

Carlos Bino de Souza

**GEOMETRIA HIPERBÓLICA**  
**Consistência do Modelo de Disco de Poincaré**

Recife - PE

2014



Carlos Bino de Souza

**GEOMETRIA HIPERBÓLICA**  
**Consistência do Modelo de Disco de Poincaré**

Dissertação apresentada a coordenação do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco-UFRPE, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Departamento de Matemática

PROFMAT - Mestrado em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Thiago Dias de Oliveira Silva

Recife - PE

2014



**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**DOCUMENTO DE REGISTRO DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO**

Aos 26 (vinte e seis) dias do mês de agosto do ano de 2014, no horário das 10h00min, realizou-se no CEGEN a defesa da dissertação intitulada: **“Geometria Hiperbólica: Consistência do Modelo de Disco de Poincaré”**, pelo mestrando **Carlos Bino de Souza**, de acordo com as Normas Gerais dos Programas de Pós-Graduação da Universidade Federal Rural de Pernambuco, complementadas pelas Normas Internas aprovadas pelo Colegiado de Coordenação Didática do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da sede da UFRPE.

Como Presidente da Banca Examinadora (Orientador):

**Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva – (PROFMAT, DM - UFRPE)**

Sendo os demais Examinadores os professores:

**Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho (UFPE) – Membro Externo**

**Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva (UFRPE) – Membro Interno**

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maité Kulesza (UFRPE) – Membro Interno**

Após a apresentação da dissertação e efetuadas as arguições por parte da Comissão Examinadora, o mestrando recebeu desta os seguintes conceitos:

**Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho**

APROVADO

**Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva**

Aprovado

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maité Kulesza**

APROVADO

De acordo com os conceitos atribuídos o mestrando foi considerado **aprovado**, devendo para obtenção do grau de mestre, proceder às correções necessárias, depositar a versão final da dissertação no prazo máximo de 30 (trinta) dias, contados a partir desta data.

Presidente: Thiago Dias Oliveira Silva

Membro Titular Externo: [Assinatura]

Membro Titular Interno: [Assinatura]

Membro Titular Interno: Maité Kulesza

Mestrando: Carlos Bino de Souza

Recife, 26 de agosto de 2014.

Dedicatória *Dedico este trabalho aos meus filhos que tanto os amo!*



## Agradecimentos

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e ao Nosso Senhor Jesus Cristo pela força que foi dada para concluir este mestrado;

Agradeço meus pais pelo incentivo que foi dado para conclusão deste trabalho;

Agradeço a minha esposa que tanto contribuiu para um ambiente favorável aos estudos;

Agradeço o professor Olavo Otavo Nunes pela atenção na discussão deste trabalho e indicação de livros;

Agradeço o meu Orientador, professor Dr. Thiago Dias, pela paciência e sua atenção;

Agradeço a cada professor do Departamento de Matemática da UFRPE;

Agradeço os amigos Carlos Alberto de Souza que foi um grande parceiro na conclusão deste curso.

Agradeço os professores que participaram da banca de defes, prof. Dr Maité Kulesza, prof. Dr. Adriano Régis e prof. Dr. César Castilho que enriqueceram o meu trabalho com sugestões.



*tinha descoberto coisas tão maravilhosas que me  
supreenderam... do nada eu criei um mundo novo e estranho.  
(Jânio Bolyai, numa carta para seu pai)*



# RESUMO

Euclides escreveu uma obra em 13 volumes chamada de *Elementos* onde sistematizava todo o conhecimento matemático do seu tempo. Nesta obra, foram apresentados os 5 postulados da Geometria Euclidiana. Durante vários anos, o 5º Postulado foi muito questionado, desses questionamentos descobriu-se a existência de várias outras Geometrias possíveis, entre elas a Geometria Hiperbólica. Beltrami provou que a Geometria Hiperbólica é consistente se a Geometria Euclidiana é consistente. Hilbert mostrou que a Geometria Euclidiana é consistente se a Aritmética é consistente e apresentou um sistema axiomático que preencheu as lacunas do sistema axiomático de Euclides. Poincaré criou um Modelo, chamado de Disco de Poincaré, para representar o plano da Geometria Hiperbólica. O objetivo deste trabalho é mostrar que o Modelo de Disco de Poincaré é consistente, tomando como referência os Axiomas de Hilbert, substituindo apenas os Axiomas das Paralelas para "*Por um ponto fora de uma reta passam duas retas paralelas à reta dada*", através de construções da Geometria Euclidiana.

**Palavras-chaves:** Poincaré, Disco de Poincaré, geometria hiperbólica, Hilbert, plano hiperbólico, inversão.



# ABSTRACT

Euclid wrote a book in 13 volumes called *Elements* where systematized all the mathematical knowledge of his time. In this work, the 5 postulates of Euclidean geometry were presented. For several years, the 5th Postulate was frequently asked, this inquiries it was discovered that there are several other possible geometries, including hyperbolic geometry. Beltrami proved that hyperbolic geometry is consistent if Euclidean geometry is consistent. Hilbert showed that Euclidean geometry is consistent if the arithmetic is consistent and presented an axiomatic system that capped the gaps in Euclid's axiomatic system. Poincaré created a model, called the Poincaré disk, to represent the plan of hyperbolic geometry. The objective of this work is to show that the Poincaré disk model is consistent with reference Axioms Hilbert, replacing only the Axioms of Parallel to "*On a point outside a line passes through the two parallel straight lines given*", by constructions of Euclidean geometry.

**Key-words:** Poincaré, disc Poincaré, hyperbolic geometry, Hilbert, hyperbolic plane, inversion.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Quadrilátero de Saccheri . . . . .	24
Figura 2 – Reta orientada . . . . .	30
Figura 3 – Reta orientada $r$ que incide nos pontos $A, B, C$ e $D$ . . . . .	31
Figura 4 – Pontos incidentes na reta orientada $r$ . . . . .	32
Figura 5 – $(A, C, D, E) = (A, B, D, E) \cdot (B, C, D, E)$ . . . . .	33
Figura 6 – $C$ e $D$ são conjugados harmônicos em relação a $A$ e $B$ . . . . .	33
Figura 7 – Razão cruzada de $A$ e $B$ em relação a $P_1$ e $P_2$ . . . . .	34
Figura 8 – Arco capaz $P_1P_2$ . . . . .	35
Figura 9 – Se $A$ incide no arco $KP_2$ e $B$ incide no arco $KP_1$ , então $(A, B, P_1, P_2) > 1$ . . . . .	36
Figura 10 – Triângulos inscritos na circunferência sob o arco capaz $P_1P_2$ . . . . .	36
Figura 11 – Circunferência $C$ de centro $O$ e raio $r$ . . . . .	37
Figura 12 – Construção 1 . . . . .	38
Figura 13 – $PA$ e $PB$ são tangentes à circunferência de centro $O$ . . . . .	39
Figura 14 – Construção 2 . . . . .	40
Figura 15 – Construção 3 . . . . .	41
Figura 16 – Circunferências ortogonais $C$ e $D$ . . . . .	43
Figura 17 – Os ângulos formados nos pontos $P$ e $Q$ são congruentes . . . . .	43
Figura 18 – Ângulo central $\theta = \angle AOB$ . . . . .	44
Figura 19 – O ângulo de segmento equivale a metade do ângulo central, $\angle ABC = \frac{\angle BOC}{2}$ . . . . .	44
Figura 20 – Lema 2.2 . . . . .	45
Figura 21 – Demonstração do Lema 2.2 . . . . .	45
Figura 22 – Ponto $P$ fora da circunferência $\alpha$ com centro em $O$ . . . . .	46
Figura 23 – Ponto médio $M$ do segmento $\overline{OP}$ . . . . .	47
Figura 24 – Circunferência $\gamma$ com centro no ponto $M$ e raio $\overline{OM}$ . . . . .	47
Figura 25 – Os triângulos $\triangle OAP$ e $\triangle OBP$ são congruentes . . . . .	47
Figura 26 – Circunferência $\beta$ ortogonal a circunferência $\alpha$ . . . . .	48
Figura 27 – Circunferência $\beta$ passando por $P$ e $P'$ e reta $s = \overline{OT}$ tangente em $\beta$ . . . . .	49
Figura 28 – As circunferência $\alpha$ e $\beta$ são ortogonais . . . . .	49
Figura 29 – As circunferência $\alpha$ e $\beta$ são ortogonais . . . . .	51
Figura 30 – Os pontos $P$ e $P'$ são inversos em relação a $\alpha$ , conforme Teorema 2.4 . . . . .	52
Figura 31 – As circunferências $\alpha$ e $\beta$ são ortogonais . . . . .	53
Figura 32 – A reta $\beta'$ é inversa a circunferência $\beta$ em relação a $\alpha$ . . . . .	53
Figura 33 – A circunferência $\beta'$ é inversa a circunferência $\beta$ em relação a $\alpha$ . . . . .	54

