}}{2}}{\dfrac{\tau^2}{2\sqrt{3}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_e}{R_i} = \frac{\tau\sqrt{3-\tau}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\tau^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_e}{R_i} = \frac{\sqrt{3\cdot(3-\tau)}}{\tau}.$$

- ***Dodecaedro***

$$\frac{R_e}{R_i} = \frac{\dfrac{\tau.\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\tau^2}{2.\sqrt{3-\tau}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_e}{R_i} = \frac{\tau.\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2.\sqrt{3-\tau}}{\tau^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_e}{R_i} = \frac{\sqrt{3\cdot(3-\tau)}}{\tau}.$$

Assim, se pegarmos um dodecaedro e um icosaedro de mesmo lado, suas esferas descritas serão idênticas.

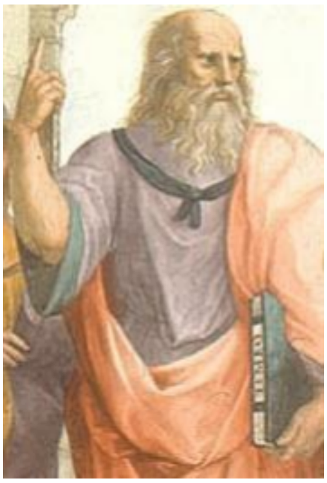
1.5 A cosmologia de Platão

1.5.1 O conhecimento do mundo

A princípio, Platão gera questionamentos fundamentais, afim de edificar sua explicação a cerca do mundo. O que causou as coisas existentes? Por que o mundo não foi formado de outra forma, mas sim desta? Existem outros mundos ou somente este? Como tornaram-se os seres vivos e todas as outras coisas visíveis?

Platão inicia sua explicação definindo o ser do Universo, aquilo que é manifesto, em dois tipos: um que ser a existente e desde sempre existiu (Desta forma, sem princípio ou fim) definitivo e semelhante a si mesmo, sempre; e outro, possuidor de um início, sendo assim, de uma causa (pois há uma causa para tudo), está propenso ao nascimento e ao devir, estando em permanente mudança. Ele questiona-se sobre qual padrão utilizado para a origem do Universo. A partir da ideia de que em nada há mais beleza do que no mundo, sendo esse "a mais perfeita e bela obra possível de se imaginar", certamente o padrão utilizado foi o eterno e definitivo, pois só ele pode criar belas coisas, já que o passageiro não pode criar nada belo. Sobre o autor do mundo, o criador desse Universo, é "impossível indicar o que seja". Apenas entendemos que a "mais completa semelhança com o ser inteligível" foi emprestada ao mundo por essa divindade. Mediante a beleza e a propensão à perfeição, o mundo foi feito a imagem dessa divindade.

Figura 12 – Platão no detalhe do afresco Escola de Atenas, de Rafael



Fonte: Internet

Segundo ele, nos é permitido conhecer as entidades definitivas e eternas, por meio da inteligência e da razão, enquanto que as entidades sensíveis (tudo o que é visível e sensível de alguma forma) somente são compreendidas pelas sensações e opinião. Na caminhada pelo entendimento do mundo, nossas palavras "devem representar o que é estável e imutável, auxiliada pela inteligência", só assim serão constantes e definitivas, e, tanto quanto realizável, de natureza categórica e definitiva. No entanto, nossas palavras sempre serão escassas, por representarem uma cópia do padrão, um espelho. Portanto, deve-se assumir a limitação do entendimento humano, utilizando-se sempre "o mito mais verossímil, sem pretensão de ultrapassar os limites". Desta forma, toda análise, por meio do diálogo, utiliza essa barreira entre a realidade e o entendimento possível.

1.5.2 A construção do universo

Com intuito de originar o Universo mais belo e perfeito possível, a divindidade atribuiu a simetria e proporção às coisas sensíveis que estavam desorganizadas. Platão questiona se seria possível a existência de outros mundos. No entanto, ao partir do pressuposto de que o mundo é a semelhança do seu divino, ele tem que ser único e pleno e não existir simultaneamente a infinitos mundos. O divino então compõe um ser único, tal como um ser animado, visível e possuidor de alma, pois todo aquele que é inteligente, possui alma. E esse ser concretiza todas as espécies viventes, “todos os animais individualmente considerados”.

Na confirmação desse ser, palpável e tangível, a divindade utilizará o fogo, a fim de proporcionar a visibilidade às coisas, e a terra, compositora das coisas sólidas. Para unir essas duas coisas, necessitam-se de uma terceira para mediar essa união. Segundo ele, isso seria necessário para formar uma estrutura em 2 dimensões. Sendo assim, inicia-se a avaliação matemática do Universo platônico: estruturas bidimensionais são limitadas ao plano, definido por três pontos, em composição não linear, sendo assim um triângulo formado. Contudo, são observados ao nosso Universo, estruturas bidimensionais, necessitando-se de um quarto ponto (sem estar no mesmo plano dos demais) para se definirem. Desta forma, acrescenta-se a água e o ar à composição do mundo. Esse processo suga tudo que há nesses quatro elementos, unindo-os pela proporção e amizade, proporcionando coesão às coisas. O mundo torna-se uma unidade, sendo incapaz de dissolver-se, exceto pelo seu próprio criador.

Como o divino arquitetou o mundo à imagem e semelhança da perfeição, atribui-lhe a mais perfeita forma e parecida consiga mesma, a esférica, a qual as extremidades dia tem por igual do ponto central; desta forma, ele fez “por acreditar que o semelhante é mil vezes mais belo que o dissemelhante”. Atribuiu-lhe então o mais natural dos movimentos, o giro em torno de si mesma. Esse ser quase tangível à perfeição, livre de qualquer moléstia ou velhice, mantém-se da sua auto-destrição, baseando-se a si mesmo “sem necessitar de coisa alguma”, e fundando todos os processos derivados dele. Em seu ponto central, a divindade pôs a alma, a qual já havia sido criada, sendo portanto mais velha e assumidos do comando. A partir do ponto central, a alma se enraízam para todo o corpo, proporcionando-lhe inteligência e razão.

1.5.3 As entidades formadas

Sendo assim, formaram-se quatro raças: a célebre dos deuses (imortal); a raça munida de "asas que cortam os ares"; a espécie das águas; a raça terrestre. A raças celestes é constituída de fogo, possui a forma esferica e foi espalhada pelo céu. Para os astros não errantes, a divindade determinou um movimento uniforme, fazendo-os permanecerem no mesmo lugar, e para os errantes, junto a esse movimento, um progressivo, dominado pelo Mesmo e pela existência. A terra é a divindade mais antiga, nascida no céu para nós nutrir. Platão não explica o movimento dos demais astros (os errantes, com movimento retrógrado): "sobre isso basta, arrematados aqui mesmo nosso relato sobre a natureza dos deuses gerados e visíveis"

Para relatar a origem dos deuses, Platão utiliza a Teogonia de Hesíodo. A formação dos mortais inicia-se "tecendo o mortal com o ímpeto", dividindo em "tantas almas quantos astros havia"e para cada alma, um astro. Neste momento, Platão exprimevo credo pitagóricos da reencarnação. Segundo ele, na primeira encarnação todos os seres surgiram igualmente. Caso obtivesse má conduta, reecarnariam como mulheres, se permacessem maus, viriam como animais, de acordo com o seu caráter. Semeou os mortais na Terra, Lua e nos outros astros. Os deuses possuem o papel, então, de administrar a raça humana da melhor forma.

1.5.4 A constituição do mundo

Já que o mundo possui uma origem, existe uma causa. Por ser A coisa mais vela que existe, ele também advém da inteligência, devido a uma "Vitória, pela persuasão, da sabedoria sobre a necessidade". Platão questionar quais elementos compõem o universo, já que a terra, o fogo, a água e a o ar já existiam antes mesmo do céu, e quais as suas propriedades. Sua primeira observação é sobre as modificações desses elementos na realidade: com o vento, a terra torna-se ar, a a partir da inflamação, o ar torna-se fogo e nasce uma pedra após a condensação da água. Assim, só podemos definir as coisas pelas modificações desses elementos.

Platão se questiona se a água, terra, fogo e ar verdadeiramente existiam ou se eram apenas ilusões dos sentidos. Ele sugere que eles existiam de fato, logo, a opinião verdadeira da inteligência compõem diferentes gêneros: "Precisamos reconhecer que se trata de coisas diferentes, por terem origem distinta e serem dissemelhantws por natureza, pois uma se produz em nós por meio da instrução; a outra por meio da persuasão"e acrescenta: "Todos os homens participam da opinião mas a inteligência é privilégio dos deuses e de um número muito reduzido de homens".

Neste momento, ele exprime sua teoria das ideias que são imutáveis, eternas, invisíveis e imperceptíveis, podendo apenas ser absorvidas pelo pensamento. As ideias são o caminho pelo qual as coisas sensíveis se formam, porém sem nunca chegar à perfeição e perenidade. As formas vistas na realidade, são modificáveis, estando sempre em movimento, perceptíveis pelas sensações e absorvidas pela opinião.

Além do mundo sensível e das ideias, ele adiciona uma definição de espaço, como uma terceira entidade, o qual "enseja tudo o que nasce de si mesmo, não é apreendido pelo sentidos, mas apenas por uma espécie de raciocínio bastardo (...) O ser, o espaço e a geração sal três princípios distintos desde antes mesmo da formação do céu".

1.5.5 A formação dos corpos

De acordo com Platão, os corpos são compostos pelo fogo, água, terra e ar. Por possuírem uma natureza tridimensional, apresentam uma superfície e uma profundidade. A superfície plana defini-se por três pontos não lineares, formando um triângulo. Todo triângulo deriva-se de um triângulo retângulo. A partir desses triângulos retângulos, formam-se os quatros elementos, "de acordo com o método que concilia a necessidade com a probabilidade". Ele relaciona a formação do mundo e dos elementos a quatro sólidos regulares: partindo do mais simples, o tetraedro, após ele, o cubo, com seis faces quadradas, seguindo-se do octaedro com oito faces triangulares e finalizando com o icosaedro, com vinte faces triangulares.

A pirâmide atribui-se ao fogo po possuir diversas pontas agudas, menor superfície, além de uma natureza móvel e cortante. O cubo é atribuído à terra por ter a base espaçosa e ser o sólido mais plástico. A água e o ar unem-se pela mobilidade e peso, sendoba águas manos móvel e mais pesada do que o ar. Desta forma, atribui-se o octaedro ao ar, por ser mais leve e penetrante que o icosaedro, relacionado à água.

As unidades desses elementos apresentam -se de maneira minúscula, quase imperceptíveis: "só percebemos as massas formadas por uma multidão deles". Esses elementos sempre surgem misturadas entre si, podendo tranformar-se entre só através do corte e da condensação. Portanto, por Platão, tudo movimenta-se e transforma-se constantemente: "daí provém a variedade, resultante da mistura entre eles mesmos e de uns com os outros".

A tentativa de explicar o mundo de Platão, une os fatores divinos, racionais, matemáticos e musicais, influenciando os pensadores futuros. O imaginário de uma ordenação dos ppliedros influenciou até Kepler, quase vinte séculos depois, apesar de ter formado as leis keplerianas, com a ideia de órbitas elípticas para os planetas, aparentemente não abandonou a ideia dos poliedros.

Unindo o mítico, racional e o ficcional, fomos edificando nossa ideia de mundo paulatinamente. Há dois mil e quinhentos anos, Platão utilizava os círculos e o Mesmo para explicar o mundo, atualmente, encontramos a materia escura e a energia escura, de grávitobs e os nêutrons e tantas outras entidades que compõem esse mundo.

2 Sólidos Arquimedianos

Filho de Fídias, um astrônomo grego, Arquimedes (287 - 212 a.C) natural de Siracusa, uma colônia grega localizada na Sicília, hoje território Italiano. Com grande influencia do pai, que reunia em sua casa a elite de filósofos e homens da ciência para compartilhar seus conhecimentos, Arquimedes se tornou Físico, Matemático e inventor.

Arquimedes dedicou-se ao seu método, aplicando a mecânica na geometria, assim ponderada áreas e volumes imaginariamente. Ele estudou na escola de Matemática de Alexandria, o centro intelectual grego. Sempre rodeado de importantes matemáticos e astrônomos, como Erotóstenes de Cirene, o primeiro matemático a calcular a circunferência da terra. Retornando à sua cidade, Arquimedes pô em prática projetos como da "gravidade específica", denominada de "Princípio de Arquimedes"no qual afirmou "Qualquer corpo mais denso que um fluido, apesar mergulhado neste, perderá peso corresponderá ao volume do fluido deslocado".

Sua descoberta tornou-se conhecida por "Princípio de Arquimedes", explicando melhor o funcionamento dos líquidos, compondo importantes fundamentos da Hidrostática.

Arquimedes orgulhava-se do seu trabalho sobre o cilindro e a esfera. Desenvolveu fórmulas de área da superfície e do volume da esfera, além de fórmulas que ajudavam a esfera no cilindro. Ele mostrou que a esfera era a figura sólida mais eficiente. Geometria lhe atraiu tanto, que no seu túmulo pediu para que gravassem uma esfera e um cilindro.

Obteve criações bélicas, como a "alavanca", possibilitando mover cargas pesadas. Utilizou esse conhecimento nas catapultas. Ele declarou: "Deem-me um ponto de apoio e uma alavanca e eu moverei a terra."

Criou grandes espelhos refletores dos raios solares nas velas dos navios, provocando incêndio nas embarcações inimigas, além de grandes gruas a fim de agarrar e virar essas embarcações.

Após a morte do rei Hieron, em 216 a.C, Siracusa foi invadida por tropas romanas e resistiu por três anos graças a invenção das catapultas de Arquimedes. Em 212a.C, Siracusa rendeu-se às tropas romanas e apesar das ordens do general romano, Marcellus Claudius, um soldado aproximou -se de Arquimedes e o matou. Os romanos honraram seu enterro e marcaram o túmulo com a esfera e o cilindro.

Figura 13 – Busto de Arquimedes em Roma, Itália

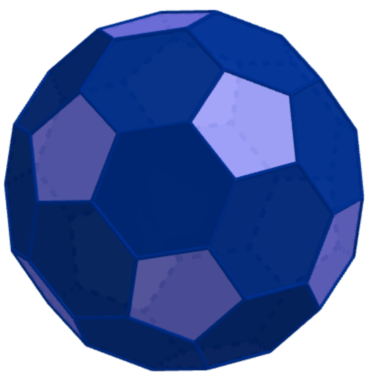
Fonte: Internet

2.1 Os 13 Sólidos Arquimedianos

O objetivo desse capítulo é mostrar a construção dos 13 sólidos arquimedianos no software GeoGebra. Os nomes desses poliedros atribuídos a Arquimedes foram dados pelo astrônomo e matemático Alemão Johann Kepler.

Definição 2.1. Os poliedros arquimedianos são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo, e todos os seus vértices são congruentes, ou seja, existe o mesmo arranjo de polígonos em torno de cada vértice, exceto pela rotação.

Figura 14 – Icosaedro truncado



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

Figura 15 – Bola da copa do mundo de 1970

Fonte: Internet

Existem várias formas de truncar um poliedro, utilizaremos dois métodos. No **primeiro método** marcaremos os pontos médios das arestas que concorrem para o mesmo vértice e construiremos um polígono regular seccionando a pirâmide que irá formar e no **segundo método** marcaremos dois pontos nas arestas que concorrem para o mesmo vértice de modo que os segmentos formados sejam congruentes, ou seja, $\dfrac{1}{3}$ da aresta, de modo que o polígono regular formado tenha o dobro de lados do polígono regular primitivo.

