



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Paulo Ricardo Bandeira da Silva

**CORRESPONDENTES GEOMÉTRICOS PARA
RESULTADOS ALGÉBRICOS**

RECIFE
2021



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Paulo Ricardo Bandeira da Silva

CORRESPONDENTES GEOMÉTRICOS PARA RESULTADOS ALGÉBRICOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Santiago

RECIFE
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586c

Silva, Paulo Ricardo Bandeira da
Correspondentes Geométricos para Resultados Algébricos / Paulo Ricardo Bandeira da Silva. - 2021.
65 f. : il.

Orientador: Paulo Roberto Santiago.
Inclui referências e apêndice(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em
Matemática (PROFMAT), Recife, 2021.

1. Geometria Analítica. 2. Álgebra. 3. Produto Interno. 4. Educação Matemática. I. Santiago, Paulo Roberto, orient. II.
Título

CDD 510

DECLARAÇÃO

Eu, **Paulo Ricardo Bandeira da Silva** declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título **CORRESPONDENTES GEOMÉTRICOS, PARA RESULTADOS ALGÉBRICOS**, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processos administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador **Dr. Paulo Roberto Santiago**, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, _____ de _____ de _____.

Assinatura: _____

PAULO RICARDO BANDEIRA DA SILVA

Correspondentes Geométricos para Resultados Algébricos

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 03/09/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Paulo Roberto Santiago (Orientador)– UFRPE

Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão – DMat-UFPE

Prof. Dr. José Deibsom da Silva– PROFMAT/UFRPE

Dedico este trabalho a Deus e a toda minha família

Agradecimentos

Quero agradecer a minha família em especial a minha esposa Helda Paula do Nascimento Gomes por ter compreendido a importância deste trabalho e não ter medido esforços para torná-lo possível, tendo assim que por muitas vezes conter os anseios dos nossos filhos Helena e Nikola em estarem sempre brincando próximos a mim enquanto eu precisava de tempo e concentração, também aos meus pais José Bandeira da Silva Neto e Leidjane Maria Bandeira da Silva por sempre acreditarem em meu potencial, assim como meus irmãos Paula, Renata e Pedro.

Quero agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Paulo Roberto Santiago, pela dedicação, empenho e paciência para comigo e também agradecer a Prof^a. Dr^a. Anete Soares Cavalcante que além de ser uma excelente profissional tornou-se amiga.

Por fim, agradeço a todos meus amigos que conheci durante o curso de mestrado que tanto me apoiaram e contribuíram durante esta jornada, em particular a Jonas, Juvino, Marcos e Neiviton.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12.2)*

Resumo

Neste trabalho apresentamos alguns conteúdos algébricos e geométricos contidos em livros didáticos de matemática utilizados no ensino básico, fizemos transcrições de trechos de alguns desses livros e, em contraste, obtivemos os mesmos resultados acima mencionados utilizando o Produto Interno Euclidiano no plano. Também fizemos um comparativo exaltando as vantagens em adotar esse método alternativo. O foco é desenvolver um conteúdo que sirva de apoio aos docentes que busquem meios alternativos para abordar os conteúdos citados anteriormente, e com isso possam desenvolver uma prática de ensino mais eficiente, tendo nesse trabalho um parâmetro para auxiliar na escolha da forma de transmitir o conteúdo de forma intuitiva e eficaz.

Palavras-chave: Geometria Analítica, Álgebra, Produto Interno, Educação Matemática.

Abstract

In this work we present some algebraic and geometric material contained in mathematics textbooks used in high school, we make transcriptions of excerpts from some of these books and, in contrast, we obtain the same results above mentioned using the Euclidian Inner Product. We also compare the two approaches, highlighting the advantages of adopting the Euclidian Inner Product. The focus is to present a material to support teachers who seek for alternative means to address the aforementioned material and, with this they can develop a more efficient teaching practice, having in this work a parameter to assist in choosing another way to transmit the syllabus in an intuitive and effective way.

Keywords: Analytical Geometry, Algebra, Inner Product, Mathematics Education.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Distância entre dois pontos	24
Figura 2 – Representação geométrica da reta r	26
Figura 3 – Área do triângulo	28
Figura 4 – Representação geométrica da reta r	29
Figura 5 – Representação da circunferência definida no livro	31
Figura 6 – Trabalho	33
Figura 7 – Projeção ortogonal de u sobre v	34
Figura 8 – Norma de u	34
Figura 9 – Representação geométrica do cosseno	35
Figura 10 – Representação em coordenadas polares	36
Figura 11 – Projeção ortogonal	40
Figura 12 – Teorema de Pitágoras	42
Figura 13 – Vetores Perpendiculares	44
Figura 14 – Paralelogramo	45
Figura 15 – Representação da reta	48
Figura 16 – Retas paralelas	49
Figura 17 – Distância de um ponto a uma reta	50
Figura 18 – Ponto Médio	51
Figura 19 – Representação da mediatriz	52
Figura 20 – Encontro de mediatrizes	53
Figura 21 – Circunferência que passa por três pontos	54
Figura 22 – Área do triângulo	54
Figura 23 – Reflexão do triângulo em relação ao eixo y	56
Figura 24 – Gráfico de uma função Par	63
Figura 25 – Gráfico de uma função ímpar	64

Sumário

	Introdução	19
1	JUSTIFICATIVA DO ESTUDO	21
2	REFERENCIAL TEÓRICO	23
2.1	Competências do ensino da matemática	23
2.2	Transcrição de trechos de livros didáticos	23
2.2.1	Distância entre dois pontos por (SOUZA, 2013)	23
2.2.2	Distância de um ponto a uma reta por (CHAVANTES EDUARDO; PRESTES, 2020)	24
2.2.3	Condição de alinhamento de três pontos por (LEONARDO, 2016)	26
2.2.4	Área do triângulo por (BALESTRI, 2016)	27
2.2.5	Equação geral da reta por (SMOLE KÁTIA STOCCO; DINIZ, 2012)	29
2.2.6	Posição relativa entre duas reta por (SMOLE KÁTIA STOCCO; DINIZ, 2012)	30
2.2.7	Equação da circunferência por (DANTE, 2017)	31
3	PRODUTO INTERNO	33
3.1	Motivação e definição do Produto Interno Euclidiano no \mathbb{R}^2	33
3.2	Propriedades do Produto Interno Euclidiano	36
3.3	Produto Interno	39
3.4	Um pouco de Geometria num Espaço Qualquer com Produto Interno	44
4	APLICAÇÕES DO PRODUTO INTERNO EUCLIDIANO EM \mathbb{R}^2	47
4.1	Alinhamento de três pontos	47
4.2	Equação da reta	47
4.3	Posição relativa entre duas retas	49
4.4	Distância de um ponto a uma reta	50
4.5	Mediatriz de um segmento	51
4.6	Equação da circunferência que passa por três pontos	52
4.7	Área de um triângulo em função das coordenadas dos seus vértices	54

5	METODOLOGIA	57
5.1	Avaliação da prática do ensino da matemática	57
5.2	Desenvolvimento dos resultados propostos	57
	REFERÊNCIAS	59
	APÊNDICES	61
	APÊNDICE A – FUNÇÕES PARES E FUNÇÕES ÍMPARES	63

Introdução

Com o objetivo de facilitar a abordagem de determinados conteúdos do ensino médio, vamos utilizar recursos geométricos e algébricos, que possam simplificar a compreensão dos alunos sobre determinados conteúdos.

Corriqueiramente no ensino da matemática os conteúdos são apresentados separadamente sem que haja uma ligação direta entre os resultados, deixando de explorar outras abordagens que poderiam facilitar a compreensão dos temas trabalhados.

A matemática não é precisamente, um conjunto de elementos sem coesão interna. Sua aprendizagem aponta uma sequência temporal específica, na qual alguns conceitos articulam-se sobre o conhecimento de outros, de modo que, algumas vezes essa necessidade leva a realizar uma instrução tangencial de aspectos necessários para a compreensão daqueles (por exemplo, a soma, anterior à multiplicação; os números naturais, antes dos racionais; os números e as medidas de distâncias, prévios à geometria). (J.C., 2007)

Vamos focar nosso estudo no ensino básico com o objetivo de apresentar aos docentes um conteúdo de apoio didático, considerando os currículos educacionais estabelecidos pela legislação. Contudo ao longo desse trabalho exploraremos os vetores e suas propriedades e operações, assim como algumas funções, espaços vetoriais e geometria.

Faremos análise de alguns livros didáticos utilizados no ensino básico, e produziremos resultados semelhantes aos encontrados nos livros, usando **Produto Interno**. Com isso proporemos uma abordagem alternativa para determinados conteúdos que usualmente são apresentados pela Geometria Analítica.

Para cada transcrição de um conteúdo apresentado nos livros, procuraremos fazer pelo menos um correspondente a ele através do produto interno e suas propriedades. Esses correspondentes representarão nossa proposta de trabalho.

1 Justificativa do estudo

Analisando a prática pedagógica do ensino da matemática, pode-se perceber que os professores costumam seguir “vícios” encontrados nos livros didáticos, vícios esses que provocam uma repetição sistemática de como abordamos os assuntos e competências definidos para os anos finais do ensino básico.

Essas repetições acabam sendo excludentes, pois corriqueiramente alguns alunos não acompanham a abordagem usada e por muitas vezes acabam perdendo a oportunidade de compreender o conteúdo por falta de um currículo diferenciado que possa atender melhor suas necessidades.

Tomando como exemplo a Geometria Analítica, assunto visto normalmente no terceiro ano do ensino médio, que torna a obtenção dos resultados algébricos mais imediata, traz consigo a praticidade, porém deixa de abordar a geometria na sua essência.