Figura 34 – Plano Hiperbólico chamado de $\mathbb{D}^2$ . . . . .	57
Figura 35 – Ponto $P$ pertencente ao plano hiperbólico $\mathbb{D}^2$ e o ponto $Z_1$ não pertence ao plano hiperbólico $\mathbb{D}^2$ . . . . .	57
Figura 36 – Mode do Disco de Poincaré . . . . .	58
Figura 37 – $A$ pertence a reta hiperbólica $r$ que passa pelo centro de $\varphi$ . . . . .	58
Figura 38 – $A$ pertence a reta hiperbólica $r$ que é gerada pela circunferência $\alpha_r$ . . . . .	59
Figura 39 – $B$ está entre $A$ e $C$ na reta hiperbólica que incide no centro de $\varphi$ . . . . .	59
Figura 40 – $B$ está entre $A$ e $C$ na reta hiperbólica que não incide no centro de $\varphi$ . . . . .	60
Figura 41 – Segmento de reta hiperbólica $[AB]$ . . . . .	60
Figura 42 – Ângulo formado por pelas retas $r, s$ , geradas, respectivamente, por $\alpha_r, \alpha_s$ . . . . .	61
Figura 43 – Ângulo formado por pelas retas $r, s$ , a reta hiperbólica $r$ é um diâmetro de $\varphi$ e $s$ é gerada por $\alpha_s$ . . . . .	61
Figura 44 – Ângulo formado por pelas retas $r, s$ , onde $r, s$ são diâmetros de $\varphi$ . . . . .	62
Figura 45 – Os segmentos $[AB]$ e $[A'B']$ são congruentes. . . . .	63
Figura 46 – Caso 3 . . . . .	63
Figura 47 – Reta hiperbólica que passa pelos pontos $A, B$ e o centro $O$ . . . . .	64
Figura 48 – $A, B \in \mathbb{D}^2$ . . . . .	64
Figura 49 – Ponto $O$ interseção das mediatrizes de $\overline{AB}$ e de $\overline{AA'}$ . . . . .	65
Figura 50 – As circunferência $\alpha$ e $\beta$ são ortogonais . . . . .	65
Figura 51 – Reta hiperbólica que passa pelos pontos $A$ e $B$ . . . . .	65
Figura 52 – $A$ e $B$ são pontos ideais. . . . .	66
Figura 53 – As retas $a$ e $b$ são tangentes a $\varphi$ nos pontos $A$ e $B$ , respectivamente. . . . .	66
Figura 54 – As retas $a$ e $b$ são tangentes a $\varphi$ nos pontos $A$ e $B$ , respectivamente. . . . .	67
Figura 55 – Reta hiperbólica que tem pontos ideais $A$ e $B$ . . . . .	67
Figura 56 – Pontos ideais $A$ e $B$ e $O$ , $A$ e $B$ são colineares no plano $\mathbb{E}_\infty$ . . . . .	68
Figura 57 – $A, A'$ são pontos do $\mathbb{D}^2$ simétricos em relação a reta hiperbólica $r$ e $r$ é um diâmetro da circunferência euclidiana $\varphi$ . . . . .	68
Figura 58 – $O$ é equidistante de $A$ e $A'$ e a reta de reflexão é a interseção entre a mediatriz do segmento $\overline{AA'}$ e o interior de $\varphi$ . . . . .	69
Figura 59 – Centro da circunferência $\alpha_r$ pertence a reta euclidiana $\overline{AA'}$ . . . . .	70
Figura 60 – Centro da circunferência $\alpha_r$ pertence a interseção das retas euclidianas $\overline{AA'}$ e $\overline{Z_1Z_2}$ . . . . .	70
Figura 61 – A reta euclidiana $\overline{OP}$ é tangente ao arco de circunferência $Z_1Z_2$ . . . . .	70
Figura 62 – $r$ é reta de reflexão no plano $\mathbb{D}^2$ . . . . .	71
Figura 63 – $A$ é reflexo de $O$ em relação a reta hiperbólica $r$ . . . . .	71
Figura 64 – $s, s'$ são retas hiperbólicas simétricas em relação a reta hiperbólica $r$ . . . . .	72



Figura 65 – $s$ é um diâmetro de $\varphi$ e $s, s'$ são retas hiperbólicas simétricas em relação a reta hiperbólica $r$ .	73
Figura 66 – $s, s'$ são retas hiperbólicas simétricas em relação a reta hiperbólica $r$ .	73
Figura 67 – $s$ é simétrica a si própria em relação a reta hiperbólica $r$ .	74
Figura 68 – $s, s'$ são simétricas em relação a $r$ e incidem em $O$ .	74
Figura 69 – $s, s'$ são simétricas em relação a $r$ e não incidem em $O$ .	75
Figura 70 – $r$ passa por $O$ e $s$ não passam por $O$ e $r, s$ se intersectam, no máximo, em um ponto.	76
Figura 71 – $r, s$ não passam por $O$ e $r, s$ se intersectam, no máximo, em um ponto no plano $\mathbb{D}^2$ .	76
Figura 72 – O Modelo de Disco de Poincaré satisfaz o Axioma I2.	77
Figura 73 – O Modelo de Disco de Poincaré satisfaz o Axioma I3.	77
Figura 74 – $A, B, C$ formam segmentos hiperbólicos não pertencentes a uma mesma reta hiperbólica.	80
Figura 75 – O Modelo de Disco de Poincaré satisfaz o Axioma O4.	80
Figura 76 – Triângulo $\triangle ABC$ .	81
Figura 77 – Posições relativas entre reta hiperbólica e triângulo hiperbólico.	81
Figura 78 – $\mathbb{D}^2 \setminus r = \mathbb{D}_1^2 \cup \mathbb{D}_2^2$ .	82
Figura 79 – $A, B \in \mathbb{D}_1^2$ e $C, D \in \mathbb{D}_2^2$ .	82
Figura 80 – $A$ e $C$ pertencem a conjuntos diferentes.	83
Figura 81 – Reta $\overline{AB}$ com pontos ideais $Z_1$ e $Z_2$ .	84
Figura 82 – Reflexão se o eixo passa por $O$ .	86
Figura 83 – Reflexão se o eixo não passa por $O$ .	87
Figura 84 – $A$ é reflexo de $A'$ e $A'$ é reflexo de $A$ , a reflexão é uma função biunívoca.	89
Figura 85 – os pontos $A, B, Z_1$ e $Z_2$ são inversos aos pontos $A', B', Z'_1$ e $Z'_2$ em relação a circunferência $\alpha_r$ .	90
Figura 86 – $\overline{AA'}$ é uma reta hiperbólica que passa por $O$ e é perpendicular a $r$ .	91
Figura 87 – $\overline{AA'}, r$ são retas hiperbólicas que passam por $O$ e são perpendiculares.	91
Figura 88 – $\overline{AA'}, r$ são retas hiperbólicas que não passam por $O$ e são perpendiculares.	92
Figura 89 – $C$ é o centro da circunferência.	93
Figura 90 – $P_0, P$ são equidistantes de $O$ no $\mathbb{D}^2$ .	94
Figura 91 – $\alpha$ é uma circunferência hiperbólica.	95
Figura 92 – $\alpha$ e $\alpha'$ são simétricos em relação a reta $f$ .	96
Figura 93 – O centro euclidiano e o centro hiperbólico de uma circunferência com centro distinto de $O$ não coincidem.	97
Figura 94 – Circunferência $\alpha$ com centro hiperbólico $A$ e raio hiperbólico $\rho = [AB]$ .	98