Figura 16 – Octaedro truncado (primeiro método)

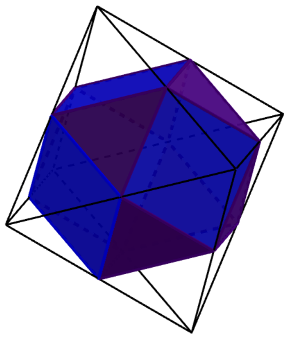
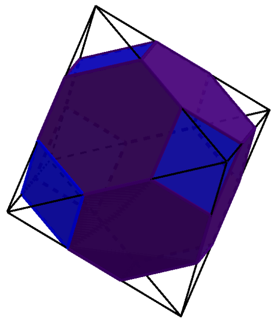


Figura 17 – Octaedro truncado (segundo método)



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2.1.1 Cubo truncado

Sabemos que o cubo possui 6 faces quadrangulares, 8 vértices e 12 arestas. Pelo **segundo método** do truncamento, obtemos um poliedro que possui 6 faces octagonais (mesmo número de faces quadrangulares do cubo e dobrando o número de arestas do polígono primitivo), 8 faces triangulares (mesma quantidade de vértices do cubo), totalizando 14 faces. Assim, pela equação (1.1), temos:

$$A = \frac{6 \cdot 8 + 8 \cdot 3}{2} = \frac{72}{2} \Rightarrow A = 36$$

e

$$V + 14 = 36 + 2 \Rightarrow V = 24.$$

Figura 18 – Truncando o cubo

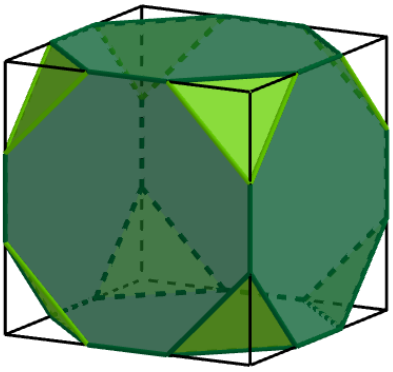
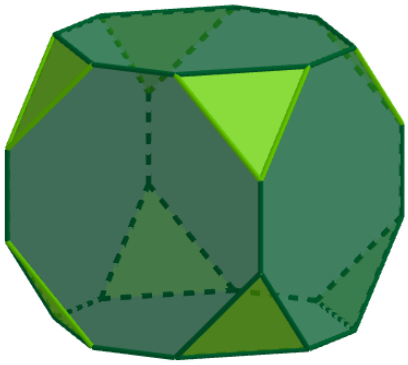


Figura 19 – Cubo truncado



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2.1.2 Cuboctaedro

O Cuboctaedro pode ser obtido pelo **primeiro método** do trucamento, seja do cubo quanto do octaedro. O octaedro possui 8 triângulos equiláteros, 6 vértices e 8 arestas, ao fazer o truncamento pelo primeiro método, obteremos 8 faces triangulares (triângulos equiláteros) e 6 faces quadradas formadas a partir dos 6 vértices do octaedro, totalizando 14 faces. Assim, pela equação (1.1), temos:

$$A = \frac{8 \cdot 3 + 6 \cdot 4}{2} = \frac{48}{2} \Rightarrow A = 24$$

e

$$V + 14 = 24 + 2 \Rightarrow V = 12.$$

Figura 20 – Truncando o cubo *primeiro método*

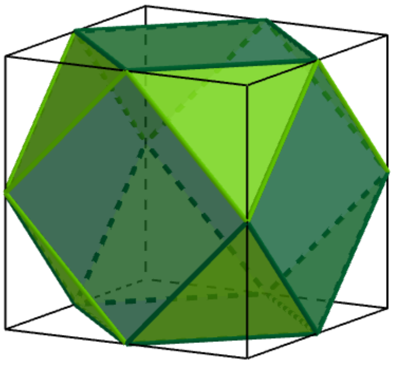
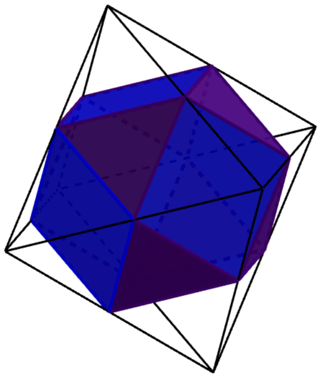


Figura 21 – Truncando o octaedro *primeiro método*



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2.1.3 Octaedro truncado

Como vimos no cuboctaedro, o octaedro é composto por 8 faces triangulares regulares, 6 vértices e 8 arestas. Pelo **segundo método** do truncamento, obtemos um poliedro que possui 8 faces hexagonais (mesmo número de faces triangulares do octaedro e dobrando o número de arestas do polígono primitivo) e 6 faces quadradas (mesma quantidade de vértices do octaedro), totalizando 14 faces. Assim, pela equação (1.1), temos:

$$A = \frac{8 \cdot 6 + 6 \cdot 4}{2} = \frac{72}{2} \Rightarrow A = 36$$

e

$$V + 14 = 36 + 2 \Rightarrow V = 24.$$

Figura 22 – Truncando o octaedro

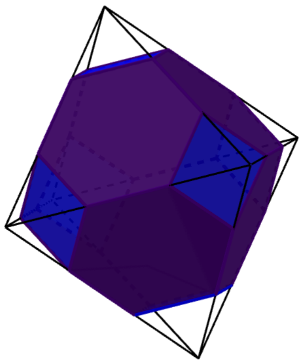
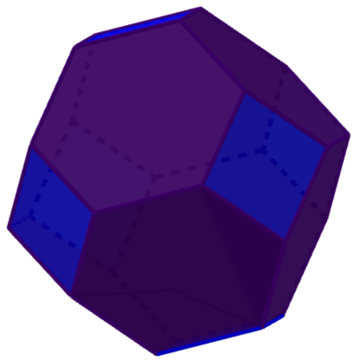


Figura 23 – Octaedro truncado



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2.1.4 Tetraedro truncado

O tetraedro é composto por 4 faces triangulares regulares, 4 vértices e 6 arestas. Pelo *segundo método* do truncamento, obtemos um poliedro que possui 4 faces hexagonais (mesmo número de faces triangulares do tetraedro e dobrando o número de arestas do polígono primitivo) e 4 faces triangulares (mesma quantidade de vértices do tetraedro), totalizando 8 faces. Assim, pela equação (1.1), temos:

$$A = \frac{4 \cdot 6 + 4 \cdot 3}{2} = \frac{36}{2} \Rightarrow A = 18$$

e

$$V + 8 = 18 + 2 \Rightarrow V = 12.$$

Figura 24 – Truncando o tetraedro

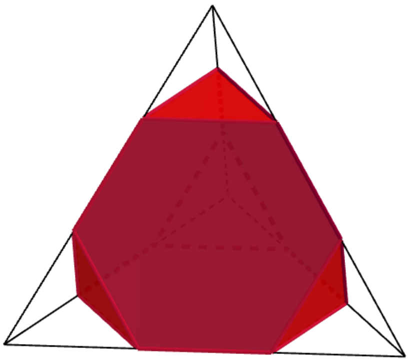
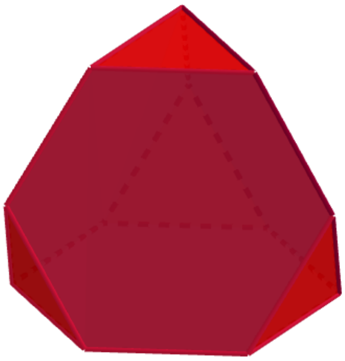


Figura 25 – Tetraedro truncado



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2.1.5 Dodecaedro truncado

Como vimos no icosidodecaedro, o dodecaedro é composto por 12 faces pentagonais regulares, 20 vértices e 30 arestas. Pelo **segundo método** do truncamento, obtemos um poliedro que possui 12 faces decagonais (mesmo número de faces pentagonais do dodecaedro e dobrando o número de arestas do polígono primitivo) e 20 faces triangulares (mesma quantidade de vértices do dodecaedro), totalizando 32 faces. Assim, pela equação (1.1), temos:

$$A = \frac{12 \cdot 10 + 20 \cdot 3}{2} = \frac{180}{2} \Rightarrow A = 90$$

e

$$V + 32 = 90 + 2 \Rightarrow V = 60.$$

Figura 26 – Truncando o dodecaedro

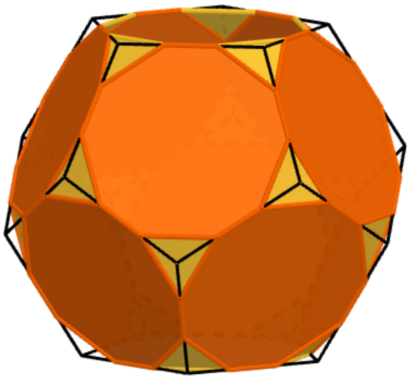
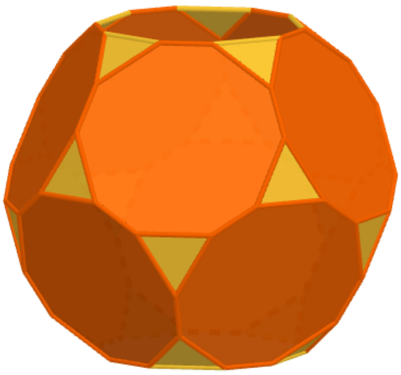


Figura 27 – Dodecaedro truncado



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2.1.6 Icosidodecaedro

O Icosidodecaedro pode ser obtido pelo **primeiro método** do trucamento, seja do icosaedro quanto do dodecaedro. O dodecaedro possui 12 pentágonos regulares, 20 vértices e 30 arestas, ao fazer o truncamento pelo primeiro método, obteremos 12 faces pentagonais e 20 faces triangulares formadas a partir dos 20 vértices do dodecaedro, totalizando 32 faces. Assim, pela equação (1.1), temos:

$$A = \frac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 3}{2} = \frac{120}{2} \Rightarrow A = 60$$

e

$$V + 32 = 60 + 2 \Rightarrow V = 30.$$

Figura 28 – Truncando o icosaedro

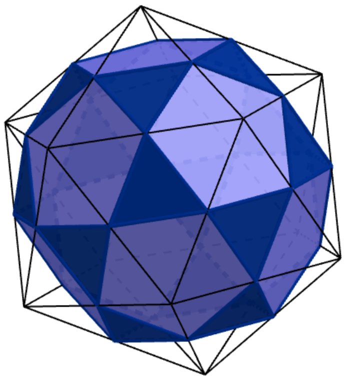
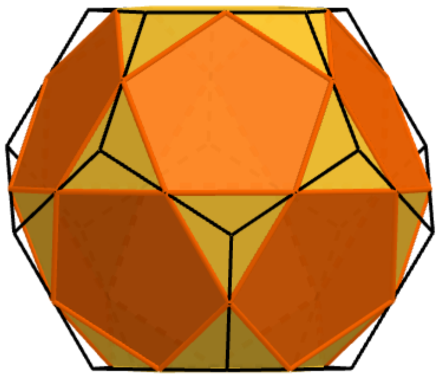


Figura 29 – Truncando o dodecaedro



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2.1.7 Icosaedro truncado

O icosaedro é composto por 20 faces triangulares regulares, 12 vértices e 30 arestas. Pelo **segundo método** do truncamento, obtemos um poliedro que possui 20 faces hexagonais (mesmo número de faces triangulares do icosaedro e dobrando o número de arestas do polígono primitivo) e 12 faces pentagonais (mesma quantidade de vértices do icosaedro), totalizando 32 faces. Assim, pela equação (1.1), temos:

$$A = \frac{20 \cdot 6 + 12 \cdot 5}{2} = \frac{180}{2} \Rightarrow A = 90$$

e

$$V + 32 = 90 + 2 \Rightarrow V = 60.$$

Figura 30 – Truncando o dodecaedro

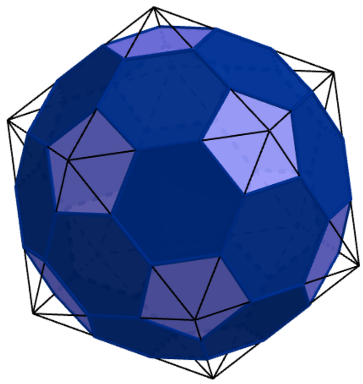
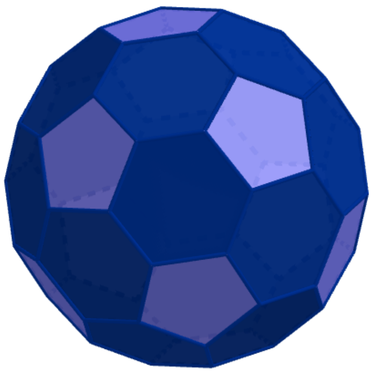


Figura 31 – Dodecaedro truncado



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2.1.8 Cuboctaedro truncado ou grande rombicuboctaedro

O Cuboctaedro é composto por 8 faces triangulares regulares, 6 faces quadradas, 12 vértices e 24 arestas. Pelo **segundo método** do truncamento, obtemos um poliedro que possui 8 faces hexagonais (mesmo número de faces triangulares do cuboctaedro e dobrando o número de arestas do polígono primitivo) e 12 faces retangulares (mesma quantidade de vértices do cuboctaedro) e 6 faces octagonais, totalizando 26 faces. Ao fazer o truncamento do cuboctaedro obtemos um sólido não arquimediano, pois as faces quadrangulares são retangulares com lados medindo l e $l\sqrt{2}$. Para transformar num sólido arquimediano, basta fazer um ajuste transformando o retângulo em um quadrado. Assim, pela equação (1.1), temos:

$$A = \frac{8 \cdot 6 + 12 \cdot 4 + 6 \cdot 8}{2} = \frac{144}{2} \Rightarrow A = 72$$

e

$$V + 26 = 72 + 2 \Rightarrow V = 48.$$

Figura 32 – Truncando o cuboctaedro

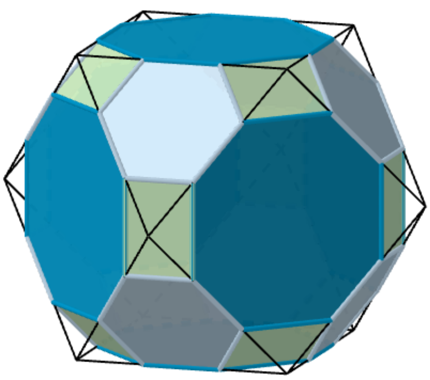
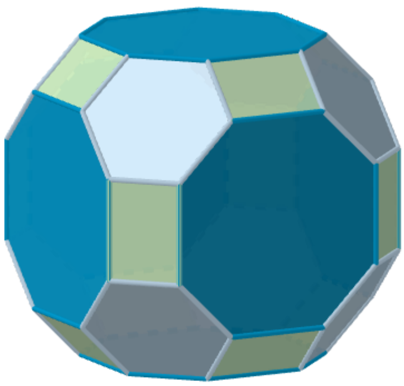


Figura 33 – cuboctaedro truncado



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2.1.9 Rombicuboctaedro

O Rombicuboctaedro pode ser obtido pelo **primeiro método** do trucamento do cuboctaedro truncado. O cuboctaedro truncado possui 8 faces triângulares regulares, 6 faces quadradas, 12 vértices e 24 arestas. Ao fazer o truncamento pelo primeiro método, obteremos 18 faces quadradas e 8 faces triangulares regulares, totalizando 26 faces. Assim, pela equação (1.1), temos:

$$A = \frac{18 \cdot 4 + 8 \cdot 3}{2} = \frac{96}{2} \Rightarrow A = 48$$

e

$$V + 26 = 48 + 2 \Rightarrow V = 24.$$

Figura 34 – Truncando o cuboctaedro truncado

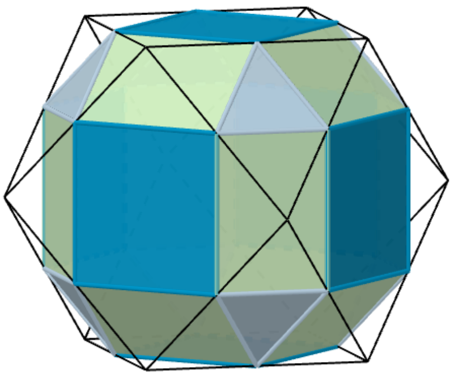
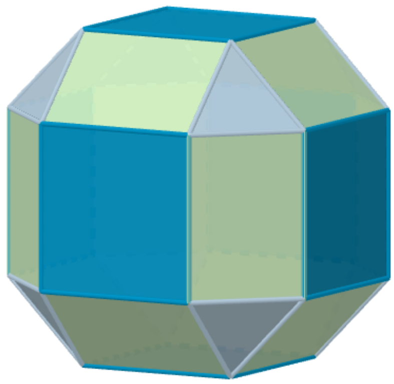


Figura 35 – Truncando o cuboctaedro truncado



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2.1.10 Icosidodecaedro truncado ou grande rombicosidodecaedro

O Icosidodecaedro é composto por 12 faces pentagonais regulares, 20 faces triangulares regulares, 30 vértices e 60 arestas. Pelo **segundo método** do truncamento, obtemos um poliedro que possui 12 faces decagonais regulares (mesmo número de faces pentagonais do cuboctaedro e dobrando o número de arestas do polígono primitivo) e 20 faces hexagonais regulares e 30 faces retangulares, totalizando 62 faces. Ao fazer o truncamento do icosidodecaedro obtemos um sólido não arquimediano, pois as faces quadrangulares são retangulares, para transformar num sólido arquimediano, basta fazer um ajuste transformando o retângulo em um quadrado. Assim, pela equação (1.1), temos:

$$A = \frac{12 \cdot 10 + 20 \cdot 6 + 30 \cdot 4}{2} = \frac{360}{2} \Rightarrow A = 180$$

e

$$V + 62 = 180 + 2 \Rightarrow V = 120.$$

Figura 36 – Truncando o icosidodecaedro

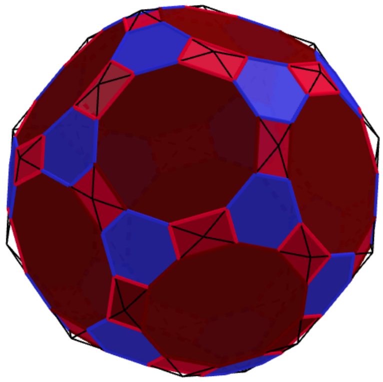
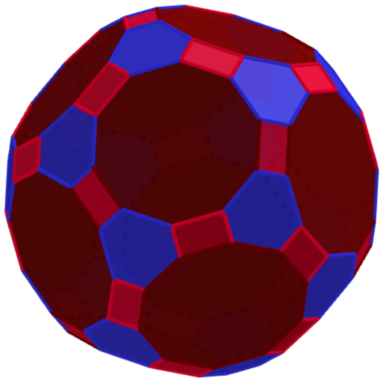


Figura 37 – icosidodecaedro truncado



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2.1.11 Rombicosidodecaedro (ou pequeno rombicosidodecaedro)

O Rombicosidodecaedro pode ser obtido pelo **primeiro método** do trucamento do icosidodecaedro. O icosidodecaedro possui 20 faces triângulares regulares, 12 faces pentagonais, 30 vértices e 60 arestas. Ao fazer o truncamento pelo primeiro método, obteremos 30 faces quadradas, 12 faces pentagonais regulares e 20 faces triangulares regulares, totalizando 62 faces. Assim, pela equação (1.1), temos:

$$A = \frac{30 \cdot 4 + 12 \cdot 5 + 20 \cdot 3}{2} = \frac{240}{2} \Rightarrow A = 120$$

e

$$V + 62 = 120 + 2 \Rightarrow V = 60.$$

Figura 38 – Truncando o icosidodecaedro

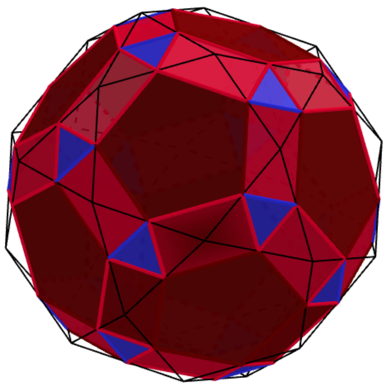
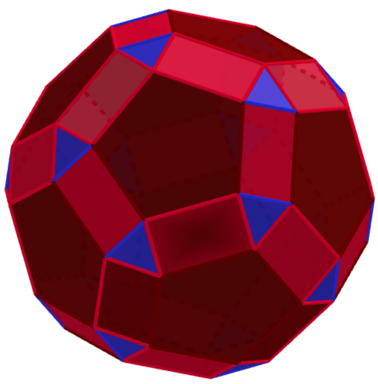


Figura 39 – Rombicosidodecaedro



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2.2 Construção dos 13 sólidos Arquimedianos no GeoGebra

2.2.1 Apresentando o GeoGebra

O Geogebra é um dos softwares educacionais matemáticos mais populares, devido à sua diversidade de recursos e possibilidades de utilização.