Um dos objetivos da Geometria Analítica é obter equações associadas a conjuntos de pontos, estabelecendo assim uma relação entre a Geometria e a Álgebra. Essa relação é pouco explorada nos ensinos Fundamental e Médio, ficando o estudo da Geometria Analítica limitado a fórmulas e nomenclaturas. (DELGADO JORGE; FRENSEL, 2017)

Como professor de matemática da rede pública procuro explorar os conhecimentos prévios de matemática que os alunos possuem, para obter resultados algébricos apresentados nos livros didáticos. Com base na experiência na regência de aulas, este trabalho de dissertação foi desenvolvido como proposta de uma abordagem não usual nos livros adotados no ensino da matemática nos anos finais do ensino médio.

2 Referencial Teórico

2.1 Competências do ensino da matemática

A BNCC propõe para o ensino da matemática do ensino médio:

- Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
- Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

É com base nessas recomendações que este trabalho é desenvolvido. (BRASIL, 2018)

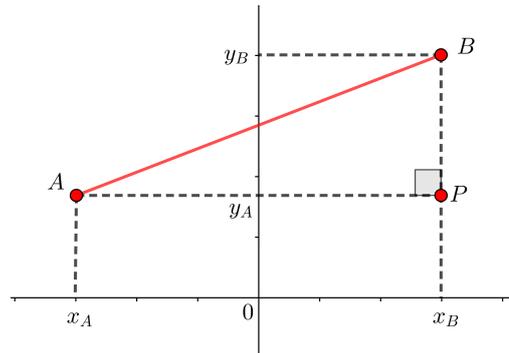
2.2 Transcrição de trechos de livros didáticos

Neste capítulo faço transcrições fiéis de textos dos livros aqui citados, nestas constam possíveis erros ortográficos, assim como imagens e símbolos que possam apresentar incoerências.

2.2.1 Distância entre dois pontos por (SOUZA, 2013)

Podemos deduzir uma fórmula por meio da qual seja possível calcular a distância entre dois pontos quaisquer. Para isso, considere os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ em um plano cartesiano.

Figura 1 – Distância entre dois pontos



Fonte: Produzido pelo autor

Como \overline{AP} é paralelo ao eixo x e \overline{BP} é paralelo ao eixo y , temos que $\overline{AP} = \|x_B - x_A\|$ e $\overline{BP} = \|y_B - y_A\|$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle ABP$, temos:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AP^2 + BP^2 \\ &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \end{aligned}$$

que implica

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2.2.2 Distância de um ponto a uma reta por (CHAVANTES EDUARDO; PRESTES, 2020)

A distância de um ponto a uma reta r é definida como a medida do segmento de reta AA' , sendo A' a projeção ortogonal de A sobre r .

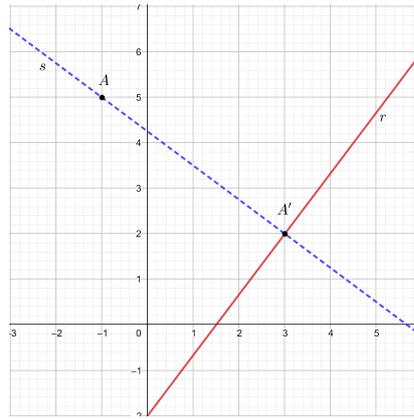
Por exemplo, para calcular analiticamente a distância entre o ponto $A(-1, 5)$ e a reta $r : 4x - 3y - 6 = 0$, podemos obter a equação da reta s que passa por A e é perpendicular a r no ponto A' , projeção ortogonal do ponto $A(-1, 5)$ sobre r .

O coeficiente angular da reta r é $m_r = \frac{4}{3}$, pois:

$$4x - 3y - 6 = 0 \implies 3y = 4x - 6 \implies y = \frac{4}{3}x - 2$$

como queremos $s \perp r$, temos:

$$m_r = -\frac{1}{m_s} = -\frac{1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$



Fonte: Produzido pelo autor

Por hipótese, a reta s passa pelo ponto $A(-1, 5)$ e sua equação na forma geral é:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \implies y - 5 = -\frac{3}{4}[x - (-1)] \implies y - 5 = -\frac{3x + 3}{4} \implies 3x + 4y - 17 = 0$$

O ponto A' é comum às retas r e s ; assim, as coordenadas de A' correspondem à solução de sistema linear composto pelas equações dessas retas.

$$\begin{cases} 4x - 3y - 6 = 0 \\ 3x + 4y - 17 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, temos:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 6 = 0. (4) \\ 3x + 4y - 17 = 0. (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x - 12y - 24 = 0 \\ 9x + 12y - 51 = 0 \end{cases} +$$

$$25x + 0y - 75 = 0 \implies 25x = 75 \implies x = 3$$

Substituindo x por 3 em $4x - 3y - 6 = 0$, obtemos:

$$4x - 3y - 6 = 0 \implies 4 \cdot 3 - 3y - 6 = 0 \implies 3y = 6 \implies y = 2$$

Assim, $A' = (3, 2)$.

Calculando a distância entre $A(-1, 5)$ e $A' = (3, 2)$, obtemos:

$$AA' = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Portanto a distância entre o ponto A e a reta $r : 4x - 3y - 6 = 0$ é $5u$.

Pode-se demonstrar que, ao calcular a distância $d(P, r)$ de um ponto $P(x_p, y_p)$ qualquer a uma reta genérica $r : ax + by + c = 0$ de maneira semelhante à apresentada anteriormente, obtemos:

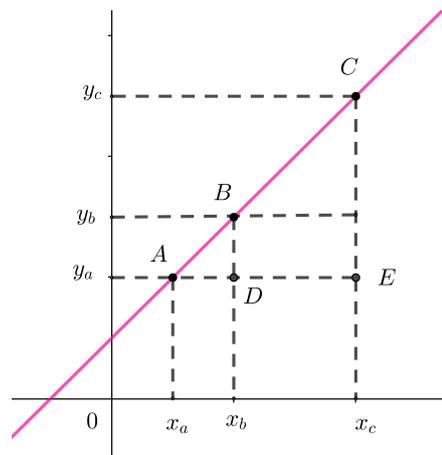
$$d(P, r) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2.2.3 Condição de alinhamento de três pontos por (LEONARDO, 2016)

Veremos qual é a condição para que três pontos distintos, $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$, pertençam a uma reta, isto é, estejam alinhados.

Vamos considerar o caso em que os pontos pertencem a uma reta não paralela a um dos eixos:

Figura 2 – Representação geométrica da reta r



Fonte: Produzido pelo autor

Os triângulos ACE e ABD são semelhantes. Assim:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{DB}} \implies \frac{x_c - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y_c - y_a}{y_b - y_a}$$

Com $x_b - x_a \neq 0$ e $y_b - y_a \neq 0$

Assim:

$$(x_c - x_a)(y_b - y_a) - (x_b - x_a)(y_c - y_a) = 0 \implies$$

$$\implies x_c y_b - x_c y_a - x_a y_b + x_a y_a - x_b y_c + x_b y_a + x_a y_c - x_a y_a = 0 \implies$$

$$\implies x_c y_b - x_c y_a - x_a y_b - x_b y_c + x_b y_a + x_a y_c = 0$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por -1 e reordenando os termos, obtemos:

$$x_a y_b + x_c y_a + x_b y_c - x_c y_b - x_a y_c - x_b y_a = 0$$

Logo, se três pontos $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$, estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

nesse caso a recíproca também é verdadeira:

$$\text{Se } \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ então } A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b) \text{ e } C = (x_c, y_c), \text{ estão}$$

alinhados.

Essas condições também são válidas quando dois dos pontos coincidem ou quando os pontos pertencem a uma reta paralela a algum dos eixos. Então:

Três pontos $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$, são colineares se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2.2.4 Área do triângulo por (BALESTRI, 2016)

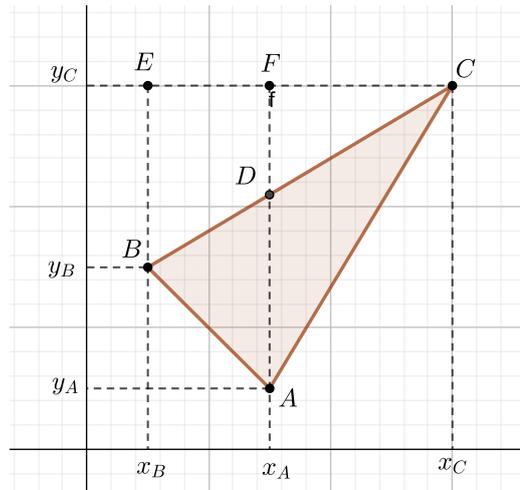
A área de triângulo ABC pode ser calculada por $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|$. Para isso, considere um triângulo cujas coordenadas dos vértices correspondem aos pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.

Dado um ponto D , pertencente ao segmento BC , e os pontos E e F , temos que os triângulos DCF e BCE são semelhantes, pois possuem os três ângulos congruentes.