Figura 95 – $r$ e $s$ são mediatrizes de $[AB]$ e $[BC]$ , respectivamente, e $O_1 \in r \cap s$ é o centro da circunferência $\alpha$ . . . . .	99
Figura 96 – os pontos $A, B, C$ são simétricos, respectivamente, a $D, E, F$ em relação a reta $r$ , logo $\triangle ABC = \triangle DEF$ . . . . .	99
Figura 97 – Demonstração que o Modelo de Poincaré satisfaz o Axioma C1 . . . . .	100
Figura 98 – Retas euclidianas, $a$ e $b$ , formando um ângulo $\theta$ . . . . .	101
Figura 99 – Circunferência $\lambda_2 = \mathcal{C}(O', B')$ . . . . .	101
Figura 100 – Ângulos hiperbólicos com uma lado em comum. . . . .	102
Figura 101 – O Modelo de Poincaré satisfaz o Axioma C4. . . . .	102
Figura 102 – Os ângulos $\lambda$ e $\beta$ são congruentes . . . . .	103
Figura 103 – $[AB] = [A'B']$ , $[AC] = [A'C']$ e $\angle BAC = \angle B'A'C'$ . . . . .	104
Figura 104 – $\triangle OB_1C_1$ e $\triangle ABC$ são simétricos em relação a reta $f$ . . . . .	104
Figura 105 – $\triangle OB''C''$ e $\triangle A'B'C'$ são simétricos em relação a reta $g$ . . . . .	105
Figura 106 – O Modelo de Disco de Poincaré satisfaz o Axioma C5. . . . .	105
Figura 107 – Retas $s_1$ e $s_2$ são paralelas a $r$ no ponto $P$ e $\theta$ é a medida do Ângulo de Paralelismo de $P$ . . . . .	107
Figura 108 – Reta $r$ é ultra paralela à reta $s$ no ponto $P$ . . . . .	107
Figura 109 – Um diâmetro de $\varphi$ é perpendicular às retas $s$ e $r$ . . . . .	108
Figura 110 – $O_t$ é o centro da circunferência $\alpha_t$ . . . . .	109
Figura 111 – Reta $t$ é perpendicular a $r$ e a $s$ . . . . .	109

# SUMÁRIO

<b>I</b>	<b>ALGUNS FATOS HISTÓRICO DAS GEOMETRIAS</b>	<b>21</b>
1	ALGUNS FATOS HISTÓRICOS DAS GEOMETRIAS . . . . .	22
1.1	O 5º Postulado da Geometria Euclidiana . . . . .	22
1.2	Geometrias Não-Euclidianas . . . . .	24
1.3	Os Axiomas de Hilbert . . . . .	26
<b>II</b>	<b>INVERSÃO</b>	<b>29</b>
2	INVERSÃO . . . . .	30
2.1	Razão Cruzada e Conjugados Harmônicos . . . . .	30
2.2	Ponto Inverso . . . . .	36
2.3	Construção Geométrica do Ponto Inverso . . . . .	38
2.4	Circunferências Ortogonais . . . . .	42
2.5	Inversão de Retas e Circunferências . . . . .	52
<b>III</b>	<b>CONSISTÊNCIA DO MODELO DE DISCO DE POINCARÉ</b>	<b>55</b>
3	CONSISTÊNCIA DO MODELO DE DISCO DE POINCARÉ . . . . .	56
3.1	Modelo de Disco de Poincaré . . . . .	56
3.2	Relações no Plano Hiperbólico . . . . .	58
3.3	Axiomas de Incidência . . . . .	63
3.4	Axiomas de Ordem . . . . .	78
3.5	Axiomas de Congruências . . . . .	83
3.5.1	Distância Hiperbólica . . . . .	83
3.5.1.1	Isometria no $\mathbb{D}^2$ . . . . .	85
3.5.1.2	A distância de Poincaré satisfaz a desigualdade triangular . . . . .	92
3.5.2	Circunferência hiperbólica . . . . .	94
3.5.2.1	Construção de Circunferência Hiperbólica . . . . .	97
3.6	Axioma das Paralelas . . . . .	106
	Referências . . . . .	111



# INTRODUÇÃO

Durante muitos séculos, achava-se que a Geometria Euclidiana era inquestionável e única possível. Esse entendimento retardou muito a descoberta da existência de outras Geometrias tão consistentes quanto a Geometria Euclidiana. Porém, Euclides contribuiu bastante ao escrever o 5º Postulado de forma complexa e de difícil compreensão, pois foi a partir das tentativas de provar que o 5ª Postulado poderia ser demonstrado através dos quatro primeiros, que se chegou na existência de Geometrias tão consistentes quanto a Geometria Euclidiana, chamadas de Geometrias Não-Euclidianas.

A Geometria Hiperbólica, que é uma Geometria Não-Euclidiana, foi descoberta, quase que simultaneamente, por Jânio Bolyai, Gauss e Lobachevsky. A Geometria Hiperbólica também é conhecida como Geometria de Lobachevsky, pois, Lobachevsky foi o primeiro a publicar suas descobertas, enfrentando toda resistência que a comunidade científica tinha em aceitar a existência de outras geometrias.

Os matemáticos Beltrami, Klein e Poincaré criaram modelos para representar o plano da Geometria Hiperbólica, porém, apresentaremos apenas o Modelo de Disco de Poincaré. Tomaremos como referência os Axiomas de Hilbert, substituindo o Axioma das Paralelas por "*Por um ponto fora de uma reta, passam duas retas paralelas à reta dada*", e utilizaremos construções no plano Euclidiano, pois, Beltrami mostrou que a Geometria Hiperbólica é consistente se a Geometria Euclidiana é consistente.

Este trabalho está dividido em três partes, a primeira parte, com o título ALGUNS FATOS HISTÓRICOS DAS GEOMETRIAS, visa relatar os resultados de alguns matemáticos que vão desde o questionamento da independência do 5º Postulado de Euclides, passando pelas tentativas fracassadas de provar a dependência do 5º Postulado, a apresentação do sistema axiomático de Hilbert, que veio preencher lacunas do sistema axiomático de euclides, a descoberta da existência da Geometria Hiperbólica e, posteriormente, a criação do Modelo de Disco de Poincaré.

A segunda parte tem o título INVERSÃO, abordaremos o conteúdo de razão cruzada e razão circular, necessários para fazer estudos sobre a distância de Poincaré, e Inversão em relação a circunferência, necessário para realizarmos construções no Modelo de Disco de Poincaré.

A terceira e última parte deste trabalho tem o título CONSISTÊNCIA DO MODELO DE DISCO DE POINCARÉ onde faremos todas as demonstrações, no plano Euclidiano, da

consistência do modelo de Disco de Poincaré.

Parte I

ALGUNS FATOS HISTÓRICO DAS  
GEOMETRIAS

# 1 ALGUNS FATOS HISTÓRICOS DAS GEOMETRIAS

Faremos aqui um breve resgate de alguns fatos da História da Matemática desde a criação da obra de Euclides, *Elementos*, até o Modelo de Disco de Poincaré para Geometria Hiperbólica. Não faremos estudos aprofundados dos fatos históricos, havendo, assim, omissões. O objetivo é apresentar fatos relevantes que levaram à descoberta da existência de outras Geometrias, além daquela sistematizada por Euclides, a partir da obra de Euclides que apresenta um sistema axiomático para Geometria da época, e mostrar um novo sistema Axiomático apresentado por Hilbert que pôde ser utilizado, fazendo pequenas modificações em axiomas ou algumas exclusões, em diversas Geometrias.

## 1.1 O 5º POSTULADO DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Por volta do ano 300 a.C., ao ser convidado para ser professor no Museu de Alexandria, Euclides organizou uma obra, em 13 livros, chamada de *Elementos* que englobava todo o conhecimento matemático da época. Assim, Euclides estabeleceu o plano de ensino mais duradouro que se conhece, chegando até os dias de hoje. Nos *Elementos*, Euclides estabelece um sistema axiomático com cinco noções comuns e cinco postulados.