Geogebra, junção de geometria e álgebra, é um aplicativo que une conceitos geométricos e algébricos. Possui livre distribuição nos termos da GNU (General Publuc License) e é escrito em Java.

Originado por Markus Hohenwater para utilizar em sala de aula, iniciou-se o projeto em 2001, na Universitat Salzburg e desenvolve -se na Florida Atlantic University.

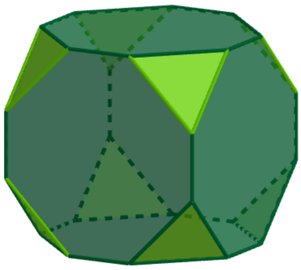
Com o programa, é possível a construção geométrica através de pontos, retas, segmentos de retas, polígonos e etc, além de possibilitar a alteração dos objetos dinamicamente, após finalizados. Pode inserir também equações e coordenadas. Sendo assim, o Geogebra também lida com variáveis para números, vetores, pontos, integrar e derivar funções, além de encontrar pontos e raízes extremos de uma função. Portanto, o programa une ferramentas tradicionais da geometria, da álgebra e do cálculo. Assim, observa -se as vantagens de representar nonmesmo ambiente visual, características algébricas e geométricas de um mesmo objeto. Utilizaremos a versão 5.0 do GeoGebra.

Figura 40 – Área de trabalho do GeoGebra

Fonte: Produzido pelo autor (2019)

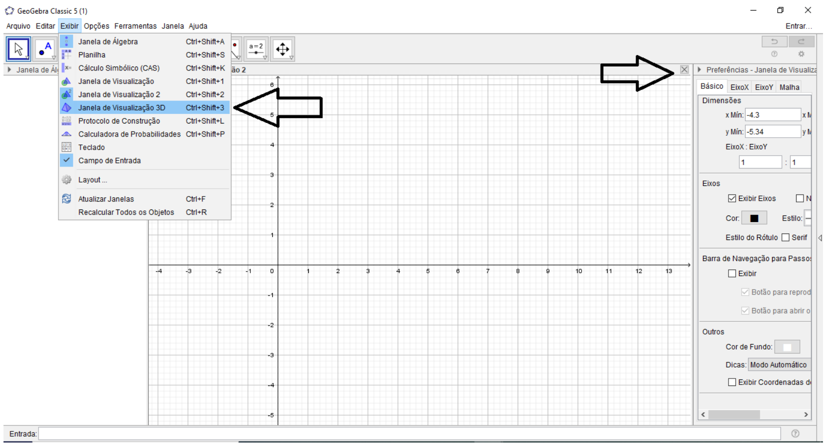
2.2.2 Processo de construção do Cubo truncado

Figura 41 – Cubo truncado



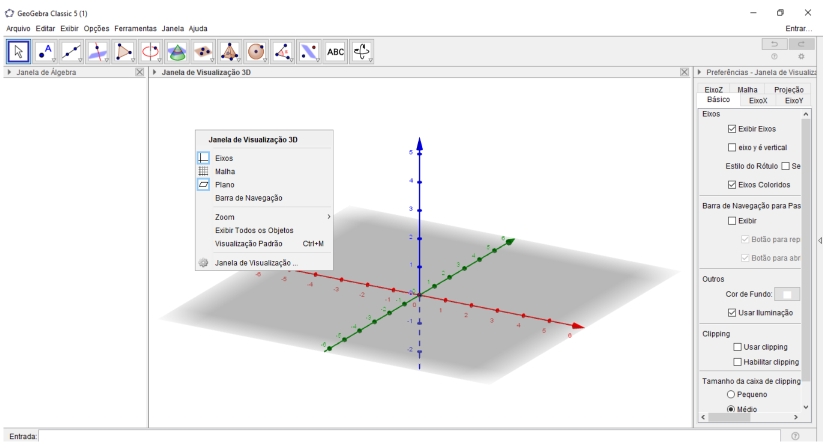
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

1º Passo: Clique em *Exibir* na barra de ferramenta, clique em *Janela de Visualização 3D* e logo após feche a janela de visualização 2D.



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2º Passo: Na janela de visualização 3D, clique com o botão direito do mouse e clique em *Eixos* e *Malhas*. Iremos desabilitar o eixo e habilitar a malha.



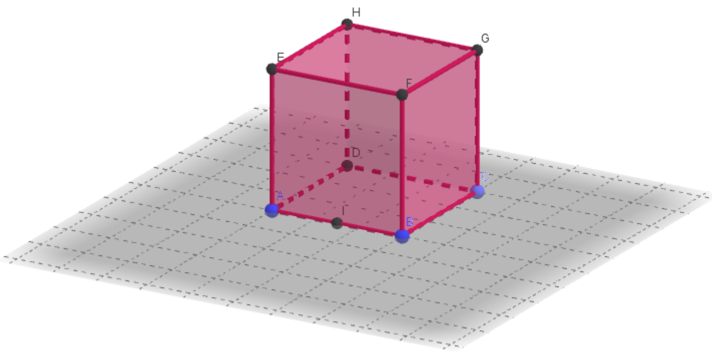
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

3º Passo: Na barra de ferramenta, clique na seta que fica em baixo do botão *ponto* (ao passar o mouse pelos botões aparece o nome) e em seguida clique em *ponto* Ponto. Logo após faça dois pontos A e B no plano.

4º Passo: Clique na seta que fica em baixo do botão *pirâmide* e em seguida clique em *cubo* Cubo. Logo após clique nos pontos A e B no plano.

5º Passo: Com o cubo criado, vamos encontrar o ponto médio do segmento AB clicando no botão *ponto* e em seguida clique em *ponto médio ou centro* Ponto Médio ou Centro. Logo após clique no segmento AB no plano, construindo assim o ponto I.

Figura 42 – Construção do cubo truncado após o **5º passo**



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

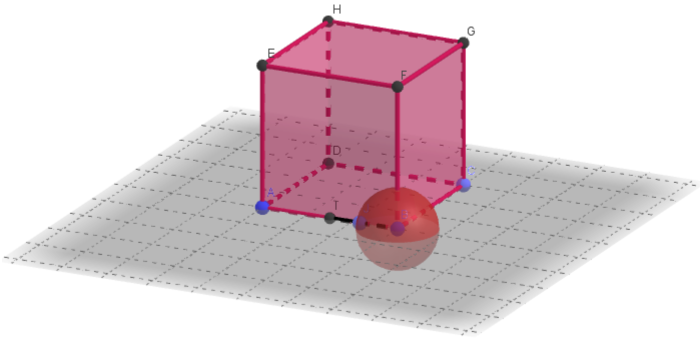
6º Passo: Clique no botão *reta* e em seguida clique em *segmento* Segmento e clique nos pontos I e no ponto B.

7º Passo: Clique no botão *ponto* e em seguida clique no segmento IB construído assim o ponto J, de modo que este ponto se mova apenas no segmento IB. Para comprovar, clique no botão *mover* e clique no ponto construído mova-o para comprovar que o mesmo está somente sobre o segmento IB.

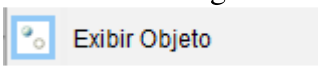
8º Passo: Clique no botão *esfera* e em seguida clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos e clique no ponto B e no ponto J criando assim uma esfera centrada no ponto B e tendo como raio o segmento BJ.

9º Passo: Clique no botão *ponto* e em seguida clique em *Interseção de Dois Objetos*, logo após selecione a esfera e a aresta BF, criando o ponto K e depois selecione a esfera e a aresta BC, criando o ponto L.

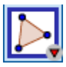
Figura 43 – Construção do cubo truncado após o **8º passo**

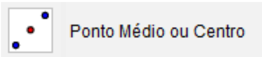


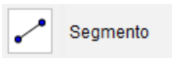
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

10º Passo: Clique no botão *mover*  e em seguida clique com o botão direito na esfera e desmarque a opção *exibir objeto* 

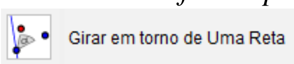
.

11º Passo: Clique no botão *polígono*  e em seguida clique nos pontos J, K, L e J novamente para fechar o polígono, construindo assim o triângulo $t1$.

12º Passo: Clique no botão *ponto*  e em seguida clique em *ponto médio ou centro* 

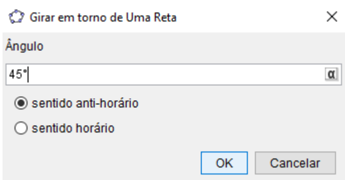
e selecione as faces $EFGH$ e $ABCD$. Logo após clique no botão *reta*  e em seguida clique em *segmento* 

e clique nos pontos O e no ponto P, criando o segmento de reta g.

13º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o triângulo $t1$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70-a), digite $90°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $180°$ e depois $270°$. Criando assim 4 triângulos.

Figura 44 – Janela de Rotação em torno de uma reta

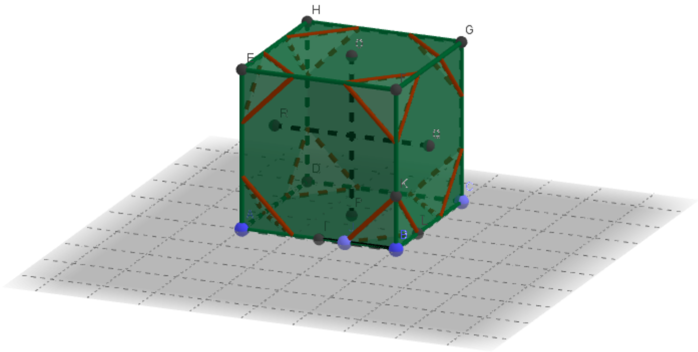


Fonte: Produzido pelo autor (2019)

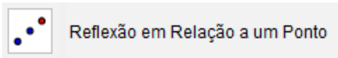
14º Passo: Para construir os 4 triângulos em torno dos vértices E, F, G e H, seguiremos o mesmo processo a partir do (**12º Passo**) sendo que agora selecionaremos as faces $BCFG$ e

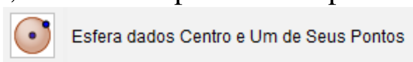
$ADEH$.

Figura 45 – Construção do cubo truncado após o **14º passo**

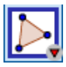


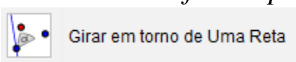
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

15º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Reflexão em Relação a um Ponto* 

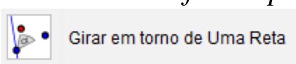
, selecione o ponto J e o ponto I. Logo após clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* 

e clique nos pontos A e J'. Encontre o ponto de interseção e repita o processo pra criar a esfera com centro nos pontos E e F.

16º Passo: Clique no botão *polígono*  e em seguida clique nos pontos construídos através da interseção das esferas e as arestas formadas pelo truncamento, construindo o octógono regular.

17º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

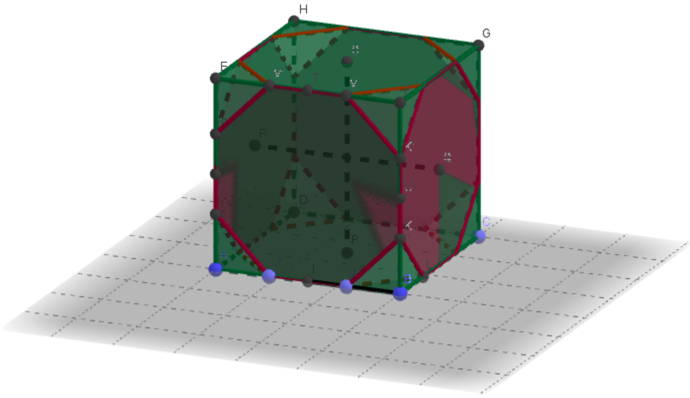
, selecione o octógono e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $90°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $180°$ e depois $270°$. Criando assim 4 octógonos.

18º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

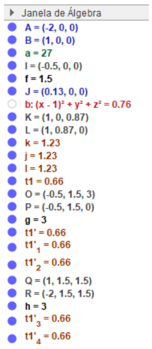
, selecione o octógono e logo após selecione o segmento de reta h. Aparecerá uma janela (Figura 70-a), digite $90°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $270°$. Criando assim os 2 octógonos restantes.

19º Passo: Na Janela de Álgebra, oculte todos os objetos clicando na bola azul, deixando apenas as 6 faces octagonais e as 8 faces triangulares e o ponto J.

Figura 46 – Construção do cubo truncado após o **18º passo**



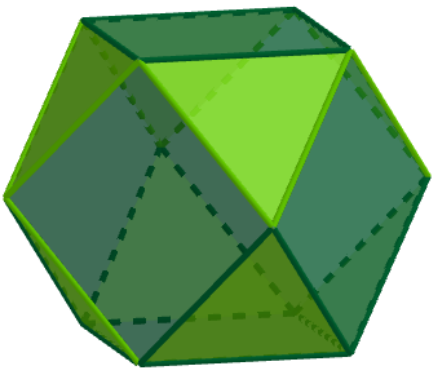
Fonte: Produzido pelo autor (2019)



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2.2.3 Processo de construção do Cuboctaedro

Figura 47 – Truncando o octaedro

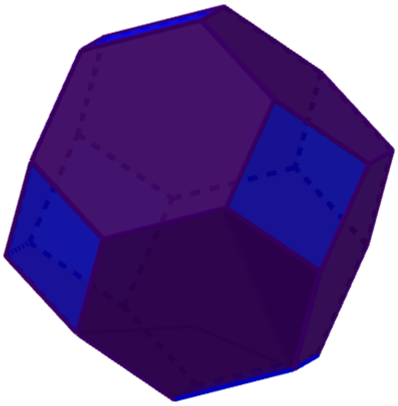


Fonte: Produzido pelo autor (2019)

Para construir o cuboctaedro basta seguir todos os passos da construção do cubo truncado e arrastar o $PontoJ$ até o $PontoI$, passando do **segundo método** para o **primeiro método** de truncamento.

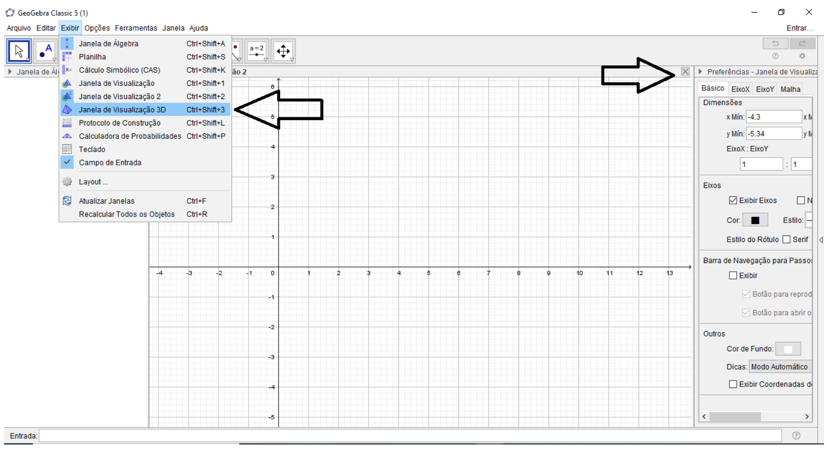
2.2.4 Processo de construção do Octaedro truncado

Figura 48 – Octaedro truncado



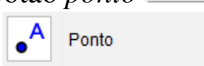
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

1º Passo: Clique em *Exibir* na barra de ferramenta, clique em *Janela de Visualização 3D* e logo após feche a janela de visualização 2D.