Logo:

$$\frac{CF}{CE} = \frac{DF}{BE}$$

Figura 3 – Área do triângulo



Fonte: Produzido pelo autor

Assim:

$$\frac{CF}{CE} = \frac{DF}{BE} \implies \frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_C - y_D}{y_C - y_B} \implies y_D = y_C - \frac{(x_C - x_A)(y_C - y_B)}{x_C - x_B}$$

Observe que a área do triângulo ABC é igual a soma das áreas dos triângulos ABD e ACD, isto é, a área ΔABC é igual a:

$$\frac{1}{2} \cdot AD \cdot EF + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot (EF + CF) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot |y_D - y_A| \cdot |x_C - x_B|$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left| y_C - \frac{(x_C - x_A)(y_C - y_B)}{x_C - x_B} - y_A \right| \cdot |x_C - x_B|$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left| \frac{(y_C - y_A)(x_C - x_B) - (x_C - x_A)(y_C - y_B)}{x_C - x_B} \right| \cdot |x_C - x_B|$$

$$\frac{1}{2} \cdot |(y_C - y_A)(x_C - x_B) - (x_C - x_A)(y_C - y_B)|$$

$$\frac{1}{2} \cdot | - (x_C y_C + x_B y_C + x_C y_A - x_B y_A + x_C y_C - x_C y_B - x_A y_C + x_A y_B) |$$

$$\frac{1}{2} \cdot | x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_A y_C - x_B y_A - x_C y_B |$$

Note que $x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_A y_C - x_B y_A - x_C y_B$ corresponde ao valor do determinante

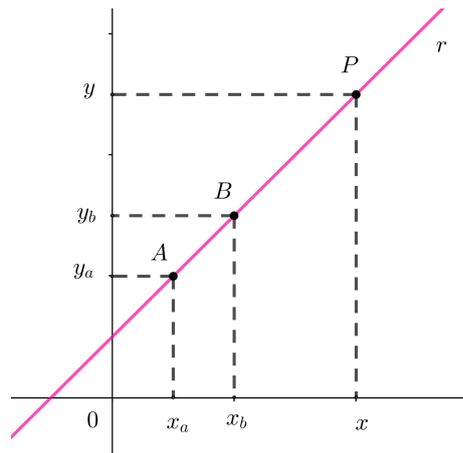
$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Portanto, a área do triângulo ABC é igual a $\frac{1}{2} \cdot |D|$.

2.2.5 Equação geral da reta por (SMOLE KÁTIA STOCCO; DINIZ, 2012)

Dados dois pontos distintos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ pertencentes a reta r , vamos determinar uma relação entre as coordenadas de um ponto genérico, $P(x, y)$, também pertencente à reta r .

Figura 4 – Representação geométrica da reta r



Fonte: Produzido pelo autor

Pela condição de alinhamento para os pontos A, B e P , podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies (y_a - y_b)x + (x_b - x_a)y + x_a y_b - x_b y_a = 0$$

Como nesse determinante, as únicas variáveis são x e y , os outros elementos são números reais conhecidos. Assim, podemos fazer: $a = (y_a - y_b)$, $b = (x_b - x_a)$ e $c = (x_a y_b - x_b y_a)$.

Não sendo a e b simultaneamente nulos, obtemos a **equação da reta**:

$$ax + by + c = 0$$

2.2.6 Posição relativa entre duas retas por (SMOLE KÁTIA STOCCO; DINIZ, 2012)

Sejam as retas $r : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s : a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

As coordenadas dos pontos de r e s , satisfazem as equações, respectivamente, de r e s ; essas equações formam o sistema de equações simultâneas:

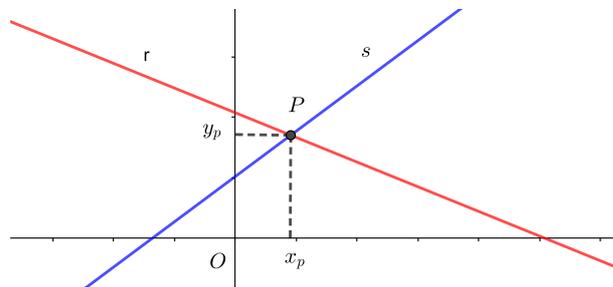
$$(S) \begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases}$$

Temos três possibilidades:

1º) r e s são **concorrentes entre si**.

Existe um único ponto $P(x_p, y_p)$ intersecção de r e s ; logo, pela regra de Cramer, o sistema (S) é **possível e determinado** e (x_p, y_p) é solução de (S) :

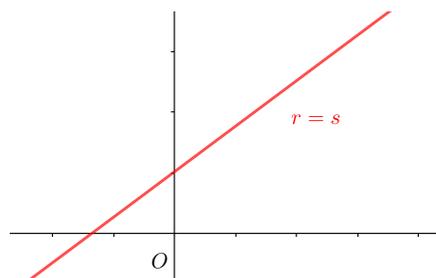
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$



2º) r e s são **coincidentes**.

Todos os pontos de r estão em s e vice-versa; logo, (S) é **possível e determinado**:

$$D = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

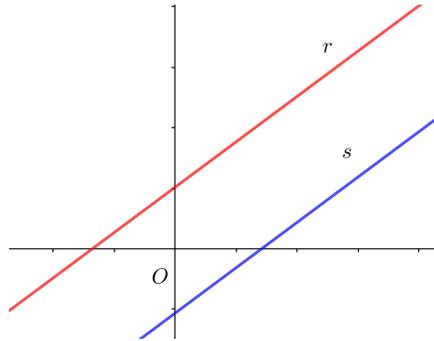


Além disso, as equações de r e s devem ser equivalentes, pois correspondem aos mesmos pontos; daí, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

3º) r e s são **paralelas**.

Não há pontos comuns a r e s ; logo, (S) é **impossível**.

$$D = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$



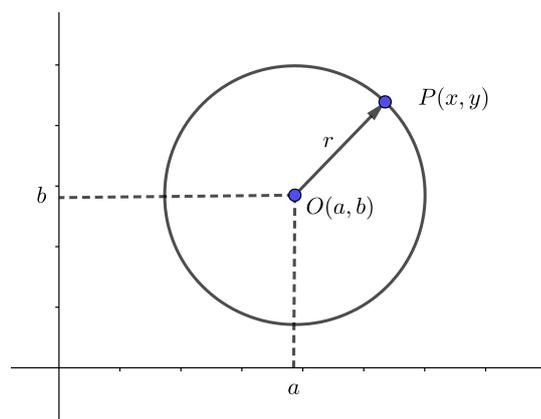
Nesse caso, as equações de r e s não podem ser equivalentes, porque correspondem a conjuntos de pontos distintos; daí, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

2.2.7 Equação da circunferência por (DANTE, 2017)

Uma circunferência com centro $O(a, b)$ e raio r é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ do plano equidistantes de O , ou seja:

$$d(O, P) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Figura 5 – Representação da circunferência definida no livro



elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Observação: No caso particular de o centro da circunferência estar na origem, ou seja, $a = b = 0$, a equação da circunferência de raio r é $x^2 + y^2 = r^2$.

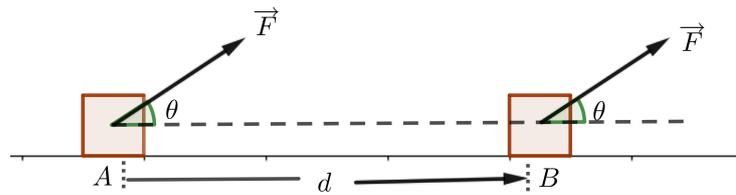
3 Produto Interno

3.1 Motivação e definição do Produto Interno Euclidiano no \mathbb{R}^2

Tanto em Física como em geometria, com frequência, surge a necessidade de calcular o produto de três fatores: dois comprimentos, e o cosseno de um ângulo.

Em Física isso surge quando é necessário calcular o **trabalho** τ realizado pela força \vec{F} no decorrer do deslocamento d .

Figura 6 – Trabalho



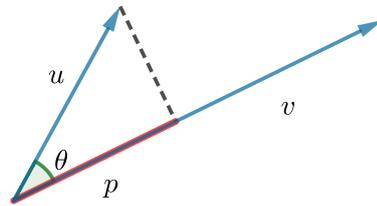
Fonte: Produzido pelo autor

τ é dado pelo produto da intensidade F da força \vec{F} aplicada no ponto material, pelo deslocamento sofrido d pelo ponto material e pelo cosseno do ângulo que se forma entre as orientações do vetor força e deslocamento. Portanto a fórmula que nos permite calcular o trabalho realizado é a seguinte:

$$\tau = Fd \cos \theta \quad (3.1)$$

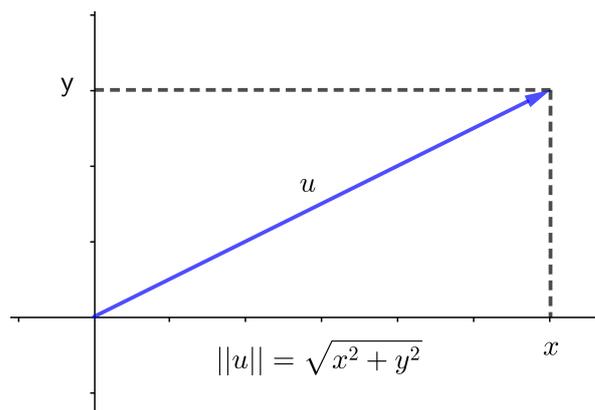
Já em geometria quando desejamos determinar a **projeção ortogonal** de um vetor $u = (x, y)$ sobre um vetor v somos conduzidos a calcular o produto

$$p = \|u\| \cos \theta \quad (3.2)$$

Figura 7 – Projeção ortogonal de u sobre v 

Fonte: Produzido pelo autor

onde $\|u\|$ denota o *comprimento* (ou *norma*) o qual é definido, de maneira natural, em virtude do Teorema de Pitágoras por, $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, e θ é um ângulo entre u e v .

Figura 8 – Norma de u 

Fonte: Produzido pelo autor

As considerações que fizemos desde o início desse capítulo nos motivam a definir o **Produto Interno Euclidiano** em \mathbb{R}^2 , de dois vetores não nulos u e v , o qual denotaremos por $\langle u, v \rangle$, como sendo

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta \quad (3.3)$$

onde θ é um ângulo entre u e v . Se u ou v for o vetor nulo definimos $\langle u, v \rangle$ como sendo zero.