### NOÇÕES COMUNS

1. Coisas iguais a uma mesma coisa são também iguais.
2. Se iguais são adicionados a iguais, então, os totais também são iguais.
3. Se iguais são subtraídas a iguais, então, as diferenças também são iguais.
4. Coisas que coincidem umas com as outras são iguais.
5. O todo é maior que qualquer uma de suas partes.

### POSTULADOS

1. Pode-se traçar uma reta ligando quaisquer dois pontos.
2. Pode-se continuar qualquer reta finita continuamente em uma reta.



3. Pode-se traçar um círculo em qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Embora nunca se tenha provado sua consistência (nem inconsistência), com estas "leis", foi construído o mais duradouro modelo para o espaço físico, que é chamado de **Geometria Euclidiana**.

O sistema axiomático estabelecido por Euclides não deixa clara a distinção entre os grupos, todavia, verificamos que as "Noções Comuns" são hipóteses aceitas em todas as ciências enquanto que os "Postulados" são hipóteses exclusivas da Geometria.

Os quatro primeiros postulados são validados de forma empírica. Porém, o 5º Postulado, por não ser de fácil compreensão e escrito com um texto longo, foi alvo de questionamentos, apesar da Geometria Euclidiana ter sido considerada, por vários séculos, inquestionável e única possível.

O conjunto de axiomas necessitam ter as três seguintes propriedades:

- **Completude:** Tudo que será usado na teoria deverá estar contido nos axiomas, para que não haja necessidade de hipóteses implícitas.
- **Consistência:** Os Axiomas não podem levar a duas hipóteses contraditórias.
- **Independência:** Nenhum axioma pode ser consequência da combinação dos outros.

Inicialmente, muitos matemáticos achavam que o 5º Postulado poderia ser demonstrado pelos quatro primeiros, muitos até tentaram provar, mas sem sucesso, tais como Ptolomeu I, Proclus, Nasir Eddin All Tusin, John Wallis, Girolamo Saccheri, Johann Heinrich Lambert e Adrien Marie Legendre. Alguns deles até acharam que conseguiram, porém, após sua morte, verificou-se falhas nas demonstrações.

Na tentativa de demonstrar o 5º Postulado, alguns matemáticos chegaram a outros postulados que se substituíssem o 5º Postulado obteriam uma Geometria equivalente a Geometria Euclidiana. Um geômetra escocês, que traduziu os *Elementos* para o inglês, chamado John Playfair (1748-1819), apresentou um Substituto do 5º Postulado que é muito conhecido:

*Por um ponto fora de uma reta, incide uma única reta paralela à reta dada.*

Por causa deste substituto o 5º Postulado também é conhecido como **Postulado das Paralelas**. Há outros substitutos que são bem conhecidos:

- Uma reta que intersecta uma reta, também intersecta todas as retas paralelas a ela;
- Retas paralelas são equidistantes;
- A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre  $180^\circ$ ;
- Todo triângulo pode ser inscrito numa circunferência.

## 1.2 GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Na tentativa de demonstrar o 5º Postulado, muitos matemáticos apresentaram caminhos para chegar a uma nova Geometria, chamada de **Não-Euclidiana**. O padre jesuíta Girolamo Saccheri foi o que chegou mais próximo de provar a existência de outras Geometrias além da Euclidiana. Saccheri, para demonstrar o 5º postulado, considerou hipóteses que não foram trabalhadas por Euclides em *Elementos*, usando o método de redução ao absurdo, método este que consiste em provar que a negação de determinada hipótese leva a uma contradição para provar a veracidade da hipótese. Assim, ele construiu um quadrilátero  $ABCD$ , conhecido como **Quadrilátero de Saccheri**, tal que os ângulos da base,  $\angle CAB$  e  $\angle DBA$ , são retos e os lados  $\overline{CA}$  e  $\overline{DB}$  são congruentes. O lado  $\overline{AB}$  é chamado de base inferior e  $\overline{CD}$  é a base superior, ver Figura 1.

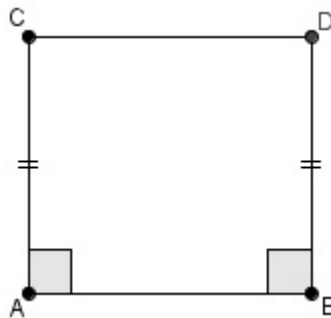


Figura 1 – Quadrilátero de Saccheri

O objetivo era identificar as medidas dos ângulos  $\angle DCA$  e  $\angle CDB$ . Porém, Saccheri verificou que se fossem obtusos, levavam a uma contradição, se fossem retos, levavam a resultados coerentes aos da Geometria Euclidiana e se fossem agudos levavam a resultados coerentes com todos os Postulados de Euclides, exceto o 5º Postulado.

O suíço-alemão Johann Heinrich Lambert (1728-1777), continuou os estudos de Saccheri e mostrou que se o quadrilátero de Saccheri tivesse três ângulos retos, o quarto ângulo poderia ser reto, agudo ou obtuso.

O alemão Johan Carl Friedrich Gauss (1777-1855), após vários anos tentando provar o 5º postulado de Euclides, acabou se convencendo que o postulado era realmente independente. Nestas tentativas, Gauss chegou a vários resultados de Geometria Não-Euclidiana que não foram publicados, pois Gauss só apresentava seus trabalhos quando tinha certeza que não haveria questionamentos sobre os resultados.

O húngaro Farkas Wolfgang Bolyai (1775-1856) era amigo de Gauss e passou a vida a tentar provar o 5º Postulado, enviando para Gauss as pseudoprovas que eram sempre refutadas. O engenheiro húngaro János Bolyai (1802-1860), filho de Farkas Wolfgang Bolyai, se interessou pela prova do 5º Postulado, contrariando os conselhos do pai, que já cansado de produzir pseudoprovas, até lhe enviou uma carta com a seguinte mensagem, "*Pelo amor de Deus, eu lhe peço, desista! Tema tanto isso quanto as paixões sensuais porque isso pode lhe tomar todo o seu tempo e privá-lo da saúde, paz de espírito e felicidade na vida*"(ANDRADE, 2013, Pag. 11). Porém, János Bolyai, enviou uma carta ao pai informando uma descoberta que lhe deixou eufórico, "*tinha descoberto coisas tão maravilhosas que me surpreenderam... do nada eu criei um mundo novo e estranho.*"(ANDRADE, 2013, Pag. 11).

János Bolyai, em 1826, resolveu negar o 5º Postulado, encontrando resultados de uma **Geometria Neutra** ou **Absoluta**, na qual a Geometria Euclidiana seria um caso particular. A convite do autor e pai, János Bolyai escreveu um apêndice do livro *Tentamen*, em 1832. Ao modificar o 5º postulado de Euclides para "Um ponto fora de uma reta passam infinitas retas paralelas a reta dada", János Bolyai desenvolveu os estudos de Geometria Hiperbólica Plana.

O matemático russo Nicolai Lobachevsky (1793-1856) em 1826, numa conferência no Departamento de Matemática e Física da Universidade de Kasan, negou o 5º Postulado de Euclides afirmando que "*Em um ponto fora de uma reta incidem duas retas que não se intersectam*" e submeteu um artigo, que foi rejeitado, pela Academia de Ciências de São Petersburgo.

Em 1854, o matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), em uma conferência intitulada *Sobre as hipóteses que estão nos fundamentos da Geometria*, propôs que a Geometria deveria estudar as variedades de dimensão  $n$  (espaços), equipados com uma métrica para determinar a distância entre os pontos e que a Geometria deveria estudar os espaços que decorrem da métrica adotada, assim, a Geometria voltaria às origens (métrica) porém, as propriedades dos espaços dependeriam da forma que seriam feitas as medições.

Os matemáticos Gauss, János Bolyai e Lobachevsky descobriram, quase que simultane-

amente, uma Geometria Não-Euclidiana que, em 1871, o matemático alemão Felix Christian Klein a chamou de **Geometria Hiperbólica**. Por sua dedicação e ter sido o primeiro a publicar suas descobertas, a Geometria Hiperbólica também é conhecida como Geometria de Lobachevsky.

O matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) provou a independência do 5º postulado de Euclides mostrando que a Geometria Hiperbólica é tão consistente quanto a Geometria Euclidiana. Deste modo, não poderia haver uma contradição.