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2º Passo: Na janela de visualização 3D, clique com o botão direito do mouse e clique em *Eixos* e *Malhas*. Iremos desabilitar o eixo e habilitar a malha.

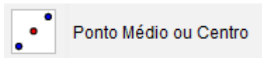
3º Passo: Na barra de ferramenta, clique na seta que fica em baixo do botão *ponto*  (ao passar o mouse pelos botões aparece o nome) e em seguida clique em *ponto* 

. Logo após faça dois pontos A e B no plano.

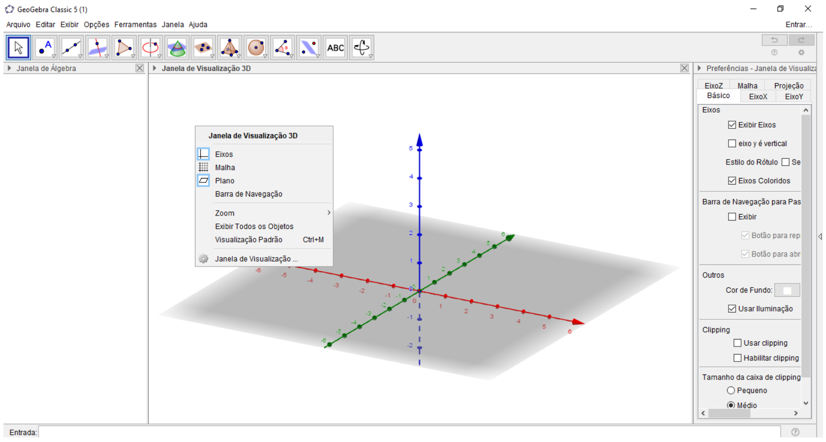
4º Passo: Na janela Entrada 

, digite Octaedro na opção $< Ponto, Ponto >$ 

e em seguida clique nos pontos A e B no plano.

5º Passo: Com o octaedro criado, vamos encontrar o ponto médio do segmento AB clicando no botão *ponto*  e em seguida clique em *ponto médio ou centro* 

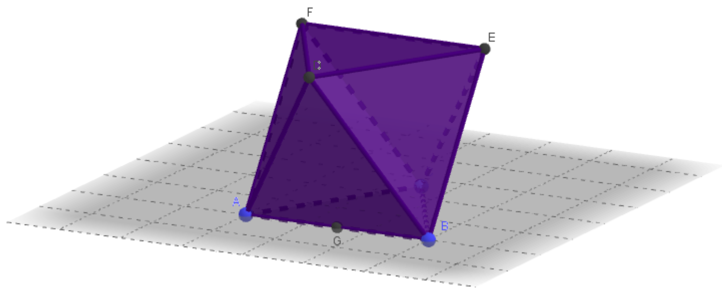
.



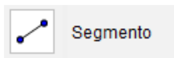
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

Logo após clique no segmento AB no plano, construindo assim o ponto G.

Figura 49 – Construção do octaedro truncado após o **5º passo**

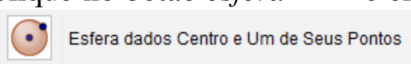


Fonte: Produzido pelo autor (2019)

6º Passo: Clique no botão *reta*  e em seguida clique em *segmento* 

e clique nos pontos G e no ponto B.

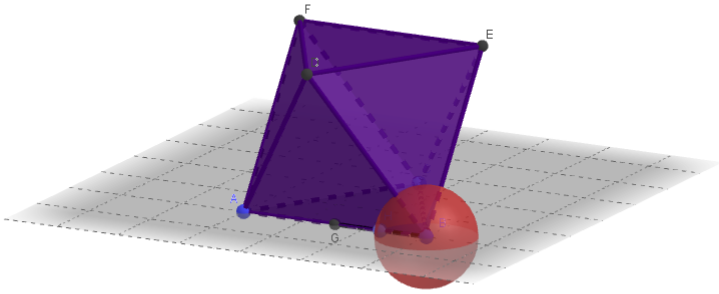
7º Passo: Clique no botão *ponto*  e em seguida clique no segmento GB construído assim o ponto H, de modo que este ponto se mova apenas no segmento GB. Para comprovar, clique no botão *mover*  e clique no ponto construído mova-o para comprovar que o mesmo está somente sobre o segmento GB.

8º Passo: Clique no botão *esfera*  e em seguida clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* 

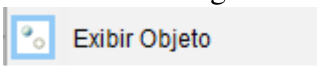
e clique no ponto B e no ponto H criando assim uma esfera centrada no ponto B e tendo como raio o segmento BH.

9º Passo: Clique no botão *ponto*  e em seguida clique em *Interseção de Dois Objetos*, logo após selecione a esfera e a aresta BD, criando o ponto I, depois selecione a esfera e a aresta BE, criando o ponto J e por fim, selecione a esfera e a aresta BC, criando o ponto K.

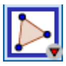
Figura 50 – Construção do octaedro truncado após o **8º passo**

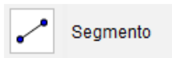


Fonte: Produzido pelo autor (2019)

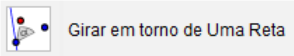
10º Passo: Clique no botão *mover*  e em seguida clique com o botão direito na esfera e desmarque a opção *exibir objeto* 

.

11º Passo: Clique no botão *polígono*  e em seguida clique nos pontos H, I, J, K e H novamente para fechar o polígono, construindo assim o quadrado $q1$.

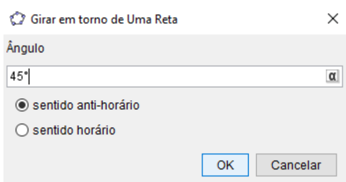
12º Passo: Clique no botão *reta*  e em seguida clique em *segmento* 

e clique nos pontos A e no ponto E construindo o segmento g.

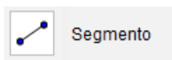
13º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o quadrado $q1$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $90°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $180°$ e depois $270°$. Criando assim 4 quadrados.

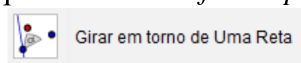
Figura 51 – Janela de Rotação em torno de uma reta



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

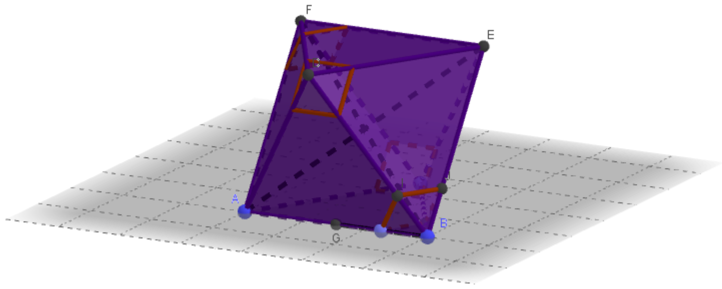
14º Passo: Clique no botão *reta*  e em seguida clique em *segmento* 

e clique nos pontos B e no ponto F construindo o segmento h.

15º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

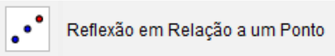
, selecione o quadrado $q1'$ na janela de álgebra e

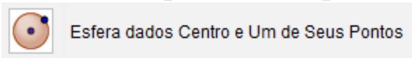
Figura 52 – Construção do octaedro truncado após o **14º passo**



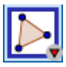
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

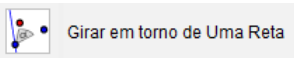
logo após selecione o segmento de reta h. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $90°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $270°$. Criando assim 2 quadrados.

16º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Reflexão em Relação a um Ponto* 

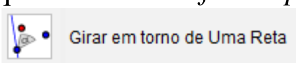
, selecione o ponto H e o ponto G. Logo após clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* 

e clique nos pontos A e H'. Encontre o ponto de interseção e repita o processo pra criar a esfera com centro nos pontos A e D.

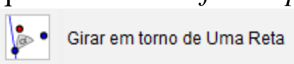
17º Passo: Clique no botão *polígono*  e em seguida clique nos pontos construídos através da interseção das esferas e as arestas formadas pelo truncamento, construindo o hexágono regular.

18º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o hexágono e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $90°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $180°$ e depois $270°$. Criando assim 4 hexágonos.

19º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

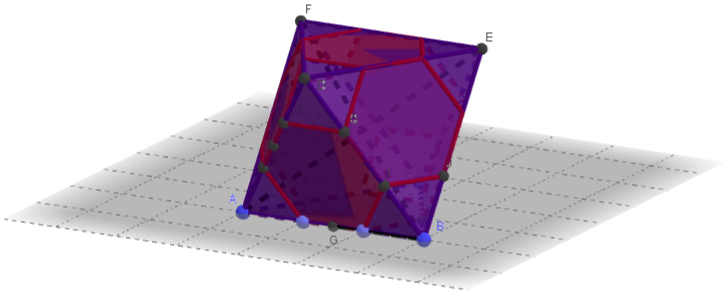
, selecione o hexágono $pol1$ e logo após selecione o segmento de reta l. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $90°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $180°$. Criando assim 2 hexágonos.

20º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o hexágono $pol1'$ e logo após selecione o segmento de reta l. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $90°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $180°$. Criando assim 2 hexágonos.

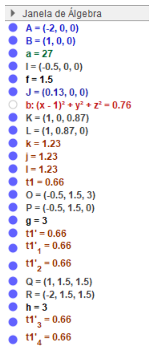
20º Passo: Na Janela de Álgebra, oculte todos os objetos clicando na bola azul, deixando

Figura 53 – Construção do cubo truncado após o **20º passo**



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

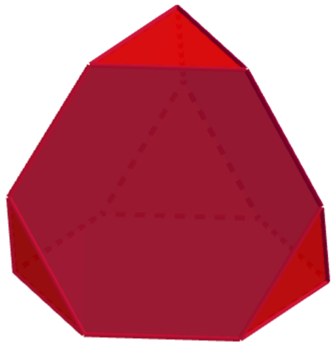
apenas as 6 faces quadrangulares e as 8 faces hexagonais e o ponto J.



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

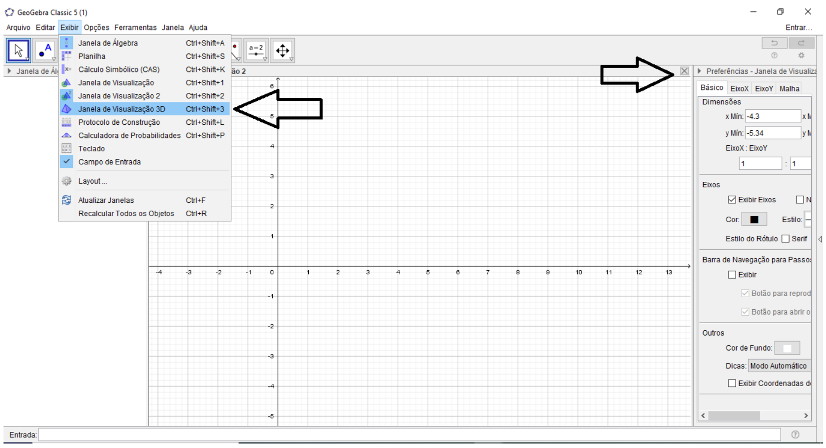
2.2.5 Processo de construção do Tetraedro truncado

Figura 54 – Octaedro truncado



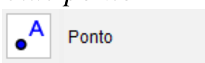
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

1º Passo: Clique em *Exibir* na barra de ferramenta, clique em *Janela de Visualização 3D* e logo após feche a janela de visualização 2D.



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

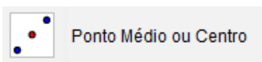
2º Passo: Na janela de visualização 3D, clique com o botão direito do mouse e clique em *Eixos* e *Malhas*. Iremos desabilitar o eixo e habilitar a malha.

3º Passo: Na barra de ferramenta, clique na seta que fica em baixo do botão *ponto*  (ao passar o mouse pelos botões aparece o nome) e em seguida clique em *ponto* 

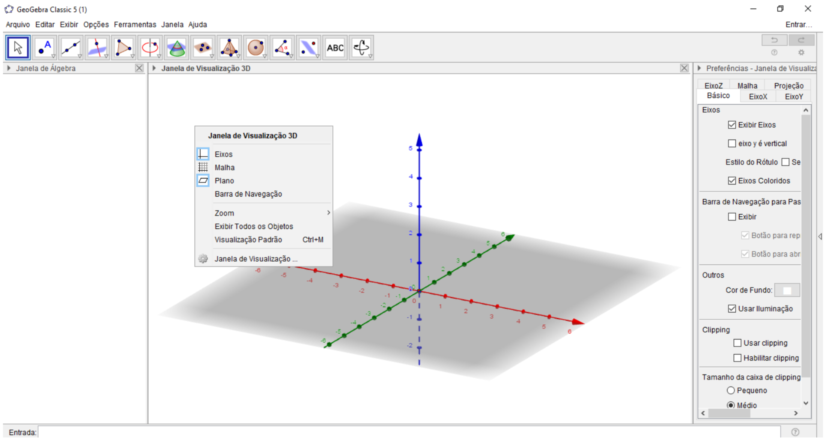
. Logo após faça dois pontos A e B no plano.

4º Passo: Na barra de ferramenta, clique no botão *Pirâmide*  e em seguida clique em *Tetraedro* 

e em seguida clique nos pontos A e B no plano.

5º Passo: Com o octaedro criado, vamos encontrar o ponto médio do segmento AB clicando no botão *ponto*  e em seguida clique em *ponto médio ou centro* 

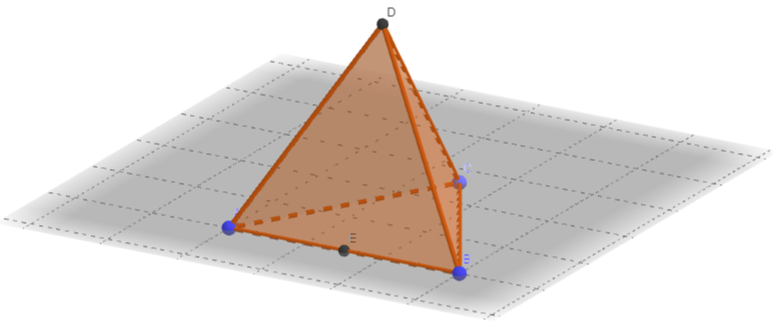
.



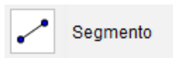
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

Logo após clique no segmento AB no plano, construindo assim o ponto E.

Figura 55 – Construção do tetraedro truncado após o **5º passo**

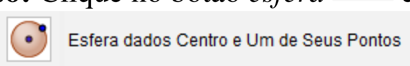


Fonte: Produzido pelo autor (2019)

6º Passo: Clique no botão *reta*  e em seguida clique em *segmento* 

e clique nos pontos E e no ponto B.

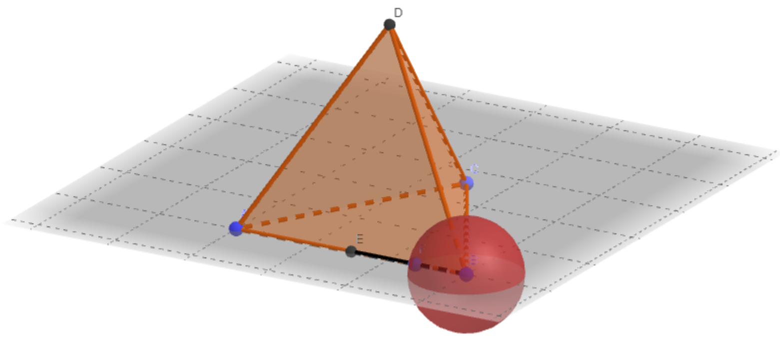
7º Passo: Clique no botão *ponto*  e em seguida clique no segmento EB construído assim o ponto F, de modo que este ponto se mova apenas no segmento EB. Para comprovar, clique no botão *mover*  e clique no ponto construído mova-o para comprovar que o mesmo está somente sobre o segmento EB.

8º Passo: Clique no botão *esfera*  e em seguida clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* 

e clique no ponto B e no ponto F criando assim uma esfera centrada no ponto B e tendo como raio o segmento BF.

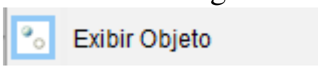
9º Passo: Clique no botão *ponto*  e em seguida clique em *Interseção de Dois Objetos*, logo após selecione a esfera e a aresta BD, criando o ponto G e depois selecione a

Figura 56 – Construção do tetraedro truncado após o **8º passo**

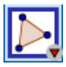


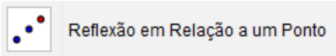
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

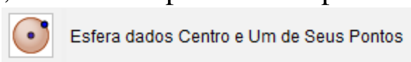
esfera e a aresta BC, criando o ponto I.

10º Passo: Clique no botão *mover*  e em seguida clique com o botão direito na esfera e desmarque a opção *exibir objeto* 

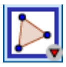
.

11º Passo: Clique no botão *polígono*  e em seguida clique nos pontos F, G, I e F novamente para fechar o polígono, construindo assim o triângulo equilátero $t1$.