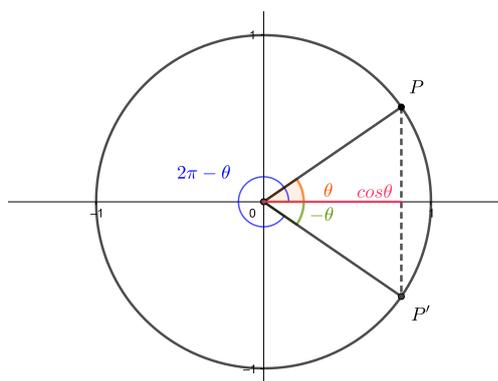
Historicamente, (3.3) representa a primeira definição de produto interno. Em livros textos da primeira metade do século XX (3.3) era apresentada pela frase: "**Chama-se produto escalar, ou interno, de dois vetores, ao produto dos módulos desses vetores pelo cosseno do ângulo que eles formam.**" Mesmo em livros textos mais recentes

como, (BOULOS PAULO; CAMARGO, 2005), e (SANTOS, 2007) inicia-se como fizemos em (3.3).

Observe que os resultados fornecidos pelas fórmulas (3.2) e (3.3) independem de usarmos θ , $2\pi - \theta$, ou $-\theta$.

Basta perceber que $\cos \theta = \cos(-\theta) = \cos(2\pi - \theta)$, veja sua representação no círculo trigonométrico conforme figura 9.

Figura 9 – Representação geométrica do cosseno



Fonte: Produzido pelo autor

Embora (3.3) tenha considerável significado Físico e Geométrico, do ponto de vista operacional deixa a desejar pois envolve o cálculo de duas raízes quadradas, depende de uma aproximação na medição de θ e ainda do valor de $\cos \theta$. Imagine obter esses valores quando ainda não existiam calculadoras. Mesmo hoje em dia ficamos à mercê da aproximação para θ .

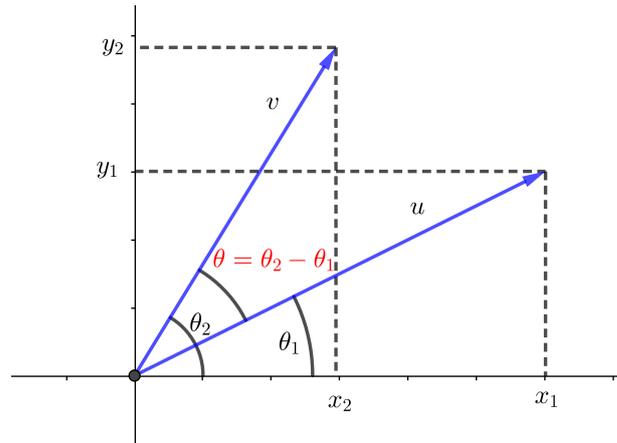
Mas felizmente temos um Teorema que torna trivial o cálculo de produtos internos e que possui outras consequências importantes.

Teorema 3.1. *Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, então*

$$\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 \quad (3.4)$$

Demonstração. (3.4) é óbvia se u ou v for um vetor nulo. Caso contrário, introduza coordenadas polares e escreva $u = (r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1)$, $v = (r_2 \cos \theta_2, r_2 \sin \theta_2)$, onde $r_1 = \|u\|$ e $r_2 = \|v\|$. Veja figura 10:

Figura 10 – Representação em coordenadas polares



Fonte: Produzido pelo autor

Substituindo em (3.3) com $\theta = \theta_2 - \theta_1$ e utilizando duas identidades trigonométricas obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle u, v \rangle &= r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\
 &= r_1 r_2 (\cos \theta_2 \cos \theta_1 + \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_1) \\
 &= r_1 \cos \theta_1 r_2 \cos \theta_2 + r_1 \text{sen} \theta_1 r_2 \text{sen} \theta_2 \\
 &= x_1 x_2 + y_1 y_2
 \end{aligned}$$

concluindo assim a demonstração do Teorema 3.1 . □

3.2 Propriedades do Produto Interno Euclidiano

Proposição 3.2. *O Produto Interno Euclidiano possui as seguintes propriedades*

- I. $\langle u, u \rangle \geq 0$, para todo vetor u ; e $\langle u, u \rangle = 0$, se, e somente se, $u = (0, 0)$;
- II. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, para todos vetores u e v ;
- III. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, para todos vetores u e v , e todo número real λ ;
- IV. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$, para todos vetores u, v e w .

OBSERVAÇÃO: Não é difícil demonstrar que as propriedades III e IV podem ser condensadas numa única propriedade V equivalente à III e IV juntas:

- V. $\langle u, \lambda v + w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$, para todos vetores u, v e w e todo número real λ .

É possível demonstrar as propriedades I a IV utilizando apenas 3.3 mas dá bastante trabalho e fica deslegante.

Bem, vamos as demonstrações, que o Teorema 3.1 torna elementar transformando as demonstrações em apenas adições e multiplicações de números reais.

Demonstração. Vamos a demonstração de I, seja o vetor $u = (x_1, y_1)$, utilizando o Teorema 3.1 obtemos

$$\begin{aligned}\langle u, u \rangle &= \langle (x_1, y_1), (x_1, y_1) \rangle \\ &= x_1x_1 + y_1y_1 \\ &= x_1^2 + y_1^2 \geq 0\end{aligned}$$

Em particular se u for o vetor nulo o teorema 3.1 torna trivial a verificação de $\langle u, u \rangle = 0$. Porém se ocorre $\langle u, u \rangle = 0$ temos

$$x_1x_1 + y_1y_1 = x_1^2 + y_1^2 = 0$$

que implica $x_1 = y_1 = 0$ resultando em u sendo o vetor nulo.

□

Demonstração. Vamos a demonstração de II, sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, tem-se

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 \\ &= x_2x_1 + y_2y_1 \\ &= \langle v, u \rangle\end{aligned}$$

□

Demonstração. Para obter III, sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ e λ um número real.

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda u, v \rangle &= \langle \lambda(x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle \\
 &= \langle (\lambda x_1, \lambda y_1), (x_2, y_2) \rangle \\
 &= \lambda x_1 x_2 + \lambda y_1 y_2 \\
 &= \lambda(x_1 x_2 + y_1 y_2) \\
 &= \lambda \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle \\
 &= \lambda \langle u, v \rangle
 \end{aligned}$$

□

Demonstração. Agora vamos a IV, sejam $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$, $w = (x_3, y_3)$ e λ um número real

$$\begin{aligned}
 \langle u, v + w \rangle &= \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) + (x_3, y_3) \rangle = \langle (x_1, y_1), (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \rangle \\
 &= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + x_1 x_3 + y_1 y_3 \\
 &= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle
 \end{aligned}$$

Demonstração. Para concluir vamos mostrar que V corresponde as propriedades III e IV condensadas , veja a seguir

$$\langle u, \lambda v + w \rangle = \langle u, \lambda v \rangle + \langle u, w \rangle = \langle \lambda v, u \rangle + \langle u, w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

Note que a primeira igualdade decorre da propriedade IV, e a primeira parcela da terceira igualdade decorre de III.

Partindo da propriedade V

$$\langle u, \lambda v + w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

basta fazer $\lambda = 1$ para obtermos IV.

$$\langle u, 1v + w \rangle = 1 \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

sendo w nulo obtemos III.

$$\langle u, \lambda v + w \rangle = \langle u, \lambda v \rangle = \langle \lambda v, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

□

Concluiremos este capítulo com mais propriedades e aplicações do Produto Interno Euclidiano. **Entretanto, faremos isso para um produto interno qualquer, uma vez que tudo que precisamos para fazer geometria são as propriedades I a IV descritas na proposição 3.2 e não a fórmula para o produto interno.**

3.3 Produto Interno

Definição 3.3. Sejam \mathbb{V} um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. Um produto interno em \mathbb{V} é uma aplicação, de $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ em \mathbb{R} , que associa a cada par de vetores $(X, Y) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ um número real $\langle X, Y \rangle$ que possui as seguintes propriedades:

- P1 $\langle X, X \rangle \geq 0$, para todo vetor $X \in \mathbb{V}$; e $\langle X, X \rangle = 0$, se, e somente se, X é o vetor nulo;
- P2 $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$, para todos vetores $X, Y \in \mathbb{V}$;
- P3 $\langle X, \lambda Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle$, para todos vetores $X, Y \in \mathbb{V}$, e todo número real λ ;
- P4 $\langle X, Y + Z \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X, Z \rangle$, para todos vetores $X, Y, Z \in \mathbb{V}$.

A quantidade de Espaços Vetoriais com Produto Interno é incontável e com diversas aplicações importantes.

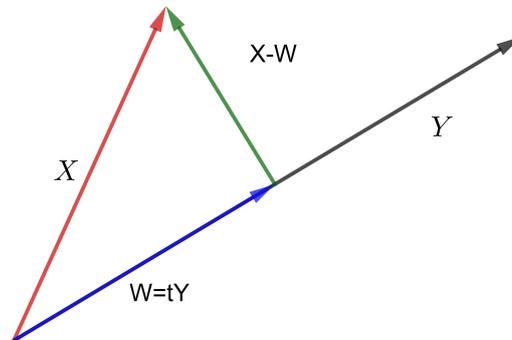
Enfatizamos tudo que fizemos até o final desse capítulo é válido para um espaço vetorial, sobre \mathbb{R} , qualquer munido de um produto interno qualquer. O que importa são as quatro propriedades P1 a P4, e não da fórmula que define o produto interno.

Assim fixemos até o final desse capítulo um espaço vetorial \mathbb{V} e seu produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definição 3.4. Dizemos que X e Y pertencentes à \mathbb{V} são **ortogonais**, (ou **perpendiculares**) quando $\langle X, Y \rangle = 0$.