Em 1904, o matemático alemão David Hilbert (1862-1943) provou que se a Aritmética é consistente, então, a Geometria Euclidiana também é consistente. Em 1940, o lógico Kurt Gödel mostrou que a Aritmética possui proposições indecidíveis e que uma teoria "suficientemente forte", como a Aritmética, não pode provar sua própria consistência<sup>1</sup>.

Vários matemáticos continuaram os estudos de Geometrias Não-Euclidianas, entre eles, destacamos Henri Poincaré que criou dois modelos, no plano Euclidiano, para Geometria Hiperbólica chamados **Semiplano de Poincaré** e **Modelo de Disco de Poincaré** ou **Disco de Poincaré**, a consistência do último é o objeto deste estudo.

### 1.3 OS AXIOMAS DE HILBERT

Na obra de Euclides, há um apelo a intuição com hipóteses implícitas, assim, percebe-se lacunas no sistema axiomático de Euclides, como, por exemplo, a continuidade da reta. Em 1899, Hilbert apresentou um novo sistema axiomático para Geometria Euclidiana, satisfazendo as lacunas deixadas por Euclides. Hilbert considerou alguns três termos como indefinidos interligados por três relações indefinidas e distribuiu os axiomas em grupos, sendo, assim, possível axiomatizar as geometrias clássicas - Projetiva, Elíptica, Afim, Hiperbólica e Euclidiana - sendo necessário suprimir alguma axioma ou grupo ou fazer pequenas modificações em alguns axiomas.

#### **Termos Indefinidos**

1. Ponto;
2. Reta;
3. Plano;

#### **Relações Indefinidas**

---

<sup>1</sup> Essas demonstrações estão no Teorema da Incompletude de Gödel. Para aprofundamento no assunto sugiro (FERREIRA, 2006).

1. Incidência;
2. Estar Entre;
3. Congruência

### Axiomas de Incidência

- I1- Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém;
- I2- Toda reta contém pelo menos dois pontos;
- I3- Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e estão sobre o mesmo plano;

### Axiomas de Ordem

- O1- Se um ponto  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , então, os três pontos pertencem a uma mesma reta e  $B$  está entre  $C$  e  $A$ ;
- O2- Para quaisquer dois pontos distintos  $A$  e  $C$ , existe pelo menos um ponto  $B$  pertencente à reta  $\overline{AC}$  tal que  $C$  está entre  $A$  e  $B$ ;
- O3- Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois;
- O4- (Pach) Sejam  $A, B$  e  $C$  três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja  $l$  uma reta do plano que não contém algum dos três pontos, então, se  $l$  interseca o segmento  $\overline{AB}$ , ela também interseca o segmento  $\overline{AC}$  ou o segmento  $\overline{BC}$ .

### Axiomas de Congruência

- C1- Se  $A$  e  $B$  são dois pontos em uma reta  $l$  e  $A'$  é um outro ponto de uma reta  $l'$ , não necessariamente distinta da anterior, então é possível encontrar um ponto  $B'$  em um dado lado da reta  $l'$  tal que os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  são congruentes;
- C2- Se um segmento  $\overline{A'B'}$  e um outro segmento  $\overline{A''B''}$  são congruentes a um mesmo segmento  $\overline{AB}$  então os segmentos  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A''B''}$  são congruentes entre si;
- C3- Sobre uma reta  $l$ , sejam  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  dois segmentos da mesma reta que, exceto por  $B$  não tem pontos em comum. Além disso, sobre uma outra ou a mesma reta  $l'$ , sejam  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{B'C'}$  dois segmentos que, exceto por  $B'$  não têm pontos em comum. Neste caso, se  $\overline{AB}$  é congruente a  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{BC}$  é congruente a  $\overline{B'C'}$ , então,  $\overline{AC}$  é congruente a  $\overline{A'C'}$ ;

- C4- Se  $\angle ABC$  é um ângulo e se  $\overrightarrow{B'C'}$  é uma semirreta, então existe exatamente uma semirreta  $\overrightarrow{A'B'}$  em cada lado de  $\overrightarrow{B'C'}$  tal que  $\angle A'B'C'$  é congruente a  $\angle ABC$ . Além disso, cada ângulo é congruente a si mesmo;
- C5- Se para dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ ,  $\overline{AB}$  é congruente a  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{AC}$  é congruente a  $\overline{A'C'}$  e  $\angle BAC$  é congruente a  $\angle B'A'C'$ , então  $\angle ABC$  é congruente a  $\angle A'B'C'$  e  $\angle ACB$  é congruente a  $\angle A'C'B'$ .

### Axiomas de Continuidade

- T1- Axioma de Arquimedes: Se  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são segmentos, então existe um número natural  $n$  tal que  $n$  cópias de  $\overline{CD}$  construídas continuamente de  $A$  ao longo da semirreta  $\overrightarrow{AB}$  passará além do ponto  $B$ ;
- T2- Axioma da Completude da Reta (ou Axioma de Cantor): Se  $\overline{A_n B_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é uma coleção de segmentos encaixados, então existe pelo menos um ponto  $P$  pertencente a todos os segmentos da coleção.

### Axioma da Paralelas

- E1- Em um ponto não pertencente a uma reta incidem uma única reta paralela a reta dada.

A Geometria Neutra é fundamentada nos Termos Indefinidos, nos Axiomas de Incidência, de Ordem, de Congruência e de Continuidade e a Geometria Hiperbólica é fundamentada na Geometria Neutra acrescido de uma modificação do Axioma das Paralelas.

### Axioma das Paralelas para Geometria Hiperbólica

- H1- Em um ponto não pertencente a um reta incidem duas retas paralelas a reta dada.

Parte II

INVERSÃO

## 2 INVERSÃO

Neste capítulo, faremos uma introdução de Inversão em relação a uma circunferência que é requisito para introduzir o Modelo de Disco de Poincaré para Geometria Hiperbólica, este estudo segue de perto o trabalho de (MUNARETTO, 2010).

Temos que a Geometria Euclidiana satisfaz todos os Axiomas de Hilbert e, embora não definamos, os termos e as relações indefinidas por Hilbert são bem claras na Geometria Euclidiana. Além disso, vamos considerar como verdadeiro o Postulado 1.

**Postulado 1** *As afirmações abaixo são verdadeiras na Geometria Euclidiana:*

1. *A interseção entre duas retas distintas é um ponto;*
2. *Se uma reta tem pontos no interior de uma circunferência, então a reta intersecta a circunferência em dois pontos;*
3. *Se uma circunferência tem pontos interiores e exteriores a outra circunferência, então, as circunferências se intersectam em dois pontos.*

### 2.1 RAZÃO CRUZADA E CONJUGADOS HARMÔNICOS

Considere uma reta  $r$  orientada e tome dois de seus pontos distintos  $A$  e  $B$ . O segmento de reta com origem em  $A$  e extremo em  $B$  possui sentido oposto ao segmento de reta com origem em  $B$  e extremo em  $A$ , ou seja,  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ . Considere um ponto  $C \in r$  distinto dos pontos  $A$  e  $B$ , tal que sua posição relativa aos pontos  $A$  e  $B$  poderá ser uma das situações da Figura 2.

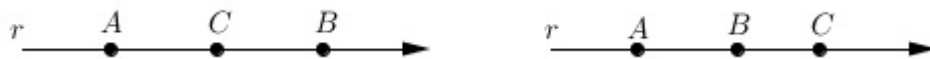


Figura 2 – Reta orientada

**Definição 2.1** *A razão da divisão do segmento de reta  $AB$  por  $C$ , representada por  $(AB, C)$ , é definida por*

$$(AB, C) = \frac{AC}{BC}$$



Observe que, quando  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{BC}$  têm o mesmo sentido, a razão entre eles é positiva e quando têm sentidos contrários, a razão é negativa. Assim,  $(AB, C) > 0$  se  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{BC}$  têm o mesmo sentido e  $(AB, C) < 0$  se  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{BC}$  têm sentidos contrários, note que  $(AB, C)$  independe da orientação da reta  $r$ .