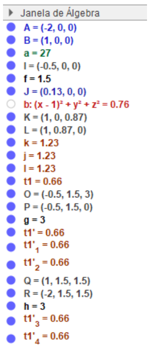
12º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Reflexão em Relação a um Ponto* 

, selecione o ponto F e o ponto E. Logo após clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* 

e clique nos pontos A e F'. Encontre o ponto de interseção e repita o processo pra criar a esfera com centro nos pontos C e D.

13º Passo: Clique no botão *polígono*  e em seguida clique nos pontos construídos através da interseção das esferas e as arestas formadas pelo truncamento, construindo o hexágono regular.

14º Passo: Na Janela de Álgebra, oculte todos os objetos clicando na bola azul, deixando apenas as 4 faces triangulares e as 4 faces hexagonais e o ponto F.



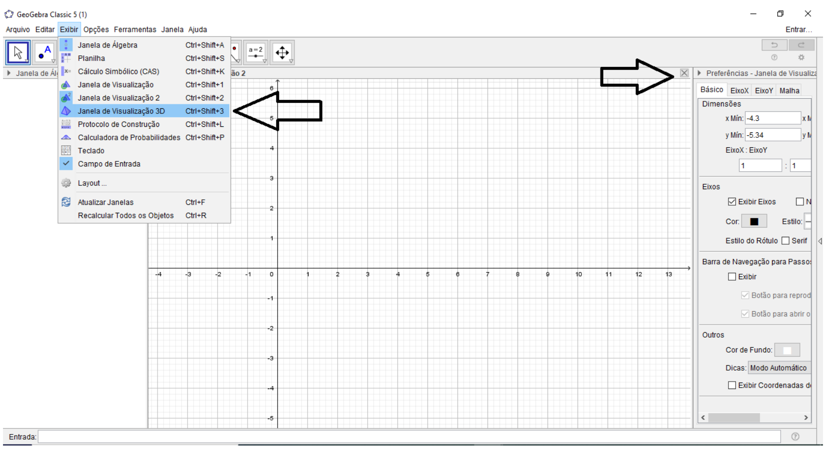
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2.2.6 Processo de construção do Dodecaedro truncado

Figura 57 – Dodecaedro truncado

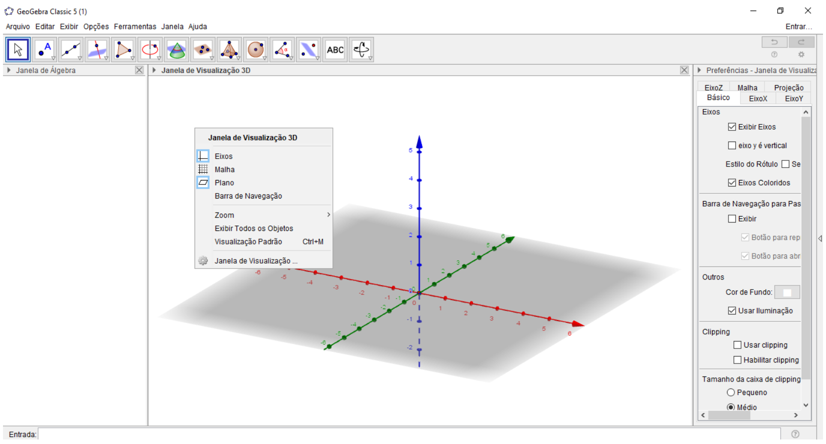
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

1º Passo: Clique em *Exibir* na barra de ferramenta, clique em *Janela de Visualização 3D* e logo após feche a janela de visualização 2D.



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2º Passo: Na janela de visualização 3D, clique com o botão direito do mouse e clique em *Eixos* e *Malhas*. Iremos desabilitar o eixo e habilitar a malha.



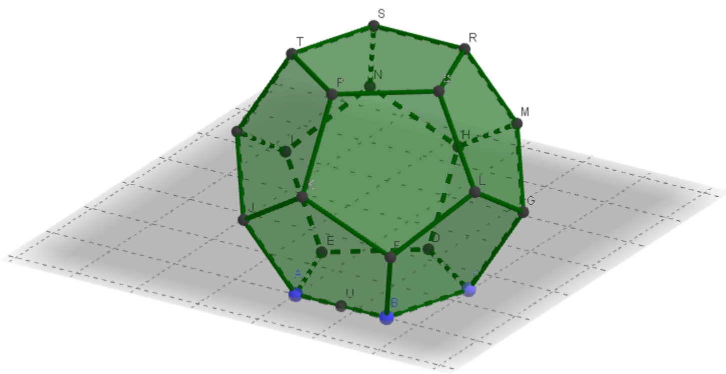
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

3º Passo: Na barra de ferramenta, clique na seta que fica em baixo do botão *ponto*  (ao passar o mouse pelos botões aparece o nome) e em seguida clique em *ponto* Ponto. Logo após faça dois pontos A e B no plano.

4º Passo: Na janela Entrada Entrada: dodecaedro, digite Octaedro na opção $< Ponto, Ponto >$ Dodecaedro(<Ponto>, <Ponto>) e em seguida clique nos pontos A e B no plano.

5º Passo: Com o dodecaedro criado, vamos encontrar o ponto médio do segmento AB clicando no botão *ponto*  e em seguida clique em *ponto médio ou centro* Ponto Médio ou Centro. Logo após clique no segmento AB no plano, construindo assim o ponto U.

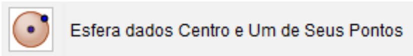
Figura 58 – Construção do dodecaedro truncado após o **5º passo**



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

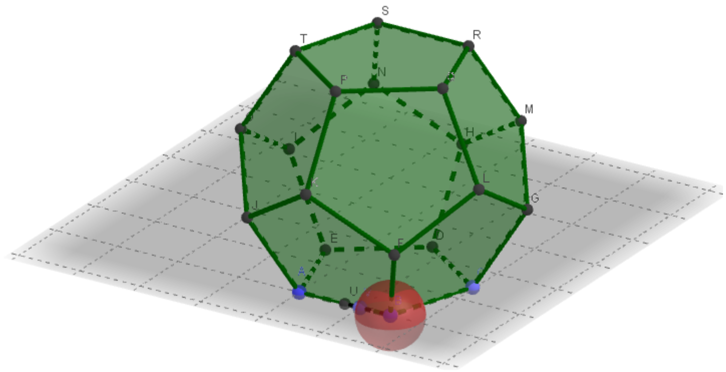
6º Passo: Clique no botão *reta*  e em seguida clique em *segmento* Segmento e clique nos pontos U e no ponto B.

7º Passo: Clique no botão *ponto*  e em seguida clique no segmento UB construído assim o ponto V, de modo que este ponto se mova apenas no segmento UB. Para comprovar, clique no botão *mover* e clique no ponto construído mova-o para comprovar que o mesmo está somente sobre o segmento UB.

8º Passo: Clique no botão *esfera* e em seguida clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* 

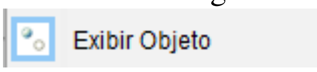
e clique no ponto B e no ponto V criando assim uma esfera centrada no ponto B e tendo como raio o segmento BV.

Figura 59 – Construção do dodecaedro truncado após o **8º passo**



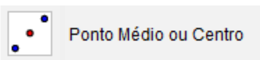
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

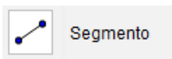
9º Passo: Clique no botão *ponto* e em seguida clique em *Interseção de Dois Objetos*, logo após selecione a esfera e a aresta BF, criando o ponto W e depois selecione a esfera e a aresta BC, criando o ponto Z.

10º Passo: Clique no botão *mover* e em seguida clique com o botão direito na esfera e desmarque a opção *exibir objeto* 

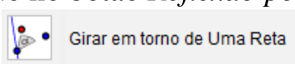
.

11º Passo: Clique no botão *polígono* e em seguida clique nos pontos V, W e Z novamente para fechar o polígono, construindo assim o triângulo $t1$.

12º Passo: Clique no botão *ponto* e em seguida clique em *ponto médio ou centro* 

e selecione as faces $ABCDE$ e $PQRST$. Logo após clique no botão *reta* e em seguida clique em *segmento* 

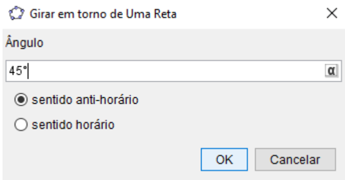
e clique nos pontos A_1 e no ponto B_1, criando o segmento de reta g.

13º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano* e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o triângulo $t1$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $72°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $144°$, em seguida $216°$, e depois $288°$.

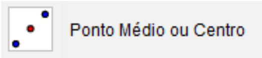
Criando assim 4 triângulos.

Figura 60 – Janela de Rotação em torno de uma reta

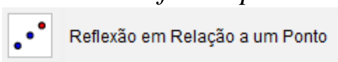


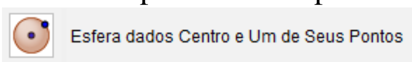
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

14º Passo: Clique no botão *ponto* 

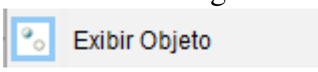
e em seguida clique em *ponto médio ou centro* 

, logo após clique no segmento BF, construindo assim o ponto C_1.

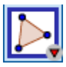
15º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Reflexão em Relação a um Ponto* 

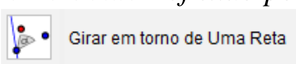
, selecione o ponto W e o ponto C_1. Logo após clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* 

e clique nos pontos F e W' e encontre o ponto de interseção entre a esfera e os segmentos de reta que partem do vértice F.

16º Passo: Clique no botão *mover*  e em seguida clique com o botão direito na esfera e desmarque a opção *exibir objeto* 

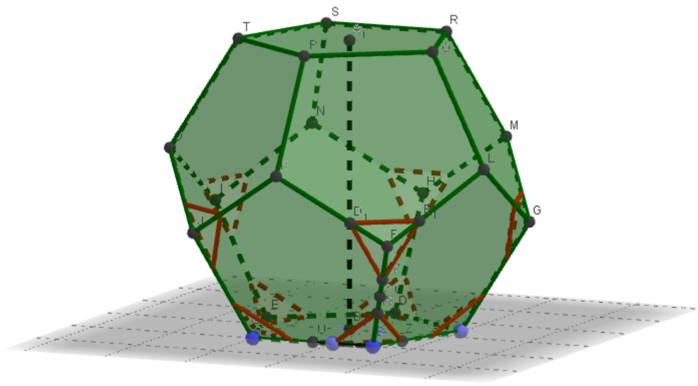
.

17º Passo: Clique no botão *polígono*  e em seguida clique nos pontos D_1, W_1 e E_1 novamente para fechar o polígono, construindo assim o triângulo $t2$.

18º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o triângulo $t2$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $72°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $144°$, em seguida $216°$, e depois $288°$. Criando assim 4 triângulos.

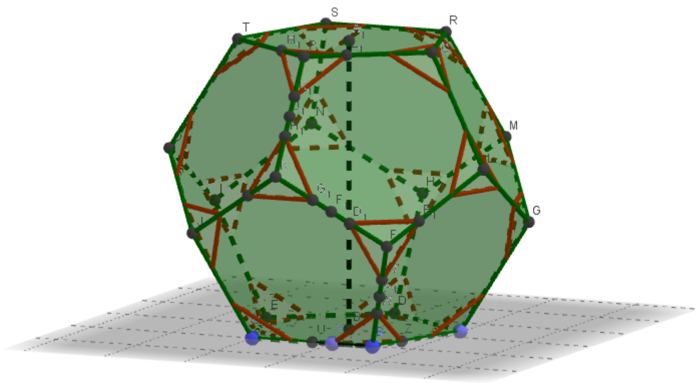
Figura 61 – Construção do dodecaedro truncado após o **18º passo**



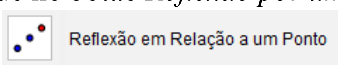
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

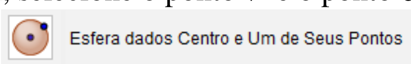
19º Passo: Repita os passos 14 ao 18 para construir os triângulos da parte superior do dodecaedro.

Figura 62 – Construção do octaedro truncado após o **19º passo**

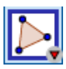


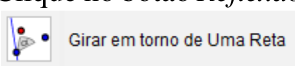
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

20º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Reflexão em Relação a um Ponto* 

, selecione o ponto V e o ponto U. Logo após clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* 

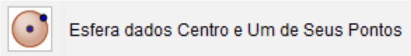
e clique nos pontos A e V'. Encontre o ponto de interseção e repita o processo pra criar a esfera com centro no ponto J.

21º Passo: Clique no botão *polígono*  e em seguida clique nos pontos construídos através da interseção das esferas e as arestas formadas pelo truncamento, construindo o decágono regular.

22º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o decágono regular e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $72°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $144°$, em seguida $216°$, e depois $288°$. Criando assim 4 decágonos regular.

23º Passo: Para criar os decágonos regular superior siga os passos 20 ao 22.

24º Passo: Para criar os dois decágonos regular restantes clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* 

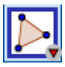
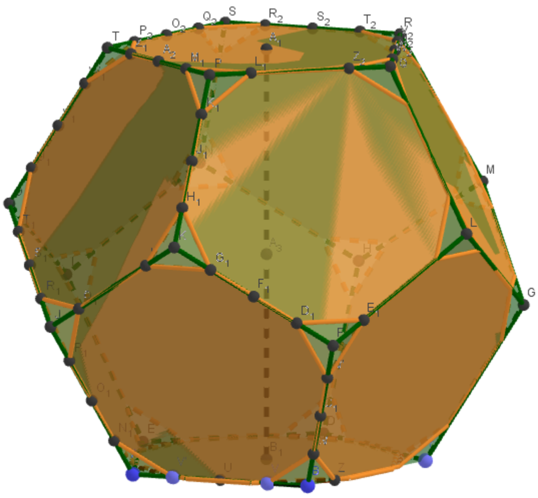
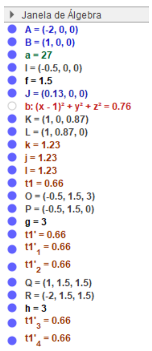
e construa os pontos de interseção entre as esferas e as arestas que concorrem para o centro da esfera criada. Clique no botão *polígono*  e em seguida clique nos pontos construídos através da interseção das esferas e as arestas formadas pelo truncamento, construindo o decágono regular.

Figura 63 – Construção do dodecaedro truncado após o **24º passo**



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

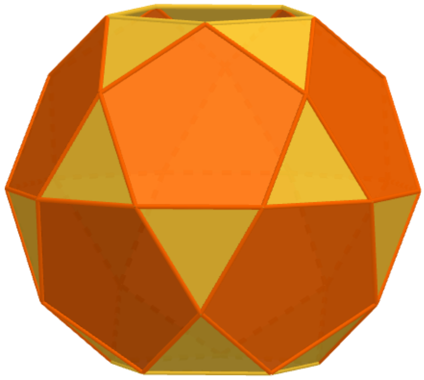
20º Passo: Na Janela de Álgebra, oculte todos os objetos clicando na bola azul, deixando apenas as 6 faces quadrangulares e as 8 faces hexagonais e o ponto J.



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2.2.7 Processo de construção do Icosidodecaedro

Figura 64 – Icosidodecaedro

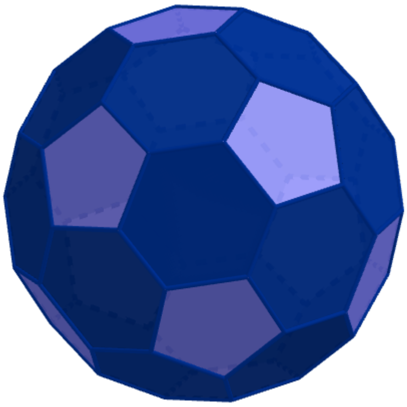


Fonte: Produzido pelo autor (2019)

Para construir o icosidodecaedro basta seguir todos os passos da construção do dodecaedro truncado e arrastar o Ponto V até o Ponto U, passando do **segundo método** para o **primeiro método** de truncamento.

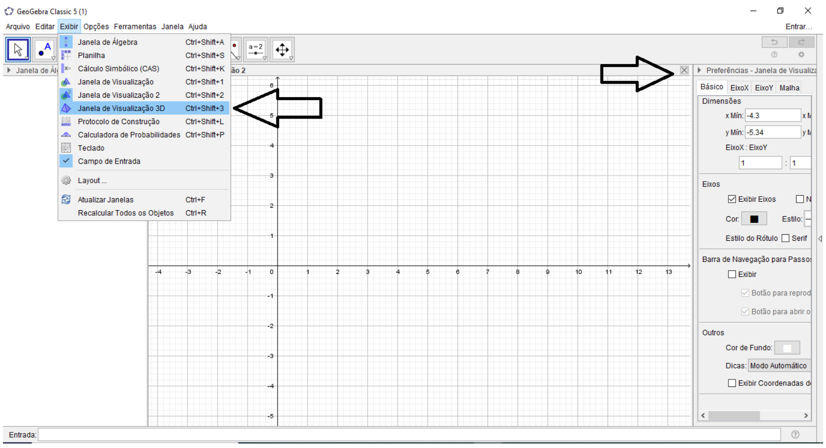
2.2.8 Processo de construção do Icosaedro truncado

Figura 65 – Dodecaedro truncado



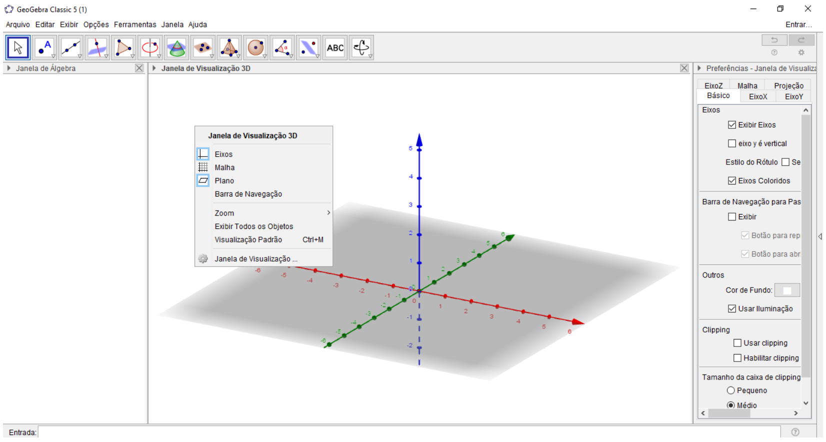
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

1º Passo: Clique em *Exibir* na barra de ferramenta, clique em *Janela de Visualização 3D* e logo após feche a janela de visualização 2D.