Definição 3.5. A **projeção ortogonal** de um vetor X sobre um vetor Y é um vetor W que é um múltiplo de Y e $X - W$ é ortogonal à Y .

Figura 11 – Projeção ortogonal



Fonte: Produzido pelo autor

Proposição 3.6. A *Projeção ortogonal* de X sobre $Y \neq 0$, a qual denotaremos por $Proj_Y(X)$ é dada por

$$Proj_Y(X) = \frac{\langle X, Y \rangle}{\langle Y, Y \rangle} Y \quad (3.5)$$

Demonstração. Para simplificar a notação, denotemos $Proj_Y(X)$ por W . Como $W = tY$ e $X - W$ é ortogonal à Y , devemos ter $0 = \langle X - tY, Y \rangle = \langle X, Y \rangle - t\langle Y, Y \rangle$. Donde

$$t = \frac{\langle X, Y \rangle}{\langle Y, Y \rangle}$$

e

$$Proj_Y(X) = \frac{\langle X, Y \rangle}{\langle Y, Y \rangle} Y$$

□

Dado $Z \in \mathbb{V}$ definimos a **norma**, ou comprimento, de Z , a qual denotaremos por $\|Z\|$, como sendo o número real não negativo tal que

$$\|Z\|^2 = \langle Z, Z \rangle \quad (3.6)$$

Proposição 3.7. A norma, como acima definida, possui as seguintes propriedades:

N1 $\|X\| \geq 0$, para todo vetor $X \in \mathbb{V}$; e $\|X\| = 0$, se, e somente se, X é o vetor nulo;

N2 $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$, para todo vetor $X \in \mathbb{V}$, e para todo número real λ .

N3 $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$, para todos $X, Y \in \mathbb{V}$. (Desigualdade triangular)

Demonstração. Vamos inicialmente demonstrar a propriedade N1.

Segue da propriedade P1 da definição 3.3 que

$$\langle X, X \rangle \geq 0$$

extraindo a raiz quadrada positiva em ambos os lados

$$\sqrt{\langle X, X \rangle} \geq 0$$

temos da equação (3.6)

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} \geq 0$$

É importante observar que se X é o vetor nulo, imediatamente $\|X\| = 0$.

Porém no caso de termos $\|X\| = 0$ isso implica por P1 da definição 3.3 em X ser o vetor nulo.

Agora demonstraremos N2 usando a propriedade P3 da definição 3.3 e a equação (3.6) (Observação: na segunda igualdade aplicaremos P3 duas vezes e a propriedade P2.)

$$\begin{aligned} \|\lambda X\| &= \sqrt{\langle \lambda X, \lambda X \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle X, X \rangle} \\ &= |\lambda| \sqrt{\langle X, X \rangle} \\ &= |\lambda| \|X\| \end{aligned}$$

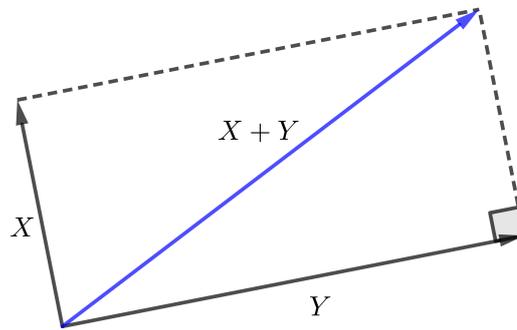
com isso concluímos as demonstrações de N1 e N2. □

Já a demonstração de N3, esta é não trivial e, será realizada como aplicação do Lema 3.9 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).

Teorema 3.8 (Pitágoras). *Se $X, Y \in \mathbb{V}$ são ortogonais, c.f. def 3.4, então*

$$\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 \tag{3.7}$$

Figura 12 – Teorema de Pitágoras



Fonte: Produzido pelo autor

Demonstração. Utilizado a equação (3.6) e as propriedades P2 e P4 da definição 3.3 obtemos

$$\begin{aligned}
 \|X + Y\|^2 &= \langle X + Y, X + Y \rangle \\
 &= \langle X, X + Y \rangle + \langle Y, X + Y \rangle \\
 &= \langle X, X \rangle + \langle Y, Y \rangle + 2\langle X, Y \rangle \rightarrow 0 \\
 &= \langle X, X \rangle + \langle Y, Y \rangle \\
 &= \|X\|^2 + \|Y\|^2
 \end{aligned}$$

□

Lema 3.9 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).

$$|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \|Y\| \quad (3.8)$$

Antes de iniciarmos uma demonstração, cumpre mencionar que a demonstração "mais popular" é a apresentada, em particular, no Cap 7 do Livro do Profmat, Introdução à Álgebra Linear:

http://moodle.profmat-sbm.org.br/MA33/2012/AL_PROFMAT_cap07.pdf

Entretanto deixo aqui duas colocações para você pensar:

1) De onde veio a ideia de considerar $\langle u + tv, u + tv \rangle$?

2) A demonstração apresentada não se aplica quando \mathbb{V} é um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos.

Sem mais delongas, vamos a uma demonstração:

Demonstração. Se X ou Y é o vetor nulo, a desigualdade é imediata, conforme as propriedades P1 da definição 3.3 e N1 da proposição 3.7.

Caso contrário, seja $W = \text{Proj}_Y(X) = \frac{\langle X, Y \rangle}{\langle Y, Y \rangle} Y$. Como vimos, $X - W$ é ortogonal à W , c.f. 3.5 e 3.6. Então, pelo teorema de Pitágoras 3.8(veja figura da definição 3.3) $\|X\|^2 = \|W\|^2 + \|X - W\|^2$. Segue que

$$\|X\|^2 \geq \|W\|^2 = \left\| \frac{\langle X, Y \rangle}{\langle Y, Y \rangle} Y \right\|^2 = \left| \frac{\langle X, Y \rangle}{\langle Y, Y \rangle} \right|^2 \|Y\|^2 = \frac{|\langle X, Y \rangle|^2}{|\langle Y, Y \rangle|^2} \|Y\|^2 = \frac{|\langle X, Y \rangle|^2}{\|Y\|^2}$$

donde obtemos $|\langle X, Y \rangle|^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2$, que implica 3.8.

□

Agora vamos a demonstração da Desigualdade Triangular (N3 Prop. 3.7). Com efeito, utilizando as propriedades P2 e P4, e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$\begin{aligned} \|X + Y\|^2 &= \langle X + Y, X + Y \rangle \\ &= \langle X, X \rangle + \langle Y, Y \rangle + 2\langle X, Y \rangle \\ &\leq \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2|\langle X, Y \rangle| \\ &\leq \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2\|X\| \|Y\| = (\|X\| + \|Y\|)^2 \end{aligned}$$

donde segue a *Desigualdade Triangular*.

Agora vamos ao coroamento desse capítulo.

Para X e Y **não nulos**, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser reescrita, na forma equivalente, $\frac{|\langle X, Y \rangle|}{\|X\| \|Y\|} \leq 1$, ou ainda como,

$$-1 \leq \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \|Y\|} \leq 1 \quad (3.9)$$

Essa desigualdade permite definir a noção de ângulo a partir de um Produto Interno **qualquer**. Com efeito,

Definição 3.10. Dados dois vetores **não nulos** X e Y num espaço vetorial \mathbb{V} , com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definimos o ângulo θ entre eles como sendo o único $0 \leq \theta \leq \pi$ tal

que

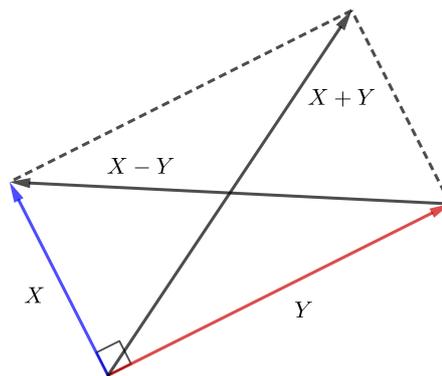
$$\cos \theta = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \|Y\|}$$

Finalmente, acabamos de justificar a frase apresentada anteriormente: “... tudo que precisamos para fazer geometria decorre das propriedades P1 a P4 descritas na Definição 3.3, e não a fórmula para o produto interno.”

3.4 Um pouco de Geometria num Espaço Qualquer com Produto Interno

G1 - Os vetores X e Y são perpendiculares se, e somente se, $\|X + Y\| = \|X - Y\|$.

Figura 13 – Vetores Perpendiculares



Fonte: Produzido pelo autor

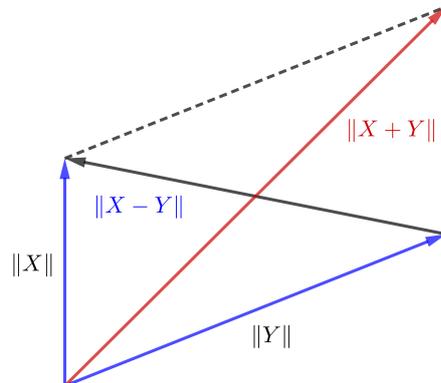
De fato. A demonstração decorre da equivalência entre as igualdades a seguir:

$$\begin{aligned} \|X + Y\| = \|X - Y\| & ; \quad \|X + Y\|^2 = \|X - Y\|^2 ; \quad \langle X + Y, X + Y \rangle = \langle X - Y, X - Y \rangle ; \\ \langle X, X \rangle + 2\langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle & = \langle X, X \rangle - 2\langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle ; \quad 4\langle X, Y \rangle = 0 \end{aligned}$$

G2- (Identidade do Paralelogramo) *Num paralelogramo, a soma dos quadrados dos comprimentos das suas diagonais é igual a soma dos quadrados dos seus quatro lados*

$$\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$$

Figura 14 – Paralelogramo



Fonte: Produzido pelo autor

De fato, $\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = \langle X + Y, X + Y \rangle + \langle X - Y, X - Y \rangle = \langle X, X \rangle + 2\langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle + \langle X, X \rangle - 2\langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle = 2\langle X, X \rangle + 2\langle Y, Y \rangle = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$.