**Definição 2.2** Consideremos  $A, B, C$  e  $D$  quatro pontos distintos incidentes numa reta orientada  $r$ . Nesta ordem, a **razão cruzada** de  $A, B$  em relação a  $C, D$ , representada por  $(A, B, C, D)$ , é igual a razão entre  $(AB, C)$  e  $(AB, D)$ .

$$(A, B, C, D) = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = (AB, C) \cdot (BA, D)$$

**Exemplo 2.1** Seja a reta orientada  $r$  que incide sob os pontos  $A, B, C$  e  $D$ . Considere as medidas indicadas na Figura 3 e determine:

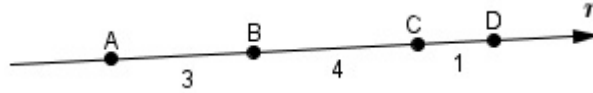


Figura 3 – Reta orientada  $r$  que incide nos pontos  $A, B, C$  e  $D$

(a)  $(A, B, C, D)$

$$(A, B, C, D) = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{7}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{35}{32}$$

(b)  $(A, B, D, C)$

$$(A, B, D, C) = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BC}{AC} = \frac{8}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{32}{35}$$

(c)  $(B, A, C, D)$

$$(B, A, C, D) = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{4}{7} \cdot \frac{8}{5} = \frac{32}{35}$$

(d)  $(B, C, A, D)$

$$(B, C, A, D) = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{CD}{BD} = \frac{-3}{-7} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{35}$$

(e)  $(A, C, B, D)$

$$(A, C, B, D) = \frac{AB}{CB} \cdot \frac{CD}{AD} = \frac{3}{-4} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{3}{32}$$

Observando o Exemplo 2.1, percebemos que a razão cruzada tem valores diferentes dependendo da ordem dos pontos.

**Teorema 2.1** *Considere os pontos distintos  $A, B, C$  e  $D$  incidindo sobre uma reta orientada  $r$ , ver Figura 4. Seja  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $t = (A, B, C, D)$ . Se  $S$  é o conjunto das possíveis soluções da razão cruzada com os quatro pontos,  $A, B, C, D$ , então  $S = \left\{ t, \frac{1}{t}, 1-t, \frac{1}{1-t}, \frac{t}{1-t}, \frac{1-t}{t} \right\}$ . Assim:*

1.  $(A, B, C, D) = (B, A, D, C) = (C, D, A, B) = (D, C, B, A) = t$
2.  $(A, B, D, C) = (B, A, C, D) = (C, D, B, A) = (D, C, A, B) = t^{-1} = \frac{1}{t}$
3.  $(A, C, B, D) = (B, D, A, C) = (C, A, D, B) = (D, B, C, A) = 1-t$
4.  $(A, C, D, B) = (B, D, C, A) = (C, A, B, D) = (D, B, A, C) = (1-t)^{-1} = \frac{1}{1-t}$
5.  $(A, D, B, C) = (B, C, A, D) = (C, B, D, A) = (D, A, C, B) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$
6.  $(A, D, C, B) = (B, C, D, A) = (C, B, A, D) = (D, A, B, C) = \left( \frac{t-1}{t} \right)^{-1} = \frac{t}{t-1}$



Figura 4 – Pontos incidentes na reta orientada  $r$

### DEMONSTRAÇÃO

Faremos a demonstração para algumas permutações de  $(A, B, C, D)$ , os outros casos são análogos.

Sendo  $t = (A, B, C, D)$ , temos

1.  $(B, A, D, C) = \frac{BD}{AD} \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = (A, B, C, D) = t$
2.  $(B, A, C, D) = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AD}{BD} = \left( \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} \right)^{-1} = (A, B, C, D)^{-1} = t^{-1} = \frac{1}{t}$
3.  $(A, C, B, D) = \frac{AB}{CB} \cdot \frac{CD}{AD}$  Temos que  $CB = -BC$ , pela Figura 4,  $AB = AC - BC$  e  $CD = BD - BC$ , assim

$$\frac{AB}{CB} \cdot \frac{CD}{AD} = \frac{AC - BC}{-BC} \cdot \frac{BD - BC}{AD} = \frac{AC \cdot BD}{-BC \cdot AD} - \frac{AC \cdot BC}{-BC \cdot AD} - \frac{BC \cdot BD}{-BC \cdot AD} + \frac{BC^2}{-BC \cdot AD} = -t + \frac{AC - BC + BD}{AD}$$

Pela Figura 4,  $AC - BC + BD = AD$ , logo

$$(A, C, B, D) = -t + \frac{AD}{AD} = 1 - t$$

$$4. (C, A, B, D) = \frac{CB}{AB} \cdot \frac{AD}{CD} = \left( \frac{AB}{CB} \cdot \frac{CD}{AD} \right)^{-1} = (A, C, B, D)^{-1} = (1 - t)^{-1} = \frac{1}{1 - t}$$

$$5. (B, C, A, D) = 1 - (B, A, C, D) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t - 1}{t}$$

$$6. (C, B, A, D) = (B, C, A, D)^{-1} = \left( \frac{t - 1}{t} \right)^{-1} = \frac{t}{t - 1}$$

**Teorema 2.2** *Considere  $r$  uma reta orientada e os pontos  $A, B, C, D, E \in r$ , dispostos na ordem mostrada na Figura 5. Então*

$$(A, C, D, E) = (A, B, D, E) \cdot (B, C, D, E)$$

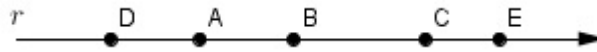


Figura 5 –  $(A, C, D, E) = (A, B, D, E) \cdot (B, C, D, E)$

#### DEMONSTRAÇÃO

$$(A, B, D, E) \cdot (B, C, D, E) = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{AE} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{BE} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = (A, C, D, E)$$

**Definição 2.3** *Consideremos os pontos  $A, B, C$  e  $D$  incidentes numa reta orientada  $r$  e dispostos conforme mostra na Figura 6. Se  $(A, B, C, D) = -1$ , dizemos que  $C$  e  $D$  são **conjugados harmônicos** em relação a  $A$  e a  $B$ .*

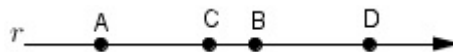


Figura 6 –  $C$  e  $D$  são conjugados harmônicos em relação a  $A$  e  $B$

Se não considerarmos a orientação da reta  $r$ , teremos, então,  $(A, B, C, D) = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ . Assim, se quatro pontos,  $A, B, C$  e  $D$  estiverem sobre uma reta não orientada, dizemos que  $C$  e  $D$  são conjugados harmônicos em relação a  $A$  e  $B$  se satisfizerem a relação:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

**Definição 2.4** Considere  $A, B, C$  e  $D$  vértices de um quadrilátero inscrito numa circunferência  $\alpha$ , onde o vértice  $A$  é oposto ao vértice  $C$  e o vértice  $B$  é oposto ao vértice  $D$ , definimos a **razão circular** de  $A$  e  $B$  em relação a  $C$  e  $D$ , representamos por  $(A, B, C, D)$ , como sendo

$$(A, B, C, D) = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD}$$

.

**Teorema 2.3** Sejam  $A, B, P_1$  e  $P_2$  pontos distintos do plano Euclidiano

- Se  $P_1, B, A$  e  $P_2$ , nesta ordem, estiverem sobre uma reta orientada  $r$ , então  $(A, B, P_1, P_2) > 1$ .
- Se  $A, B, P_1$  e  $P_2$  são vértices de um quadrilátero inscrito numa circunferência  $\alpha$ , onde o vértice  $A$  é oposto ao vértice  $P_1$  e o vértice  $B$  é oposto ao vértice  $P_2$ , então  $(A, B, P_1, P_2) > 1$ .