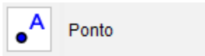


Fonte: Produzido pelo autor (2019)

2º Passo: Na janela de visualização 3D, clique com o botão direito do mouse e clique em *Eixos* e *Malhas*. Iremos desabilitar o eixo e habilitar a malha.



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

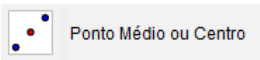
3º Passo: Na barra de ferramenta, clique na seta que fica em baixo do botão *ponto*  (ao passar o mouse pelos botões aparece o nome) e em seguida clique em *ponto* 

. Logo após faça dois pontos A e B no plano.

4º Passo: Na janela Entrada, digite icosaedro 

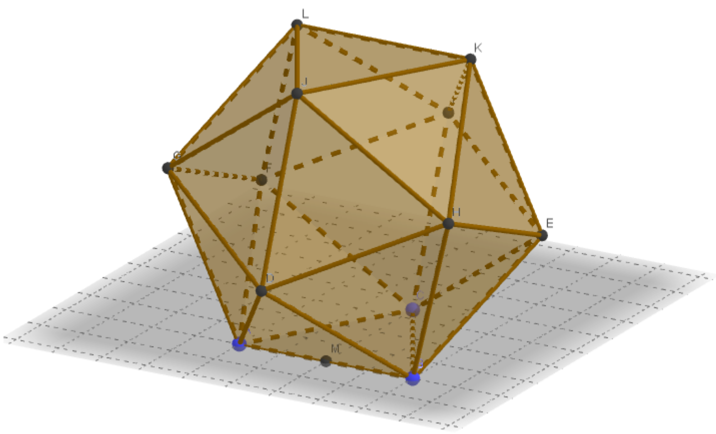
e na opção $< Ponto, Ponto >$ 

e em seguida clique nos pontos A e B no plano.

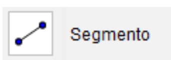
5º Passo: Com o icosaedro criado, vamos encontrar o ponto médio do segmento AB clicando no botão *ponto*  e em seguida clique em *ponto médio ou centro* 

. Logo após clique no segmento AB no plano, construindo assim o ponto M.

Figura 66 – Construção do icosaedro truncado após o **5º passo**



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

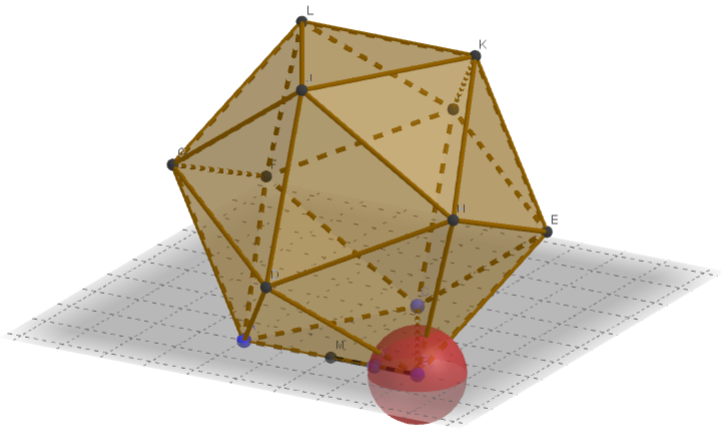
6º Passo: Clique no botão *reta*  e em seguida clique em *segmento* 

e clique nos pontos M e no ponto B.

7º Passo: Clique no botão *ponto*  e em seguida clique no segmento MB construído assim o ponto N, de modo que este ponto se mova apenas no segmento MB. Para comprovar, clique no botão *mover* e clique no ponto construído mova-o para comprovar que o mesmo está somente sobre o segmento MB.

8º Passo: Clique no botão *esfera* e em seguida clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos e clique no ponto B e no ponto N criando assim uma esfera centrada no ponto B e tendo como raio o segmento BN.

Figura 67 – Construção do icosaedro truncado após o **8º passo**



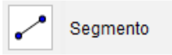
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

9º Passo: Clique no botão *ponto* e em seguida clique em *Interseção de Dois Objetos*, logo após selecione a esfera e a aresta BD, criando o ponto O, selecione a esfera e a aresta BH, criando o ponto P, selecione a esfera e a aresta BE, criando o ponto Q e depois selecione a esfera e a aresta BC, criando o ponto R.

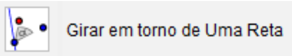
10º Passo: Clique no botão *mover* e em seguida clique com o botão direito na esfera e desmarque a opção *exibir objeto* Exibir Objeto.

11º Passo: Clique no botão *polígono* e em seguida clique nos pontos N, O, P, Q, R e N novamente para fechar o polígono, construindo assim um pentágono regular $pol1$.

12º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano* e em seguida clique em *Reflexão em Relação a um Ponto* Reflexão em Relação a um Ponto, selecione o ponto M e o ponto N. Logo após clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos e clique nos pontos A e N' e encontre o ponto de interseção entre a esfera e os segmentos de reta que partem do vértice A. Clique no botão *polígono* e em seguida construa o pentágono regular.

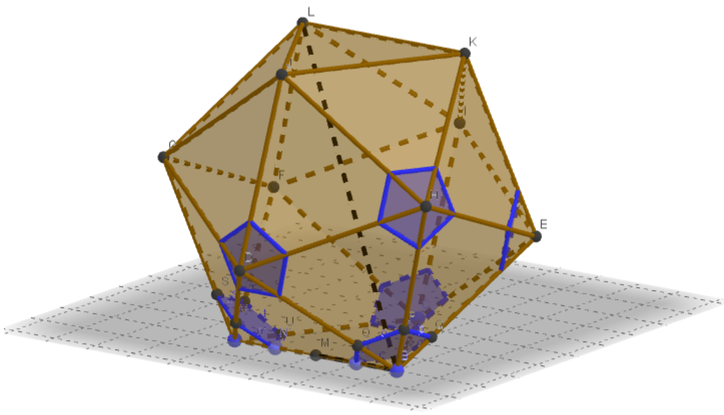
13º Passo: Clique em *segmento* 

e clique nos pontos B e no ponto L, criando o segmento de reta g.

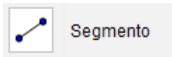
14º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o pentágono regular $pol2$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $72°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $144°$, em seguida $216°$, e depois $288°$. Criando assim 4 pentágonos regulares.

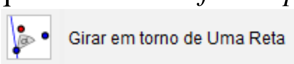
Figura 68 – Construção do icosaedro truncado após o **14º passo**



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

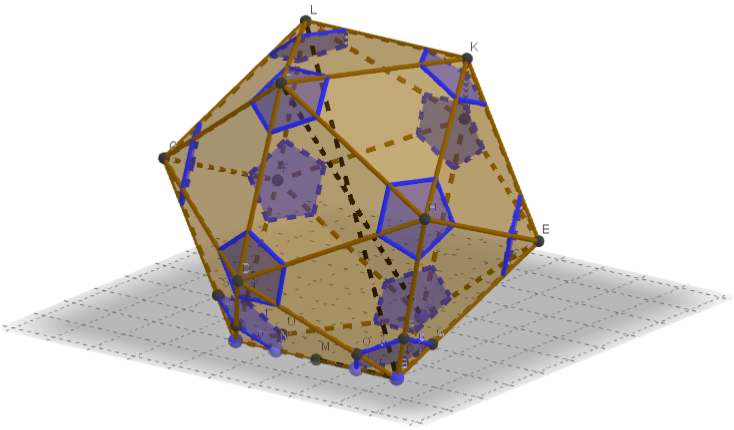
15º Passo: Clique em *segmento* 

e clique nos pontos C e no ponto J, criando o segmento de reta h.

16º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o pentágono regular $pol2''$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta h. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $72°$, e depois $144°$. Criando assim 2 pentágonos regulares. Em seguida, selecione o pentágono regular $pol2'''$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta h. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $72°$, e depois $144°$. Criando assim mais 2 pentágonos regulares. E por último, selecione o pentágono regular $pol5$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70) e digite $72°$. Criando assim o último pentágono regular.

Figura 69 – Construção do icosaedro truncado após o **16º passo**



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

17º Passo: Clique no botão *ponto* e em seguida clique em *ponto médio ou centro* Ponto Médio ou Centro, logo após clique no segmento AD, construindo assim o ponto W.

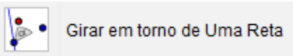
18º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano* e em seguida clique em *Reflexão em Relação a um Ponto* Reflexão em Relação a um Ponto, selecione o ponto V e o ponto W. Logo após clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos e clique nos pontos D e V' e encontre o ponto de interseção entre a esfera e os segmentos de reta que partem do vértice D.

19º Passo: Clique no botão *mover* e em seguida clique com o botão direito na esfera e desmarque a opção *exibir objeto* Exibir Objeto.

20º Passo: Clique no botão *polígono* e em seguida clique nos pontos construídos através da interseção das esferas e as arestas formadas pelo truncamento, construindo o hexágono regular.

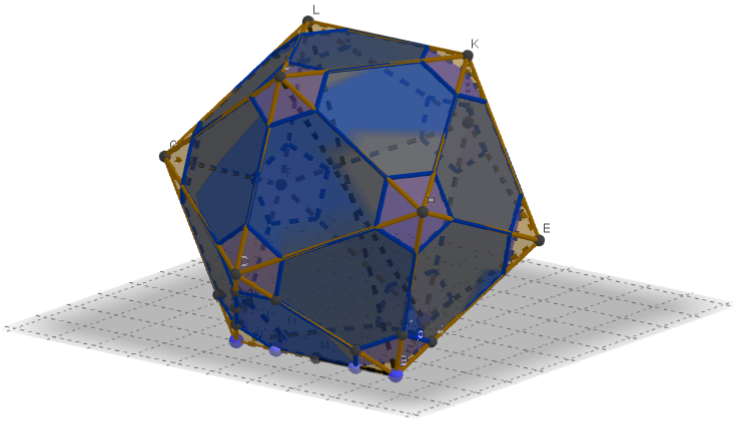
21º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano* e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* Girar em torno de Uma Reta, selecione o pentágono regular $pol6$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $72°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $144°$, em seguida $216°$, e depois $288°$. Criando assim 4 hexágonos regulares.

22º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano* e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* Girar em torno de Uma Reta, selecione o pentágono regular $pol7$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta h. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $72°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $144°$, em seguida $216°$, e depois $288°$. Criando assim 4 hexágonos regulares.

23º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o pentágono regular $pol7'$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $72°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $144°$. Criando assim 2 hexágonos regulares. Agora selecione o pentágono regular $pol7'_2$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $72°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $144°$. Criando assim 2 hexágonos regulares. Seguindo esses mesmos passos, construa todos os hexágonos regulares restantes.

Figura 70 – Construção do icosaedro truncado após o **23º passo**

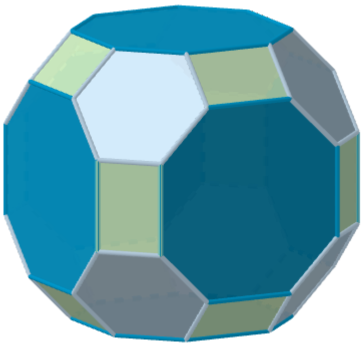


Fonte: Produzido pelo autor (2019)

24º Passo: Na Janela de Álgebra, oculte todos os objetos clicando na bola azul, deixando apenas as 20 faces hexagonais e as 12 faces pentagonais.

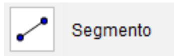
2.2.9 Processo de construção do Cuboctaedro Truncado

Figura 71 – Dodecaedro truncado

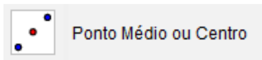


Fonte: Produzido pelo autor (2019)

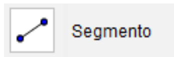
1º Passo: Seguir os passos da construção do Cuboctaedro.

2º Passo: Clique no botão *reta*  e em seguida clique em *segmento* 

e clique nos pontos J e no ponto L.

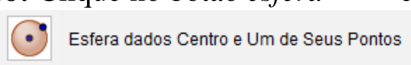
3º Passo: Com o cuboctaedro criado, vamos encontrar o ponto médio do segmento JL clicando no botão *ponto*  e em seguida clique em *ponto médio ou centro* 

. Logo após clique no segmento JL no plano, construindo assim o ponto R.

4º Passo: Clique no botão *reta*  e em seguida clique em *segmento* 

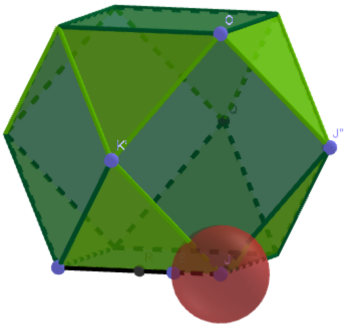
e clique nos pontos J e no ponto R.

5º Passo: Clique no botão *ponto*  e em seguida clique no segmento JR construído assim o ponto S, de modo que este ponto se mova apenas no segmento JR. Para comprovar, clique no botão *mover*  e clique no ponto construído mova-o para comprovar que o mesmo está somente sobre o segmento JR.

6º Passo: Clique no botão *esfera*  e em seguida clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* 

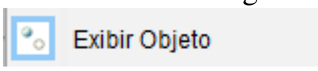
e clique no ponto J e no ponto S criando assim uma esfera centrada no ponto J e tendo como raio o segmento JS.

Figura 72 – Construção do cuboctaedro truncado após o **6º passo**

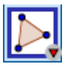


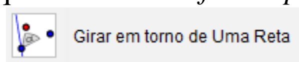
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

7º Passo: Clique no botão *ponto*  e em seguida clique em *Interseção de Dois Objetos*, logo após selecione a esfera e a aresta LK', criando o ponto T, selecione a esfera e a aresta JJ'', criando o ponto U e depois selecione a esfera e a aresta $JJ_1'BC$, criando o ponto V.

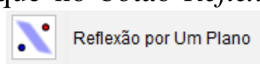
8º Passo: Clique no botão *mover*  e em seguida clique com o botão direito na esfera e desmarque a opção *exibir objeto* 

.

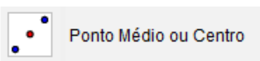
9º Passo: Clique no botão *polígono*  e em seguida clique nos pontos S, T, V, U e S novamente para fechar o polígono, construindo assim um quadrilátero $q1$.

10º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

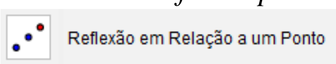
, selecione o quadrilátero $q1$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta l. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite 90° e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite 180° e depois 270°. Criando assim 3 quadriláteros.

11º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Reflexão pou um Plano* 

, selecione o quadrilátero $q1$ na janela de álgebra e logo após selecione o plano p que passa pelos pontos K', J'' e Q. Faça o mesmo com os outros 3 quadriláteros.

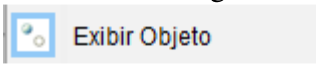
12º Passo: Clique no botão *ponto*  e em seguida clique em *ponto médio ou centro* 

, logo após clique no segmento JK', construindo assim o ponto W.

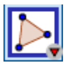
13º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Reflexão em Relação a um Ponto* 

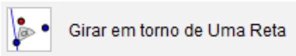
, selecione o ponto T e o ponto W. Logo após clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* 

e clique nos pontos K' e T' e encontre o ponto de interseção entre a esfera e os segmentos de reta que partem do vértice K'.

14º Passo: Clique no botão *mover*  e em seguida clique com o botão direito na esfera e desmarque a opção *exibir objeto* 

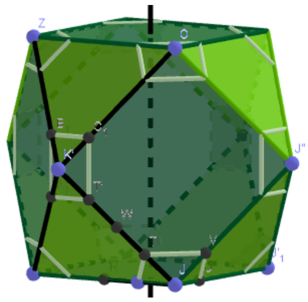
.

15º Passo: Clique no botão *polígono*  e em seguida clique nos pontos construídos através da interseção das esferas e as arestas formadas pelo truncamento, construindo o quadrilátero $q3$.

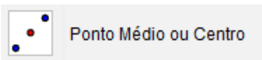
16º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o quadrilátero $q3$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta l. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $90°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $180°$ e depois $270°$. Criando assim 3 quadriláteros.