Observe que se X e Y são perpendiculares, combinando G1 e G2, obtemos $2\|X + Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$, ou seja $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$, que é o Teorema de Pitágoras.

G3- (Identidade de Polarização)

$$\langle X, Y \rangle = 1/4 (\|X + Y\|^2 - \|X - Y\|^2)$$

.

A demonstração dessa identidade é semelhante a da Identidade do Paralelogramo e deixamos como exercício para o leitor.

Essa identidade, além de expressar o produto interno em função da norma, entre outras aplicações é útil na classificação das isometrias do \mathbb{R}^2 .

4 Aplicações do Produto Interno Euclidiano em \mathbb{R}^2

Neste capítulo apresentaremos um ou mais métodos alternativos para cada uma das transcrições apresentadas no Capítulo 2, com o objetivo de mostrar que é possível obter os mesmos resultados de uma forma mais intuitiva, completa e descomplicada, evitando a utilização em excesso de símbolos que dificultam a compreensão e comprometem a estética do texto.

Introduziremos o Produto Interno Euclidiano, para a partir dele obtermos as noções de comprimento, perpendicularismo, paralelismo, ângulo e faremos Geometria Analítica apenas utilizando este Produto Interno.

4.1 Alinhamento de três pontos

Antes uma observação, dado um vetor $v = (a, b)$, o vetor $u = (-b, a)$ é ortogonal, ou perpendicular, à v uma vez que é imediato verificar que $\langle u, v \rangle = 0$.

Note que três pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, pertencem a uma mesma reta, ou seja estão alinhados, se e somente se, um vetor ortogonal à $u = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, por exemplo $w = (-y_2 + y_1, x_2 - x_1)$, for ortogonal à $C - B = (x_3 - x_2, y_3 - y_2)$. Isto significa que $\langle (-y_2 + y_1, x_2 - x_1), (x_3 - x_2, y_3 - y_2) \rangle = 0$, ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} 0 &= -x_3y_2 + x_3y_1 + x_2y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_1y_3 - x_2y_2 + x_1y_2 \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) \\ &= \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.2 Equação da reta

Sejam $P(x_0, y_0)$ um ponto do plano cartesiano, e $v = (a, b)$ um vetor não nulo do \mathbb{R}^2 . Então um ponto $Q(x, y)$ pertence à reta r que passa por P e é perpendicular à v , se, e somente se, $\langle v, Q - P \rangle = 0$. Em coordenadas isso equivale a $\langle (a, b), (x - x_0, y - y_0) \rangle = 0$,

ou ainda

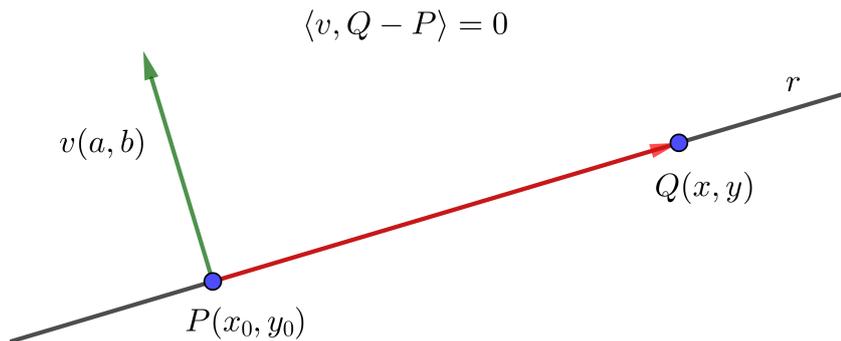
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$ax + by - ax_0 - by_0 = 0$$

$$ax + by + c = 0 \tag{4.1}$$

onde $c = -ax_0 - by_0$.

Figura 15 – Representação da reta



Fonte: Produzido pelo autor

Por outro lado, sejam $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ e $R(x_3, y_3)$ pontos do \mathbb{R}^2 que satisfazem a equação (4.1)

Fazendo as substituições obtém-se

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

subtraindo a equação 1 das equações 2 e 3, chegamos a

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = \langle v, Q - P \rangle = 0$$

$$a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) = \langle v, R - P \rangle = 0$$

ou seja os vetores $Q - P$ e $R - P$ são colineares, com isso concluímos que P , Q e R estão alinhados garantindo que a equação (4.1) representa uma reta.

Exemplo da obtenção da equação da reta que passa por dois pontos

Sejam $A(2, 3)$ e $B(-1, 5)$ pontos do plano, vamos obter a equação da reta que por eles passa.

Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto no plano diferente de A e B de modo que $v = P - A$ e $\langle v, B - A \rangle = 0$

assim

$$\langle v, B - A \rangle = \langle (x_0 - 2, y_0 - 3), (-1 - 2, 5 - 3) \rangle = \langle (x_0 - 2, y_0 - 3), (-3, 2) \rangle = 0$$

$$-3x_0 + 2y_0 = 0$$

basta escolher por exemplo $x_0 = 4$ e $y_0 = 6$ e teremos $P(4, 6)$

Seja $Q(x, y)$ um ponto qualquer pertencente a reta que passa por A e B , temos

$$\langle v, Q - A \rangle = \langle (4 - 2, 6 - 3), (x - 2, y - 3) \rangle = \langle (2, 3), (x - 2, y - 3) \rangle = 0$$

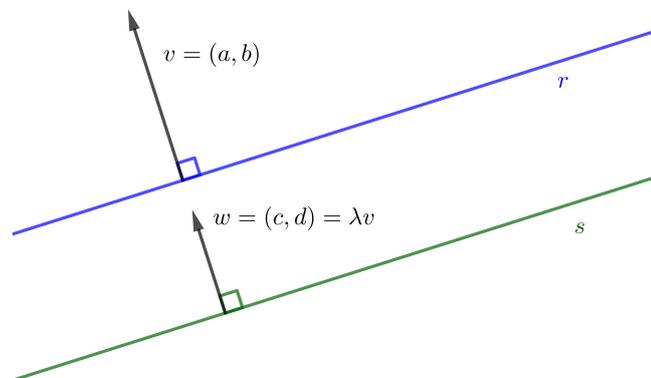
$$2x + 3y - 13 = 0$$

que representa a equação da reta que passa por A e B .

4.3 Posição relativa entre duas retas

Definição 4.1. Sejam r e s retas no \mathbb{R}^2 , dizemos serem **paralelas** se um vetor normal $v = (a, b)$ de r for colinear a um vetor normal $w = (c, d)$ de s .

Figura 16 – Retas paralelas



Fonte: Produzido pelo autor

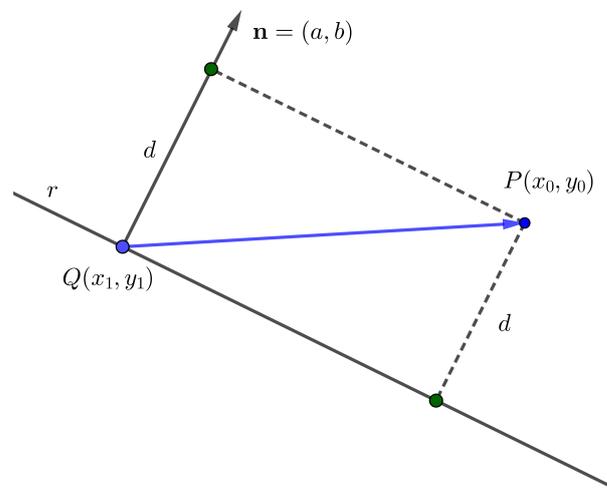
Sejam r definida por $ax + by + e = 0$ e s definida por $cx + dy + f = 0$ retas no plano, se os vetores $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$ não forem colineares dizemos que r e s são **concorrentes**.

No caso em que a equação $ax + by + e = 0$ é múltipla da $cx + dy + f = 0$ dizemos que r e s são **coincidentes**.

4.4 Distância de um ponto a uma reta

A distância d de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta r de equação $ax + by + c = 0$, é igual a norma da projeção ortogonal de $X = P - Q$, onde $Q(x_1, y_1) \in r$, sobre $\mathbf{n} = (a, b)$. Veja figura a seguir,

Figura 17 – Distância de um ponto a uma reta



Fonte: Produzido pelo autor

Então, utilizando-se (3.3), N2 da proposição 3.7 e o fato de $Q = (x_1, y_1) \in r$, obtemos

$$\begin{aligned}
 d &= \|\text{Proj}_{\mathbf{n}}(X)\| \\
 &= \left\| \frac{\langle X, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n} \right\| \\
 &= \frac{|\langle X, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|} \\
 &= \frac{|\langle (x_0 - x_1, y_0 - y_1), (a, b) \rangle|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
 &= \frac{|x_0a + y_0b - x_1a - y_1b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
 &= \frac{|x_0a + y_0b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

Exemplo da obtenção da distância de um ponto a uma reta

Seja r uma reta no \mathbb{R}^2 definida por $2x + 3y - 4 = 0$ e $P(1, 5)$ um ponto nesse mesmo espaço.

Vamos determinar a distância d entre P e r .