### DEMONSTRAÇÃO

a) Considere a Figura 7. Assim,

$$(A, B, P_1, P_2) = \frac{AP_1}{BP_1} \cdot \frac{BP_2}{AP_2} = \frac{-P_1A}{-P_1B} \cdot \frac{BP_2}{AP_2} = \frac{P_1B + BA}{P_1B} \cdot \frac{BA + AP_2}{AP_2} = \left(1 + \frac{BA}{P_1B}\right) \cdot \left(1 + \frac{BA}{AP_2}\right)$$

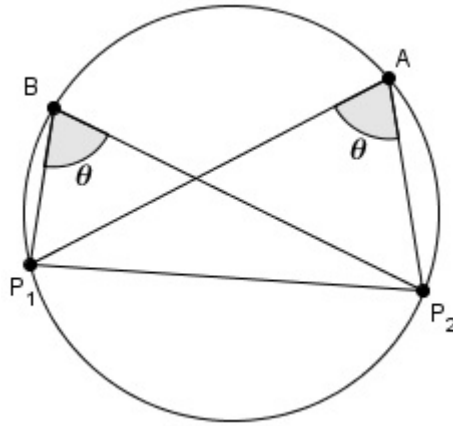
Como  $BA > 0, P_1B > 0$  e  $AP_2 > 0$ , então  $\frac{BA}{P_1B} > 0$  e  $\frac{BA}{AP_2} > 0$ . Logo,

$\left(1 + \frac{BA}{P_1B}\right) > 1$  e  $\left(1 + \frac{BA}{AP_2}\right) > 1$ . Portanto,

$$\left(1 + \frac{BA}{P_1B}\right) \cdot \left(1 + \frac{BA}{AP_2}\right) > 1 \Leftrightarrow (A, B, P_1, P_2) > 1$$



Figura 7 – Razão cruzada de  $A$  e  $B$  em relação a  $P_1$  e  $P_2$

Figura 8 – Arco capaz  $P_1P_2$ 

b)  $A$  e  $B$  pertencem ao arco capaz  $P_2P_1^1$ , então  $\angle P_2AP_1 = \angle P_2BP_1 = \theta$ , ver Figura 8.

Vamos considerar dois casos

caso I) Temos  $(A, B, P_1, P_2) = \frac{AP_1}{BP_1} \cdot \frac{BP_2}{AP_2} = \frac{AP_1}{AP_2} \cdot \frac{BP_2}{BP_1}$ . Considere o ponto  $K$  que é uma das interseções entre a circunferência e a mediatriz do segmento  $P_1P_2$ . Se  $A = K$ , temos  $AP_1 = AP_2 \Rightarrow \frac{AP_1}{AP_2} = 1$ . Se  $A$  incide no arco  $KP_2$ , pela comparação de ângulos<sup>2</sup>, temos  $AP_1 > AP_2 \Rightarrow \frac{AP_1}{AP_2} > 1$ . De forma semelhante, provamos que  $\frac{BP_2}{BP_1} > 1$  se  $B$  incide no arco  $P_1K$ , ver Figura 9. Assim

$$\frac{AP_1}{AP_2} \cdot \frac{BP_2}{BP_1} > 1 \Leftrightarrow (A, B, P_1, P_2) > 1$$

caso II) Considere, sem perda de generalidade, que os pontos  $A$  e  $B$  incidam no arco  $KP_2$ . Assim, vamos observar dois triângulo,  $\triangle AP_1P_2$ , que tem  $\theta = \angle P_2AP_1$  e  $\alpha = \angle P_1P_2A$  como dois de seus ângulos internos, e  $\triangle BP_1P_2$ , que tem  $\theta = \angle P_2BP_1$  e  $\beta = \angle P_1P_2B$  como dois de seus ângulo internos, ver Figura 10.

Pela Lei dos Senos, temos:

$$\begin{cases} \frac{P_1P_2}{\sin \theta} = \frac{AP_1}{\sin \alpha} \\ \frac{P_1P_2}{\sin \theta} = \frac{BP_1}{\sin \beta} \end{cases} \Rightarrow \frac{AP_1}{\sin \alpha} = \frac{BP_1}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AP_1}{BP_1}$$

<sup>1</sup> Para se aprofundar no estudo sobre Arco Capaz, leia (NETO, 2012, pag 109-118) e (WAGNER, 2007, pag 5-8)

<sup>2</sup> Ver (ANDRADE, 2013, Pag. 40)

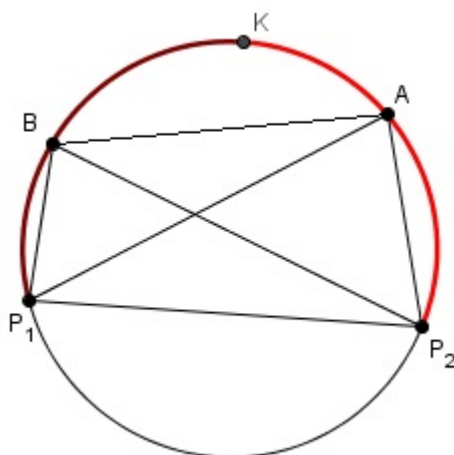


Figura 9 – Se  $A$  incide no arco  $KP_2$  e  $B$  incide no arco  $KP_1$ , então  $(A, B, P_1, P_2) > 1$

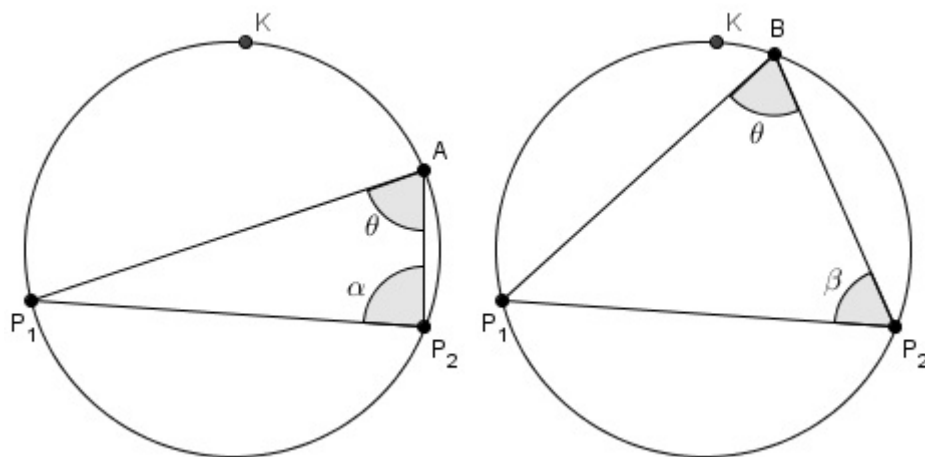


Figura 10 – Triângulos inscritos na circunferência sob o arco capaz  $P_1P_2$

Como  $B$  é oposto a  $P_2$ , então,  $B$  é um ponto do ângulo  $\angle P_1P_2A$ , logo, pela comparação de ângulos,  $\angle P_1P_2B < \angle P_1P_2A$ , então, temos  $\alpha > \beta \Rightarrow \sin \alpha > \sin \beta \Rightarrow AP_1 > BP_1 \Rightarrow \frac{AP_1}{BP_1} > 1$ . De forma semelhante, também provamos que  $\frac{BP_2}{AP_2} > 1$ . Portanto

$$\frac{AP_1}{BP_1} \cdot \frac{BP_2}{AP_2} = (A, B, P_1, P_2) > 1$$

## 2.2 PONTO INVERSO

**Definição 2.5** Dada uma circunferência  $C$  de centro  $O$  e raio  $r$ , dizemos que o **inverso** do ponto  $P \neq O$  em relação a  $C$  é o ponto  $P'$  sobre a semirreta  $\overrightarrow{OP}$  que satisfaz a relação  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$

Pela Definição 2.5 observamos que o ponto  $P$  é o inverso do ponto  $P'$  e o inverso do ponto  $P'$  é o ponto  $P$ . Vamos definir uma função que associa cada ponto do plano euclidiano a seu inverso fazendo uso da proposição:

**Proposição 2.1** *Os ponto  $P$  e  $P'$  são inversos em relação a circunferência  $C$  de centro  $O$  e raio  $r$  se, e somente se, são conjugados harmônicos em relação ao diâmetro  $\overline{AB}$  determinado pela interseção da reta  $\overleftrightarrow{OP}$  com a circunferência  $C$ .*