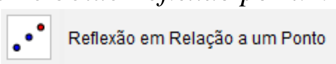
Figura 73 – Construção do cuboctaedro truncado após o **16º passo**

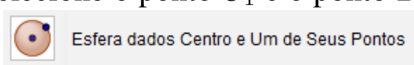


Fonte: Produzido pelo autor (2019)

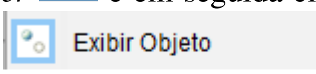
17º Passo: Clique no botão *ponto*  e em seguida clique em *ponto médio ou centro* 

, logo após clique no segmento $K'O$, construindo assim o ponto D_1.

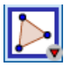
18º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Reflexão em Relação a um Ponto* 

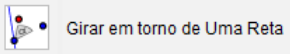
, selecione o ponto C_1 e o ponto D_1. Logo após clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* 

e clique nos pontos O e E_1 e encontre o ponto de interseção entre a esfera e os segmentos de reta que partem do vértice O.

19º Passo: Clique no botão *mover*  e em seguida clique com o botão direito na esfera e desmarque a opção *exibir objeto* 

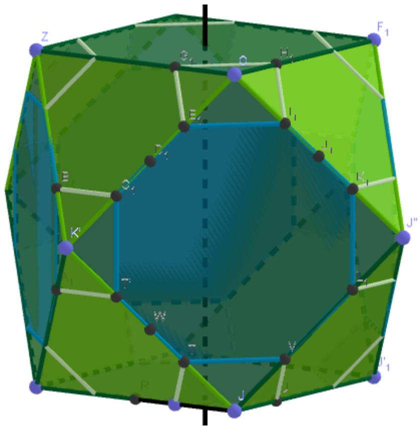
.

20º Passo: Clique no botão *polígono*  e em seguida clique nos pontos construídos através da interseção das esferas e as arestas formadas pelo truncamento, construindo o octógono regular.

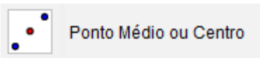
21º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o octógono regular $pol3$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta l. Aparecerá uma janela (Figura 70), $90°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $180°$ e depois $270°$. Criando assim 3 octógonos.

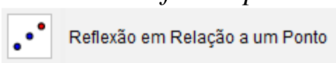
Figura 74 – Construção do cuboctaedro truncado após o **21º passo**

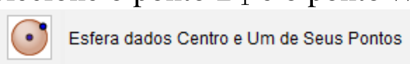


Fonte: Produzido pelo autor (2019)

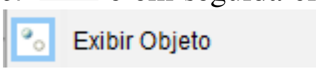
22º Passo: Clique no botão *ponto*  e em seguida clique em *ponto médio ou centro* 

, logo após clique no segmento $K'Z$, construindo assim o ponto W_1.

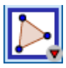
23º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Reflexão em Relação a um Ponto* 

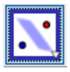
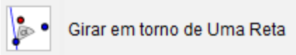
, selecione o ponto B_1 e o ponto W_1. Logo após clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* 

e clique nos pontos Z e Z_1 e encontre o ponto de interseção entre a esfera e os segmentos de reta que partem do vértice Z.

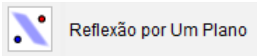
24º Passo: Clique no botão *mover*  e em seguida clique com o botão direito na esfera e desmarque a opção *exibir objeto* 

.

25º Passo: Clique no botão *polígono*  e em seguida clique nos pontos construídos através da interseção das esferas e as arestas formadas pelo truncamento, construindo o hexágono regular $pol4$.

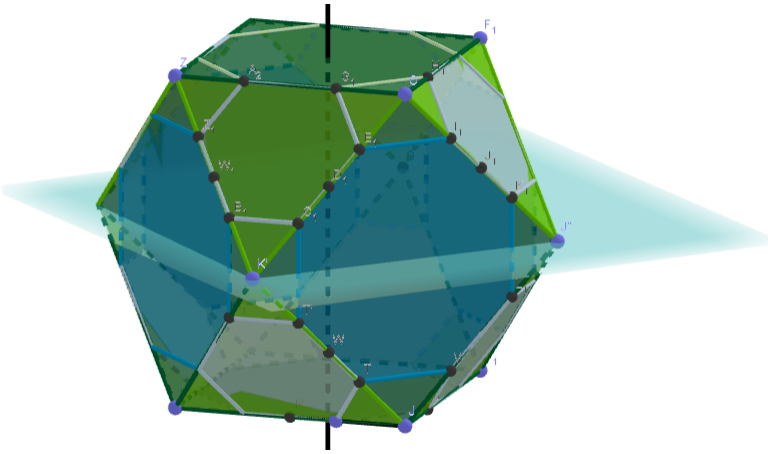
26º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o octógono regular $pol4$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta l. Aparecerá uma janela (Figura 70), $90°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $180°$ e depois $270°$. Criando assim 3 hexágonos.

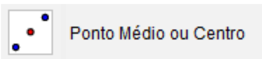
27º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Reflexão pou um Plano* 

, selecione o hexágono $pol4$ na janela de álgebra e logo após selecione o plano p. Faça o mesmo com os outros 3 hexágonos.

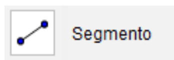
Figura 75 – Construção do cuboctaedro truncado após o **27º passo**



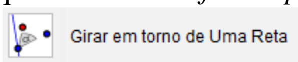
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

28º Passo: Clique no botão *ponto*  e em seguida clique em *ponto médio ou centro* 

, logo após selecione os polígonos $pol3$ e $pol3''$.

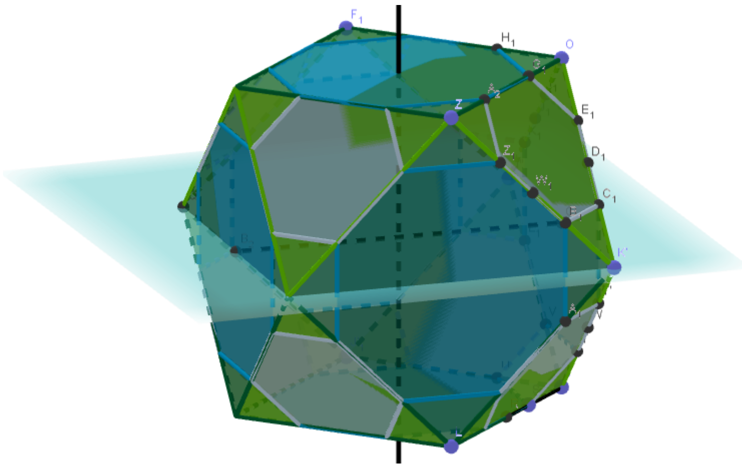
29º Passo: Clique no botão *reta*  e em seguida clique em *segmento* 

e clique nos pontos B_2 e no ponto C_2, criando o segmento l_2.

30º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o octógono $pol3'''$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta l_2. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $90°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $-90°$.Criando assim 2 octógonos.

Figura 76 – Construção do cuboctaedro truncado após o **30º passo**

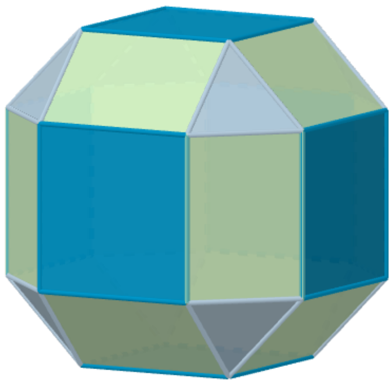


Fonte: Produzido pelo autor (2019)

31º Passo: Na Janela de Álgebra, oculte todos os objetos clicando na bola azul, deixando apenas as 6 faces octogonais, 8 faces hexagonais e 12 faces retangulares.

2.2.10 Processo de construção do Rombicuboctaedro

Figura 77 – Rombicuboctaedro

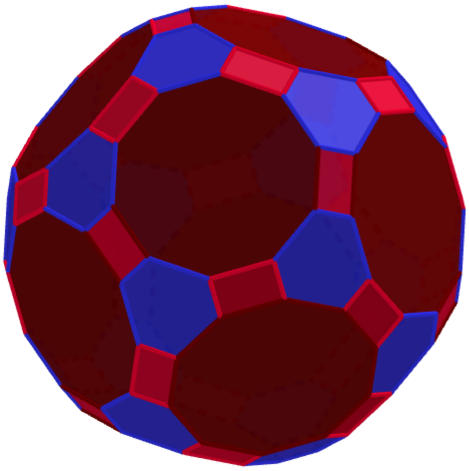


Fonte: Produzido pelo autor (2019)

Para construir o Rombicuboctaedro basta seguir todos os passos da construção do cuboctaedro truncado e arrastar o Ponto S até o Ponto S', passando do **segundo método** para o **primeiro método** de truncamento.

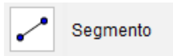
2.2.11 Processo de construção do Icosidodecaedro Truncado

Figura 78 – Dodecaedro truncado

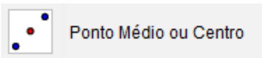


Fonte: Produzido pelo autor (2019)

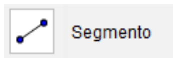
1º Passo: Seguir os passos da construção do Icosidodecaedro.

2º Passo: Clique no botão *reta*  e em seguida clique em *segmento* 

e clique nos pontos V e no ponto W_1.

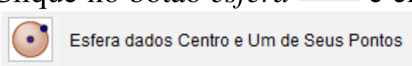
3º Passo: Com o Icosidodecaedro criado, vamos encontrar o ponto médio do segmento VW_1 clicando no botão *ponto*  e em seguida clique em *ponto médio ou centro* 

. Logo após clique no segmento VW_1 no plano, construindo assim o ponto F_2.

4º Passo: Clique no botão *reta*  e em seguida clique em *segmento* 

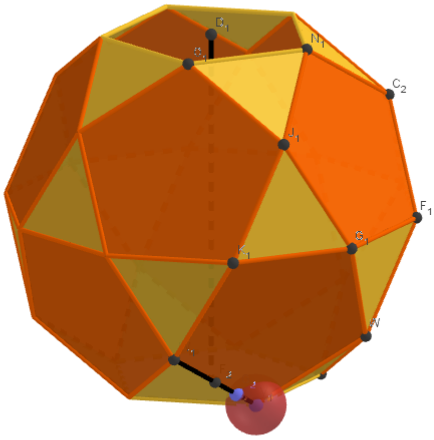
e clique nos pontos V e no ponto F_2.

5º Passo: Clique no botão *ponto*  e em seguida clique no segmento VF_2 construído assim o ponto G_2, de modo que este ponto se mova apenas no segmento VF_2. Para comprovar, clique no botão *mover*  e clique no ponto construído mova-o para comprovar que o mesmo está somente sobre o segmento VF_2.

6º Passo: Clique no botão *esfera*  e em seguida clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* 

e clique no ponto V e no ponto G_2 criando assim uma esfera centrada no ponto V e tendo como raio o segmento VG_2.

Figura 79 – Construção do Icosidodecaedro Truncado após o **6º passo**



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

7º Passo: Clique no botão *ponto* e em seguida clique em *Interseção de Dois Objetos* Interseção de Dois Objetos, logo após selecione a esfera e encontre o ponto de interseção entre a esfera e os segmentos de reta que partem do vértice V.

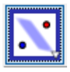
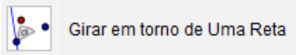
8º Passo: Clique no botão *mover* e em seguida clique com o botão direito na esfera e desmarque a opção *exibir objeto* Exibir Objeto.

9º Passo: Clique no botão *polígono* e em seguida clique nos pontos criados com a interseção entre a esfera e as arestas, construindo assim um quadrilátero $q1$.

10º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano* e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* Girar em torno de Uma Reta, selecione o quadrilátero $q1$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $72°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $144°$, $216°$, $288°$ e $360°$. Criando assim 4 quadriláteros.

11º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano* e em seguida clique em *Reflexão em Relação a um Ponto* Reflexão em Relação a um Ponto, selecione o ponto G_2 e o ponto F_2. Logo após clique em *esfera dados centro e um de seus pontos* Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos e clique nos pontos W_1 e L_2 e encontre o ponto de interseção entre a esfera e os segmentos de reta que partem do vértice W_1.

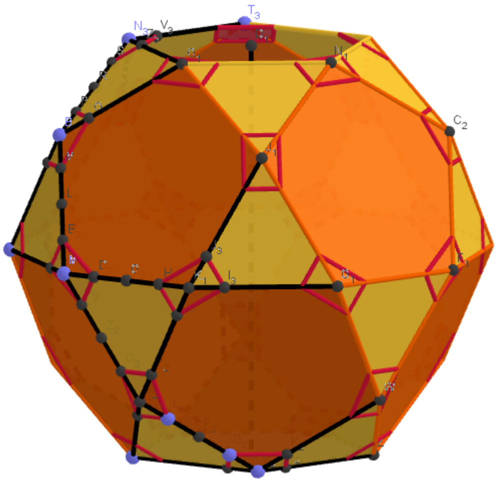
12º Passo: Clique no botão *polígono* e em seguida clique nos pontos criados com a interseção entre a esfera e as arestas, construindo assim um quadrilátero $q3$.

13º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

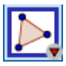
, selecione o quadrilátero $q3$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $72°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $144°$, $216°$, $288°$ e $360°$. Criando assim 4 quadriláteros.

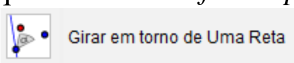
14º Passo: Para construir todos os quadriláteros restantes, basta seguir os passos 11, 12 e 13.

Figura 80 – Construção do Icosidodecaedro truncado após o **14º passo**



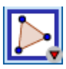
Fonte: Produzido pelo autor (2019)

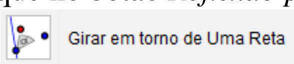
15º Passo: Clique no botão *polígono*  e em seguida clique nos pontos construídos através da interseção das esferas e as arestas formadas pelo truncamento, construindo o decágono.

16º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o decágono $pol5$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $72°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $144°$, $216°$, $288°$ e $360°$. Criando assim 4 decágonos.

17º Passo: Para construir todos os decágonos restantes, basta seguir os passos 15 e 16.

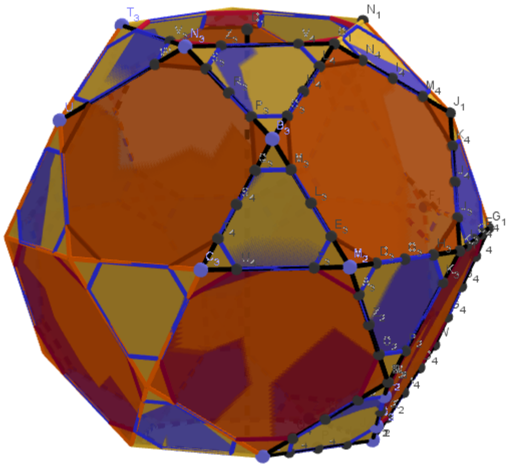
18º Passo: Clique no botão *polígono*  e em seguida clique nos pontos construídos através da interseção das esferas e as arestas formadas pelo truncamento, construindo o hexágono.

19º Passo: Clique no botão *Reflexão por um Plano*  e em seguida clique em *Girar em Torno de uma Reta* 

, selecione o decágono $pol9$ na janela de álgebra e logo após selecione o segmento de reta g. Aparecerá uma janela (Figura 70), digite $72°$ e clique em OK. Repita o mesmo processo e na janela digite $144°$, $216°$, $288°$ e $360°$. Criando assim 4 hexágonos.

20º Passo: Para construir todos os decágonos restantes, basta seguir os passos 18 e 19.

Figura 81 – Construção do Icosidodecaedro truncado após o **20º passo**

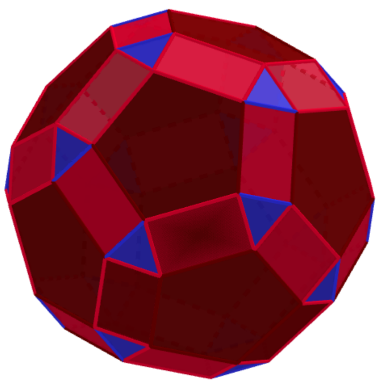


Fonte: Produzido pelo autor (2019)

21º Passo: Na Janela de Álgebra, oculte todos os objetos clicando na bola azul, deixando apenas as 12 faces decagonais, 20 faces hexagonais e 30 faces retangulares.

2.2.12 Processo de construção do Rombicosidodecaedro (ou pequeno rombicosidodecaedro)

Figura 82 – Rombicosidodecaedro



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

Para construir o Rombicosidodecaedro basta seguir todos os passos da construção do Icosidodecaedro Truncado e arrastar o Ponto G_2 até o Ponto L_2, passando do **segundo método** para o **primeiro método** de truncamento.

3 GeoGebra em sala de aula

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos.

Portanto, a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (4).

3.1 Geometria e a teoria de Van Hiele

A Geometria se apresenta como um dos mais belos ramos da Matemática, pois surge das atividades humanas e está presente no dia a dia das pessoas e na natureza. Seu estudo dá ao aprendiz uma forma peculiar de raciocinar, diferente do modo aritmético ou algébrico, além de favorecer o desenvolvimento da percepção visual. (5).

A Geometria, integrada a álgebra e ao cálculo possibilita um fazer pedagógico interdisciplinar. A Geometria possibilita "a visualização do todo, bem como das partes que o compõe e, assim facilita o desenvolvimento da habilidade mental de operar com as partes sem perder de vista o todo". (6).