Seque diretamente da equação (4.2)

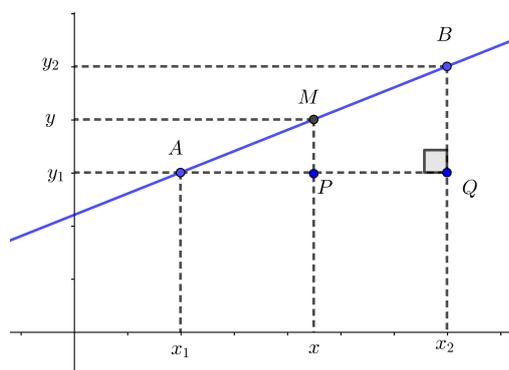
$$\begin{aligned} d &= \frac{|1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \\ &= \frac{13}{\sqrt{13}} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

4.5 Mediatriz de um segmento

Definição 4.2 (Ponto Médio). Sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ pontos do \mathbb{R}^2 , chamamos de **Ponto Médio** do segmento de extremos em A e B o ponto $M(x, y)$ pertencente ao segmento que o divide ao meio.

As coordenadas do ponto médio podem ser encontradas usando semelhança de triângulos.

Figura 18 – Ponto Médio

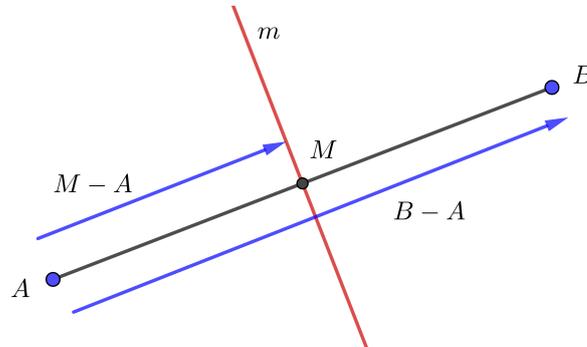


Fonte: Produzido pelo autor

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Definição 4.3 (Mediatriz). Sejam A e B pontos do \mathbb{R}^2 , chamamos de **Mediatriz** do segmento definido por A e B , a reta m perpendicular ao segmento passando por seu ponto médio M .

Figura 19 – Representação da mediatriz



Fonte: Produzido pelo autor

Para determinar a mediatriz basta que tenhamos um ponto $P(x, y)$ pertencente a mediatriz m do segmento definido por A e B e $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ponto médio do segmento, segue da definição $\langle P - M, M - A \rangle = 0$, chamando $M - A = v = (a, b)$, obtemos imediatamente de 4.2.

$$ax + by + c = 0$$

que representa a equação da mediatriz m , onde $c = -a \cdot \frac{x_1+x_2}{2} - b \cdot \frac{y_1+y_2}{2}$.

4.6 Equação da circunferência que passa por três pontos

Sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ pontos não colineares de \mathbb{R}^2 , e seja T o triângulo por eles formado. Sendo os segmentos AB , AC e BC os lados de T e M_1 , M_2 e M_3 seus pontos médios respectivamente, traçando duas das mediatrizes desses segmentos, segue de 4.3

$$(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + c = 0$$

mediatriz m do segmento AB e

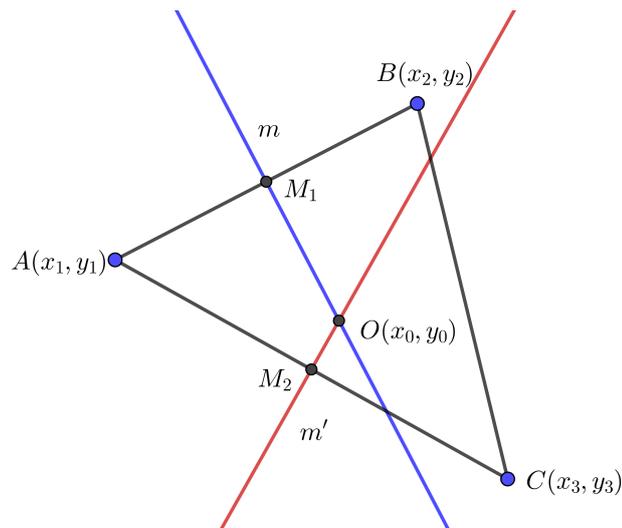
$$(x_3 - x_1)x + (y_3 - y_1)y + c' = 0$$

mediatriz m' do segmento AC .

Resolvendo o sistema abaixo obtemos $O(x_0, y_0)$ centro da circunferência¹ Γ que passa por A, B e C .

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + c = 0 \\ (x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + c' = 0 \end{cases}$$

Figura 20 – Encontro de mediatrizes



Fonte: Produzido pelo autor

Portanto Γ é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ do \mathbb{R}^2 que satisfazem a condição:

$$\begin{aligned} \|P - O\| &= \|A - O\| \\ \|(x - x_0, y - y_0)\| &= \|(x_1 - x_0, y_1 - y_0)\| \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \end{aligned}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{4.3}$$

onde $r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

Sendo (4.3) a equação da circunferência Γ centrada em O de raio r , veja a figura 21.

¹ Segue da geometria Euclidiana, que o encontro de duas mediatrizes de um triângulo ocorre no circuncentro, centro da circunferência que o circunscribe, veja (NETO, 2013)

Como $B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, $\mathbf{n} = (y_1 - y_2, x_2 - x_1)$ é ortogonal à $B - A$ e $\|B - A\| = \|\mathbf{n}\|$.

Por sua vez, $h = \|\text{Proj}_{\mathbf{n}}(C - A)\|$. Então

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{bh}{2} \\ &= \frac{\|B - A\| \|\text{Proj}_{\mathbf{n}}(C - A)\|}{2} \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{n}\| \left\| \frac{\langle C - A, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n} \right\| \\ &= \frac{1}{2} |\langle C - A, \mathbf{n} \rangle| \\ &= \frac{1}{2} |\langle (x_3 - x_1, y_3 - y_1), (y_1 - y_2, x_2 - x_1) \rangle| \\ &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right| \end{aligned}$$

os cálculos que justificam a última igualdade são os mesmos já realizados em 4.1.

Observe que a fórmula para área do triângulo ABC , que obtivemos acima,

$$\text{Área do triângulo } ABC = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

em função das coordenadas dos seus vértices A , B e C , além de sua elegância e praticidade de aplicação, fornece uma terceira maneira de obter a condição de alinhamento desses pontos. A saber, eles estão alinhados se, e somente se, o triângulo é degenerado. Ou equivalentemente, sua área é nula. Isso equivale ao determinante acima se anular.

A fórmula acima ilustra, mais uma vez, o título desse trabalho.

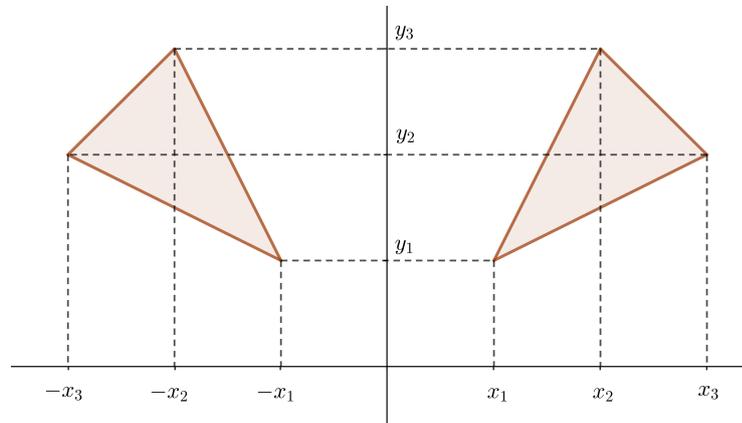
Vejam alguns:

1. O lado direito da referida fórmula não se altera para cada uma das seis permutações das linhas da matriz que nela figura, pois troca de linhas de uma matriz no máximo troca o sinal do determinante... como está em módulo, nada é alterado. Isso significa que a “receita” para calcular a área de um triângulo, *comprimento de uma base, multiplicado pela altura relativa a essa base, dividido por dois*; independe da base escolhida e da orientação dos vértices do triângulo.

Essa afirmação não costuma aparecer nos livros didáticos, inclusive não é mencionada em nenhuma das publicações citadas neste TCC.

2. O lado direito da referida fórmula também não se altera se multiplicarmos a primeira coluna da matriz que nela figura por -1 . Isso significa que a área do triângulo refletido em relação ao eixo dos y é a mesma.

Figura 23 – Reflexão do triângulo em relação ao eixo y



Fonte: Produzido pelo autor

Deixamos para o leitor:

3. Fazer a análise que corresponde geometricamente a multiplicação da segunda coluna da matriz que nela figura por -1 .
4. Fazer a análise que corresponde geometricamente a troca da primeira coluna pela segunda coluna da matriz que nela figura.

Antes de finalizar este capítulo, vale ressaltar que os livros referenciados no Capítulo 2 nem sequer apresentam o produto interno nos seus conteúdos programáticos, privando os alunos de terem contato com uma “ferramenta” extremamente útil.

Correspondência entre Álgebra e Geometria é um tema muito vasto. Neste trabalho apresentamos uma pequena e elementar parte dele, sem muito esforço o que fizemos pode ser estendido para o espaço Euclidiano Tridimensional (\mathbb{R}^3). Outra linha de trabalho, sobre a correspondência entre Álgebra e Geometria que pode ser abordada é anunciada no apêndice.

5 Metodologia

5.1 Avaliação da prática do ensino da matemática

Inicialmente fiz uma auto análise de como abordo os conteúdos no ensino médio enquanto professor da rede básica de ensino, com isso percebi a necessidade de adotar novas medidas didáticas para que a compreensão do conteúdo transmitido atinja o máximo de alunos possível. De posse de alguns livros, fiz um comparativo de como os autores abordam os conteúdos e notei uma conformidade em todos eles. Dai passei a desenvolver os mesmos resultados utilizando os conceitos de **Produto Interno**, sem a necessidade do esforço em aprender Geometria Analítica da forma que é apresentada nos livros analisados, como sendo necessária para tal finalidade, não desmerecendo a importância da mesma, mas mostrando que sua soberania nos livros didáticos acaba deixando de usufruir dos conhecimentos que os alunos já possuem em relação a geometria e álgebra.