Isso permite ir e voltar no mesmo assunto várias vezes, mas com diferentes enfoques, o que permite que o aluno perceba que um mesmo problema pode ser resolvido por diferentes caminhos, ou apenas por "um desenho", e não apenas por cálculos, desmistificando a Matemática como a disciplina de "fazer contas" como cita Lorenzato (2006) (5).

Assim, ao desenvolver atividades matemáticas envolvendo o conceito de poliedros arquimedianos, o professor deve propô-las com foco na compreensão do conceito e não, simplesmente a memorização, de definições. Considera-se importante o embasamento teórico e a busca de referências a respeito da aprendizagem de conceitos geométricos.

Dentre as concepções sobre o ensino e a aprendizagem de geometria, a preferência nesta pesquisa foi pela Teoria Van Hiele. É concebida em cinco níveis de aprendizagem ou desenvolvimento geométrico: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. (7).

Lorenzatto (2008) (6) aponta algumas características particulares desta tendência, tais como: a ordenação dos níveis, indo do mais fácil para o mais difícil; níveis são inclusivos, pois todo conhecimento de um nível é absorvido pelo nível seguinte; cada nível possui sua própria identidade, isto é, num certo nível o aprendiz reconhece que um quadrado é também um retângulo, um losango e um paralelogramo, enquanto que no nível anterior, o quadrado é só quadrado; a progressão do aprendiz num nível para o outro depende muito mais do conteúdo e do método, do que da idade; aquilo que está sendo ensinado deve estar no nível de desenvolvimento do aprendiz para que possa haver compreensão.

3.2 Metodologia

A nossa pesquisa possui um caráter quantitativo e qualitativo e foi realizada na Escola Estadual Pastor Amaro de Sena – EPAS da rede pública de ensino, situada em Abreu e Lima no estado de Pernambuco.

Para a realização desse trabalho foi escolhida a turma do 2º ano do Ensino Médio e dividida em 2 (dois) grupos compostos por 15 alunos cada. Quanto à metodologia utilizada, planejada para ser desenvolvida em três momentos: aula sobre poliedros, feito através de 1 (um) encontro, desenvolvimento das aulas em sala de aula de modo tradicional (2º ano B) e desenvolvimento das aulas em sala de aula utilizando recurso visual e o software GeoGebra (2º ano A), feito através de 1 (um) encontro, e teste contendo 2 (duas) questões para análise de aprendizado. Cada encontro teve duração de 1h40min e o teste durou 45min.

2º ano A

No primeiro contato que tivemos com os alunos, o software GeoGebra foi apresentado aos alunos de forma detalhada, formalizamos alguns conceitos primitivos e falamos sobre a definição de poliedros, poliedros convexos e côncavos, classificação dos poliedros, poliedros de platão, relação de Euler, soma dos ângulos das faces de um poliedro e planificação dos poliedros. Logo em seguida resolvemos uma lista de exercício.

Em nosso segundo encontro, falamos sobre os poliedros arquimedianos, mostramos como são formados, quais são os tipos de truncamento e mostramos, utilizando o GeoGebra, o passo-a-passo do truncamento pelos 2 (dois) métodos do cubo, construindo assim o Cubo truncado e o Cuboctaedro. Logo em seguida vimos que os poliedros arquimedianos também são poliedros convexos, logo a relação de Euler é válida. Em seguida, vimos no GeoGebra a planificação dos poliedros arquimedianos e resolvemos uma lista de exercício.

2º ano B

Figura 83 – Aula sobre Poliedros (1º encontro)

Fonte: Produzido pelo autor (2019)

Figura 84 – Aula sobre os Poliedros Arquimedianos (2º encontro)

Fonte: Produzido pelo autor (2019)

Todos os nossos encontros (1º e 2º encontro) foram em sala de aula com aula expositiva com a utilização do quadro-branco e piloto. E vimos todos os conteúdos abordados no (2º ano A), sem a utilização de recurso visual e do software GeoGebra. Resolvemos as mesmas listas de exercícios.

Por fim, em nosso último encontro, foi aplicado o teste. Este foi comparado às duas turmas para verificarmos se a utilização do software GeoGebra facilita ou não o aprendizado de poliedros arquimedianos.

Figura 85 – Aula sobre Poliedros

Figura 86 – Aula sobre os Poliedros Arquimedianos

Fonte: Produzido pelo autor (2019)

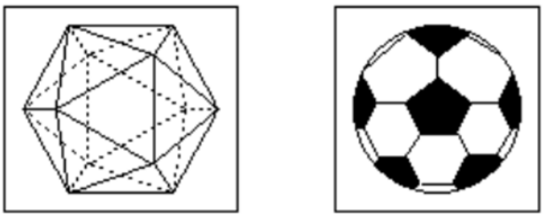
3.3 Análise dos dados

3.3.1 Análise do teste

Os 40 alunos que participaram da pesquisa, sendo 20 alunos do 2º ano A e 20 alunos do 2º ano B, da Escola Estadual Pastor Amaro de Sena – EPAS, localizada em Abreu e Lima – PE, dispuseram de 40 minutos para resolver o teste que foi composto por duas questões, veja as questões a seguir:

Problema 01

(UERJ - 1999) Um icosaedro regular tem 20 faces e 12 vértices, a partir dos quais retiram-se 12 pirâmides congruentes. As medidas das arestas dessas pirâmides são iguais a 1/3 da aresta do icosaedro. O que resta é um tipo de poliedro usado na fabricação de bolas. Observe as figuras.



Para confeccionar uma bola de futebol, um artesão usa esse novo poliedro, no qual cada gomo é uma face. Ao costurar dois gomos para unir duas faces do poliedro, ele gasta 7 cm de linha. Depois de pronta a bola, o artesão gastou, no mínimo, um comprimento de linha igual a:

a) 7,0 m

b) 6,3 m

c) 4,9 m

d) 2,1 m

O problema 01 do teste deve ser resolvido aplicando o conhecimento de poliedros arqui-

medianos, que está implícito no enunciado da questão, o problema é de média complexidade já que a questão não informa de forma explícita quantas faces e quais polígonos serão formados após o truncamento. Existem possíveis erros que podem ser cometidos pelos alunos como, não descobrir quais serão os polígonos formados, quantos polígonos serão formados, não dividir por 2 (dois) após multiplicar a quantidade de lados do polígonos pelo número de polígonos.
O aluno deve entender que para solucionar a questão ele necessita:
1. Identificar que as pirâmides retiradas possui base pentagonal;
2. Identificar que a quantidade de vértices (12) é igual a quantidade de pentágonos resultantes;
3. Identificar que as faces triangulares se tornarão faces hexagonais;
4. Saber calcular a quantidade de arestas;
5. Multiplicar a quantidade de arestas por 7 cm, que é a quantidade de linha utilizada.

Solução do problema

Número de faces e vértices do icosaedro são: F = 20 V = 12

Serão cortadas 12 pirâmides que deixarão no novo poliedro 12 polígonos com cinco lados (pentágonos).

Assim, o novo poliedro será formado por 20 faces hexagonais e 12 faces pentagonais. Calculando o número de arestas temos:

$$A = \frac{20 \cdot 6 + 12 \cdot 5 + 20 \cdot 3}{2} = \frac{180}{2} \Rightarrow A = 90$$

Para cada aresta são usados 7 cm de linha. Assim, sendo x a quantidade de linhas necessária, temos que:

$$x = 90 \cdot 7 \Rightarrow x = 630cm.$$

Ou seja,

$$x = 6,3m.$$

Problema 02

(CRIADO PELO AUTOR) A figura a seguir representa a planificação de um sólido arquimediano, qual o nome desse poliedro?

O problema 02 deve ser resolvido aplicando os conhecimentos sobre os tipos de truncamento dos poliedros regulares. O problema é de nível fácil, pois basta entender que no truncamento tipo as faces dobram o seu número de arestas e a quantidade de arestas que partem de cada vértice determina o polígono formado após o truncamento. Assim, para solucionar a questão o aluno deve observar que são formados 4 (quatro) hexágonos regulares que possuem

Fonte: Produzido pelo autor (2020)

6 lados, logo, o polígono primitivo é um triângulo equilátero. O aluno deve notar também que na planificação existem 3 (três) triângulos equiláteros e que eles foram formados a partir do truncamento do tetraedro, pois de cada vértice partem 3 (três) arestas. Assim, o poliedro arquimediano planificado na questão, trata-se de um tetraedro truncado.

3.4 Resultados

Os alunos das 2 (duas) turmas dispuseram do mesmo tempo para resolver as 2 (duas) questões (45 minutos). Os alunos resolveram as questões em sala de aula, sem a ajuda de pesquisa ou qualquer outro instrumento que facilitasse a solução dos problemas e de forma indivudual.

3.4.1 Resultado do problema 01

A tabela e o gráfico abaixo mostram os resultados alcançados pelos alunos, mesmo com o conteúdo sendo vivenciado em sala de aula e devido à complexidade do problema o aproveitamento foi baixo, principalmente os alunos do 2º ano B que tiveram aula expositiva com quadro e piloto. Já os do 2º ano A que teve aula com recursos visuais e a utilização do software matemático GeoGebra teve um aproveitamento bem melhor comparado com a outra turma.

Tabela 4 – Resultados do problema 01 – Turma 2º ano A

Sujeitos da Pesquisa	ACERTOU	ERROU
A1, A2, A6, A7, A9, A10, A13, A14	8 (53%)	
A3, A4, A5, A8, A11, A12, A15		7 (47%)

Fonte: Produzido pelo autor

Figura 87 – Problema 01 - 2º ano A

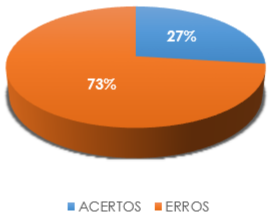
Fonte: Produzido pelo autor (2020)

Tabela 5 – Resultados do problema 01 – Turma 2º ano B

Sujeitos da Pesquisa	ACERTOU	ERROU
B6, B8, B9, B11,	4 (27%)	
B1, B2, B3, B4, B5, B7, B10, B12, B13, B14, B15		11 (73%)

Fonte: Produzido pelo autor

Figura 88 – Problema 01 - 2º ano B



Fonte: Produzido pelo autor (2020)

3.4.2 Resultado do problema 02

A tabela e o gráfico abaixo mostram os resultados alcançados pelos alunos, como se trata de uma questão de planificação os alunos do 2º ano A tiveram um aproveitamento muito superior em relação aos alunos do 2º ano A, falarei mais dos resultados na conclusão do meu projeto de pesquisa.

3.4.3 Comparação entre os problemas 01 e 02

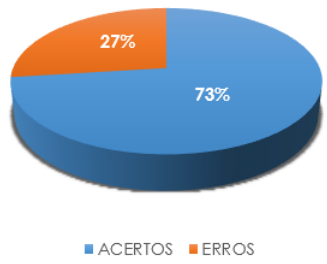
Observe abaixo os gráficos comparativos referentes a Acertos e Erros nas duas turmas que viabilizam uma melhor comparação entre os 2 (dois) problemas.

Tabela 6 – Resultados do problema 02 – Turma 2º ano A

Sujeitos da Pesquisa	ACERTOU	ERROU
A2, A4, A5, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15	11 (73%)	
A1, A3, A6, A7		4 (27%)

Fonte: Produzido pelo autor

Figura 89 – Problema 02 - 2º ano A



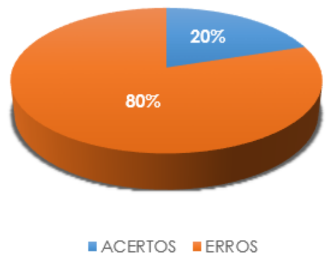
Fonte: Produzido pelo autor (2020)

Tabela 7 – Resultados do problema 02 – Turma 2º ano B

Sujeitos da Pesquisa	ACERTOU	ERROU
B5, B10, B12	3 (20%)	
B1, B2, B3, B4, B6, B7, B8, B9, B11, B13, B14, B15		12 (80%)

Fonte: Produzido pelo autor

Figura 90 – Problema 02 - 2º ano B



Fonte: Produzido pelo autor (2020)

Figura 91 – Acertos do problema 01

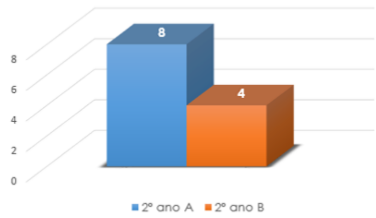
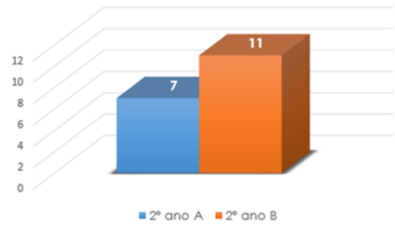


Figura 92 – Erros do problema 01



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

Figura 93 – Acertos do problema 02

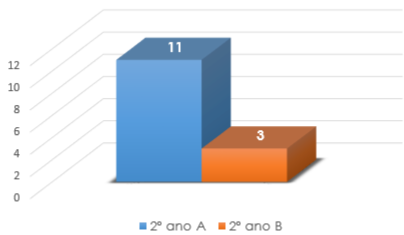
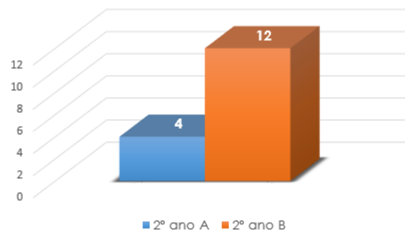


Figura 94 – Erros do problema 02



Fonte: Produzido pelo autor (2019)

Conclusão

A partir de uma comparação, sem muitas minúcias, entre as análises realizadas no problema 01 e no problema 02, podemos fazer alguns comentários concludentes a respeito de nossa pesquisa.

Não são necessários muitos esforços para percebermos que o estudo o qual realizamos proporcionou aos alunos um progresso cognitivo com relação à poliedros platônicos e arquimedianos, com isso, conseguimos atingir de forma parcial nossos objetivos.

Dentre os fatores que ocasionaram o êxito final de nossa pesquisa está o modo como às aulas foram ministradas. Perante a utilização de recursos visuais e software matemático os alunos demonstraram grande interesse, curiosidade e empenho. Esses três substantivos contribuíram, em larga escala, para uma melhor interpretação do conceito de poliedros platônicos e arquimedianos.

O objetivo geral dessa dissertação é incentivar o uso de software nas aulas de Matemática com o intuito de melhorar o ensino e a aprendizagem de poliedros platônicos e arquimedianos. Fica evidente, portanto, que um software, apesar de não ser imprescindível, é importante para proporcionar aos alunos uma melhor compreensão. Além do mais, o aluno demonstra maior interesse, que, indubitavelmente, é de fundamental importância para a absorção do conhecimento.

Quando nossa intenção foi partirmos dos poliedros platônicos para os arquimedianos, na tentativa de induzimos os alunos a perceberem que o truncamento se trata de uma secção no sólido platônico retirando pirâmides mostrando através do GeoGebra, deixou claro, mais uma vez, o alto grau de sua importância ao alcançarmos mais um de nossos objetivos específicos. Ao que diz respeito à notação utilizada pelo software, os alunos se mostraram interessados em aprender tais notações, e, sem dúvida, esse interesse cooperou para alcançarmos mais um dos nossos objetivos.

Faz-se necessário destacar que a inserção de tecnologias nas práticas de ensino de Matemática não suprime a possibilidade de um mau êxito. São vários os obstáculos com os quais podemos nos deparar quando decidimos por trabalhar com softwares. Um desses empecilhos é o docente ter familiaridade com a tecnologia: muitas das vezes o professor não se atualizou com o passar dos anos, tendo bastante dificuldade para trabalhar com softwares educacionais.

Fica manifesto, portanto, que fazendo uso dessa metodologia inovadora, conseguimos, além de esclarecer algumas ideias, facilitar a absorção de conhecimentos referentes à poliedros platônicos e arquimedianos. Por essa e por outras razões podemos afirmar que nossa pesquisa foi bastante proveitosa.

Para extinguirmos essa aversão imposta por esses professores, é necessário, portanto, que esses procurem se atualizar através de leituras e pesquisas, para que assim, percebam a relevância desse método inovador.

Referências

1 MENEZES, I. Evolução da cidadania em portugal. *Atas do Encontro para a Cidadania e Culturas de Formação, p. 17-34*, v. 1, 2007.

2 PCN, P. C. N. Matemática. *Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF*, 1998.

3 MORAN, J. M. et al. As mídias na educação. *Desafios na comunicação pessoal*, Paulinas São Paulo, v. 3, p. 162–166, 2007.

4 SILVA, M. R. da. Currículo, ensino médio e bncc-um cenário de disputas. *Retratos da Escola*, v. 9, n. 17, 2016.

5 LORENZATO, S. *Para aprender matemáticas*. [S.l.]: Autores Associados (Editora Autores Associados LTDA), 2015.

6 LORENZATO, S. Porque não ensinar geometria? a educação matemática em revista. *Blumenau: SBEM, Ano III*, n. 4, 1995.

7 PURIFICAÇÃO, I. *Cabri-géométre e a teoria de Van Hiele: possibilidades e avanços na construção do conceito de quadrilátero. 1999. 228 f.* Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado em Educação)–Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1999.