Fiz uma análise de alguns livros de matemática usados no ensino médio das escolas estaduais de Pernambuco, tendo como critério analisar os mesmos conteúdos em cada obra e identificar os padrões nas obtenções dos resultados.

Com base nesses resultados, procurei desenvolver uma forma de obter os mesmos resultados usando a Geometria Plana. Tomando como exemplo, podemos encontrar a equação da de uma reta no plano usando semelhança de triângulos ao invés do uso de determinantes.

5.2 Desenvolvimento dos resultados propostos

Através de pesquisas e cálculos, obter os resultados apresentados em 5.1 de forma distinta das usualmente apresentadas nos livros que serviram de base para o desenvolvimento deste trabalho, e apresentar esse método como proposta de ensino da matemática vista nos anos finais do ensino básico.

Referências

- BALESTRI, R. D. *MATEMÁTICA: INTERAÇÃO E TECNOLOGIA*. São Paulo: Ieya, 2016.
- BOULOS PAULO; CAMARGO, I. d. *GEOMETRIA ANALÍTICA: UM TRATAMENTO VETORIAL*. São Paulo: MAKRON books do Brasil Editora Ltda, 2005.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018.
- CHAVANTES EDUARDO; PRESTES, D. *MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS*. São Paulo: SM EDUCAÇÃO, 2020.
- DANTE, L. R. *Matemática Conexão e Aplicação*. São Paulo: Editora Ática, 2017.
- DELGADO JORGE; FRENSEL, K. L. *GEOMETRIA ANALÍTICA*. Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- J.C., S. H. *O Ensino da Matemática: Fundamentos Teóricos e Bases Psicopedagógicas*. Brasil: artmed, 2007.
- LEONARDO, F. M. d. *CONEXÕES COM A MATEMÁTICA*. São Paulo: Moderna, 2016.
- NETO, A. C. M. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- SANTOS, N. M. d. *Vetores e matrizes : uma introdução à álgebra linear*. São Paulo: Thomson Learning, 2007.
- SMOLE KÁTIA STOCCO; DINIZ, M. I. *Matemática*. Brasília: Saraiva, 2012.
- SOUZA, J. R. d. *Novo olhar*. São Paulo: FTD, 2013.

Apêndices

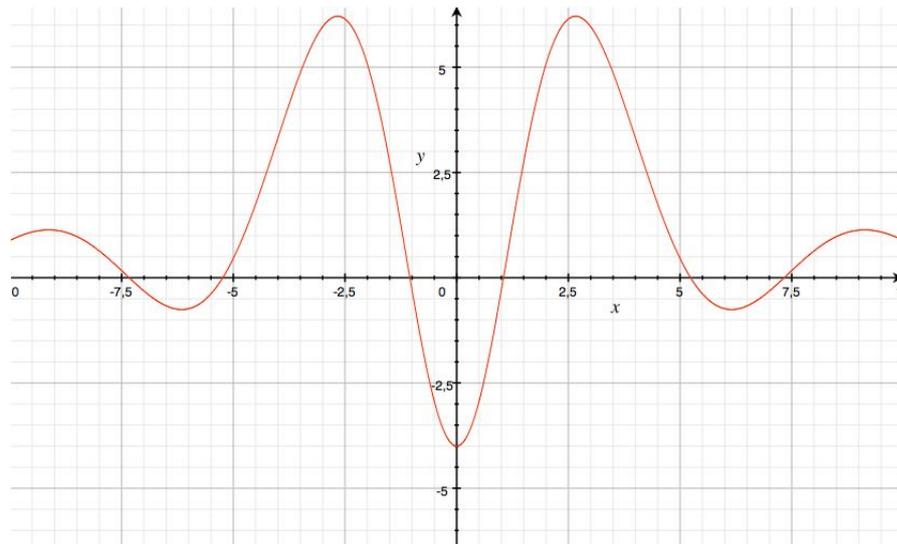
APÊNDICE A – Funções Pares e Funções Ímpares

Sejam I um intervalo simétrico em relação a origem, e f uma função definida em I com valores reais. Dizemos que f é uma *função par* se $f(x) = f(-x)$ para todos $x \in I$, e dizemos que f é uma *função ímpar* se $f(x) = -f(-x)$ para todos $x \in I$

Essas funções tem propriedades geométricas e propriedades algébricas muito interessantes. Veremos algumas delas a seguir, onde as funções envolvidas estão definidas num intervalo simétrico em relação a origem, que pode ser todo o conjunto dos números reais.

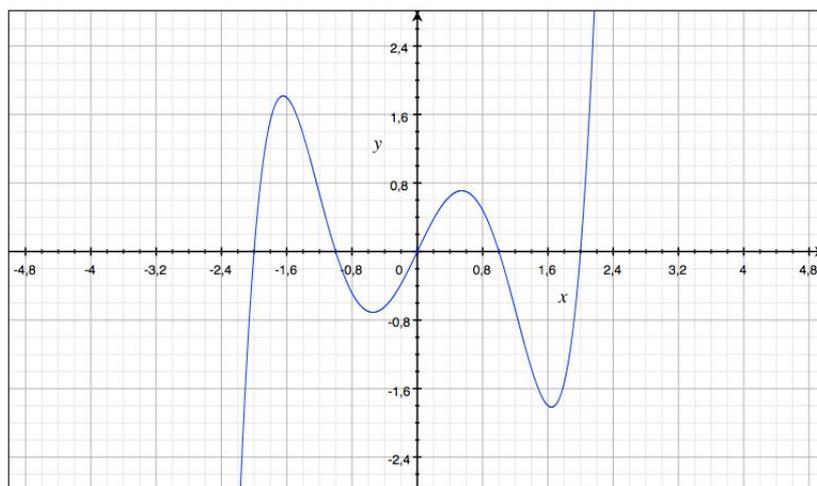
As funções pares tem gráfico simétrico em relação ao eixo dos y . De fato, se f é uma função par, então o ponto (x_0, y_0) pertence ao gráfico de f se, e somente se, o ponto $(-x_0, y_0)$ pertence ao gráfico de f .

Figura 24 – Gráfico de uma função Par



As funções ímpares tem gráfico simétrico em relação à origem. De fato, se g é uma função ímpar, então o ponto (x_0, y_0) pertence ao gráfico de g se, e somente se, o ponto $(-x_0, -y_0)$ pertence ao gráfico de g .

Figura 25 – Gráfico de uma função ímpar



A seguir, apresentaremos alguns resultados elementares envolvendo funções pares e funções ímpares.

(I) A única função que é par e ímpar é a função nula. De fato, seja f uma tal função. Então, para todo $x \in I$ temos $f(x) = f(-x) = -f(x)$. Logo $2f(x) = 0$ para todo $x \in I$, donde $f(x) = 0$ para todo $x \in I$.

(II) O produto de duas funções pares é uma função par, **entretanto**, produto de duas funções ímpares, não nulas, **não** é uma função ímpar e sim uma função par!

De fato, se f e g são ambas funções pares, tem-se:

$$f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot g(-x) = f \cdot g(-x)$$

portanto o produto também é par.

Porém, veja que se f e g são ambas funções ímpares, ocorre

$$f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) = [-f(-x)] \cdot [-g(-x)] = f \cdot g(-x)$$

que o produto é par.

O leitor já deve ter observado que se k é um número natural $f(x) = x^k$ define uma função par quando k é par, e uma função ímpar quando k é ímpar. Mas as analogias param

por aí. Outra grande diferença é que um número natural ou é par ou é ímpar. Por outro lado existem funções que não são pares nem ímpares! Por exemplo, a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x + 1$.

Teorema A.1. *Qualquer função definida em I se escreve de maneira única como a soma de uma função par com uma função ímpar.*

Demonstração. A identidade seguinte, cuja verificação é imediata, para qualquer função h definida em I

$$h(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} + \frac{h(x) - h(-x)}{2} \quad (\text{A.1})$$

mostra que qualquer função se escreve como a soma de uma função par com uma função ímpar, uma vez que a primeira parcela do lado direito de A.1 é uma função par e a segunda parcela uma função ímpar. Para demonstrar a unicidade, suponha que $f_1 + g_1 = f_2 + g_2$ onde f_1 e f_2 são pares e g_1 e g_2 ímpares. Então $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$. Segue, por (III) e (IV), que $f_1 - f_2$ e $g_2 - g_1$ são pares e ímpares. Logo, por $f_1 = f_2$ e $g_1 = g_2$. Assim, concluímos a demonstração do Teorema. \square

Corolário A.2. *Uma função polinomial é par, se, e somente se, sua expressão contém apenas potências pares.*

Demonstração. Seja f uma função polinomial par e $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k x^k$ sua expressão. Como f é par, sua decomposição dada por A.1 do Teorema acima é

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

onde os termos que contém potências ímpares de x se cancelam. \square

Corolário A.3. *Uma função polinomial é ímpar, se, e somente se, sua expressão contém apenas potências ímpares.*

Sua demonstração é análoga a apresentada em A.2

Acredito ser educativo fazer os estudantes entenderem que a decomposição dada por A.1, no caso de uma função polinomial agrupa na primeira parcela o termo constante e as potências pares de x , e na segunda parcela as potências ímpares de x .

Finalmente, cabe observar que, para quem conhece um pouco de Álgebra Linear, o que apresentamos pode ser resumido da seguinte maneira: o Espaço Vetorial das funções de determinado tipo se decompõe como Soma Direta dos subespaços desse tipo formado pelas funções pares com o das funções ímpares.