### DEMONSTRAÇÃO

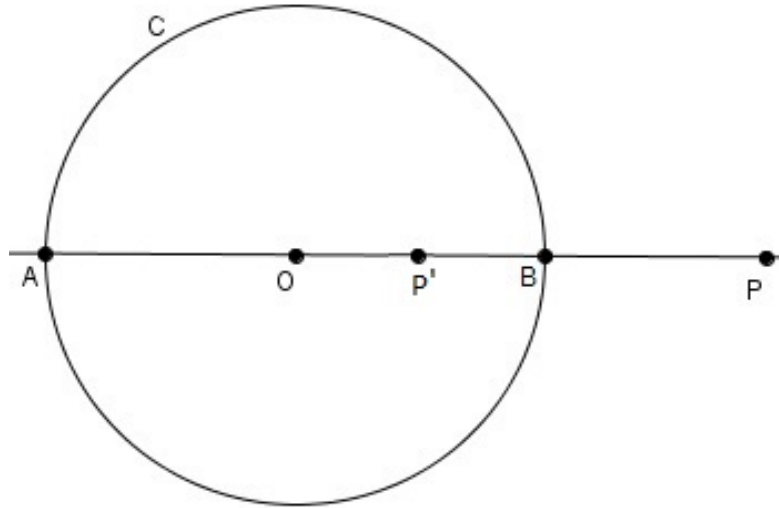


Figura 11 – Circunferência  $C$  de centro  $O$  e raio  $r$

Sejam  $P$  e  $P'$  pontos inversos em relação a circunferência  $C$  e  $A$  e  $B$  a interseção entre a reta  $\overleftrightarrow{PP'}$  e a circunferência  $C$ s, como mostra a Figura 11, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} &= \frac{\overline{AP'}}{\overline{BP'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AO} + \overline{OP}}{\overline{OP} - \overline{OB}} = \frac{\overline{AO} + \overline{OP'}}{\overline{OB} - \overline{OP'}} \Leftrightarrow \\ \frac{r + \overline{OP}}{\overline{OP} - r} &= \frac{r + \overline{OP'}}{r - \overline{OP'}} \Leftrightarrow (r + \overline{OP}) \cdot (r - \overline{OP'}) = (r + \overline{OP'}) \cdot (\overline{OP} - r) \Leftrightarrow \\ r^2 - r \cdot \overline{OP'} + r \cdot \overline{OP} - \overline{OP} \cdot \overline{OP} &= -r^2 + r \cdot \overline{OP} - r \cdot \overline{OP'} + \overline{OP'} \cdot \overline{OP} \Leftrightarrow \\ 2 \cdot r^2 &= 2 \cdot \overline{OP'} \cdot \overline{OP} \Leftrightarrow r^2 = \overline{OP'} \cdot \overline{OP} \end{aligned}$$

Assim, podemos garantir, pelo conjugado harmônico, que para cada ponto  $P \neq O$  do plano existe um único ponto  $P'$  inverso a  $P$  em relação à circunferência de centro  $O$ .

## 2.3 CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DO PONTO INVERSO

Considerando os pontos  $O, P$  e  $P'$  pertencentes ao plano Euclidiano, denotado por  $\mathbb{E}$ , onde  $P \neq O$  e  $P'$  são inversos em relação a uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r \in \mathbb{R}$ . Podemos definir uma transformação do conjunto  $\mathbb{E} \setminus \{O\}$  nele mesmo que transforma um ponto  $P \in \mathbb{E} \setminus \{O\}$  no seu inverso  $P'$ . Esta transformação é bijetiva e tem o nome de **Inversão**. A seguir, apresentaremos três construções para obter o ponto  $P'$ , inverso do ponto  $P$ .

**Construção 1** O matemático soviético Aleksei Pogorelov (1919-2002) sugeriu a seguinte construção para encontrar o inverso do ponto  $P$  fora da circunferência de centro  $O$ .

1. Construa um círculo de centro  $O$  e raio qualquer. Tome um ponto  $P$  qualquer, fora do círculo;
2. Construa a semirreta  $\overrightarrow{OP}$  e o ponto médio  $M$  do segmento  $\overline{OP}$ ;
3. Construa um círculo com centro em  $M$  e diâmetro  $\overline{OP}$ . Obtenha os pontos de interseção  $A$  e  $B$  dos dois círculos;
4. Construa as semirretas que partem de  $P$  e passam por  $A$  e  $B$ ;
5. Construa a corda que une os pontos  $A$  e  $B$  dos dois círculos. Obtenha a interseção deste segmento com a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ . Chame-o de  $P'$ . Veja a Figura 12.

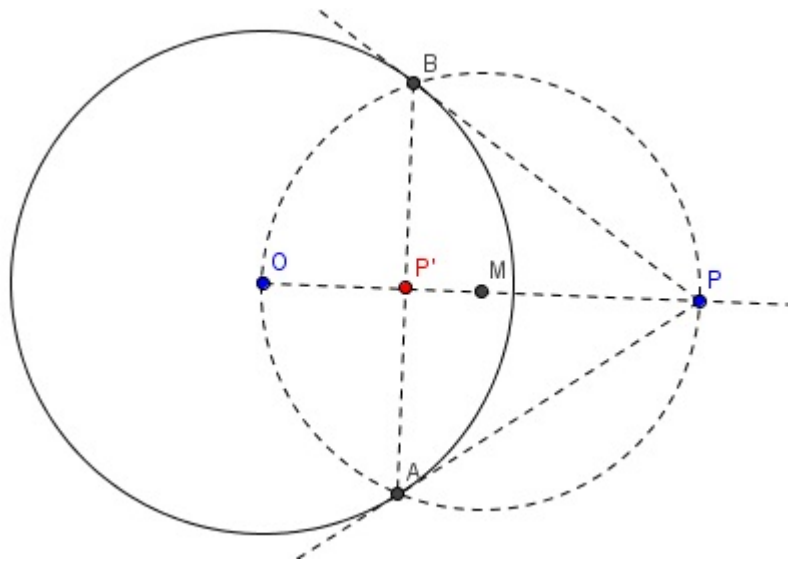


Figura 12 – Construção 1

Para justificar esta construção, inicialmente, vamos provar que  $\overrightarrow{PA}$  e  $\overrightarrow{PB}$  são tangentes à circunferência de centro  $O$ .



Como  $\overline{OP}$  é o diâmetro da circunferência de centro  $M$  e como o diâmetro da circunferência é o arco capaz do ângulo reto, concluímos que

$$O\hat{A}P \equiv O\hat{B}P \equiv 90^\circ$$

Portanto,  $\overrightarrow{PA}$  e  $\overrightarrow{PB}$  são tangentes à circunferência de centro  $O$ . Veja Figura 13.

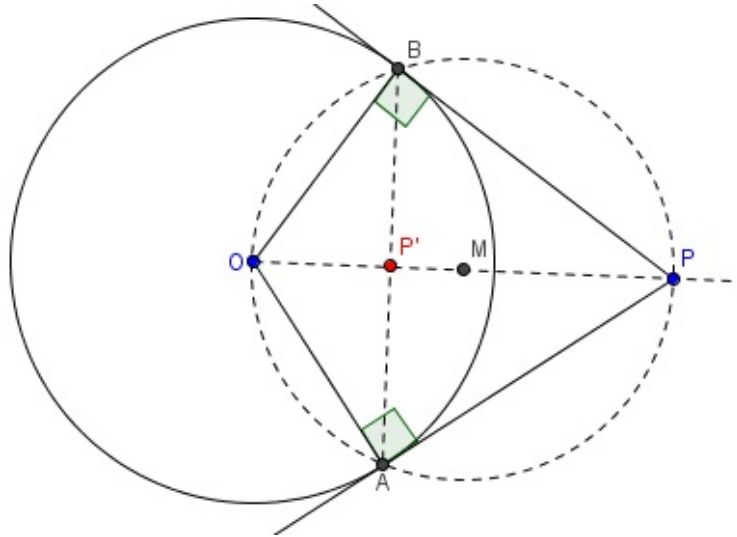


Figura 13 – PA e PB são tangentes à circunferência de centro  $O$

Observando o triângulo  $OBP$ ,  $\overline{BP'}$  é a altura relativa ao lado  $\overline{OP}$ . Aplicando as relações métricas no triângulo retângulo, temos

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OB}^2$$

Como  $\overline{OB}$  é o raio  $r$  da circunferência de centro  $O$  chegamos a

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$$

**Construção 2** A construção abaixo é equivalente a construção de Pogorelov, porém, o ponto  $P$  pertence ao interior da circunferência. Assim, a justificativa é a mesma da Construção 1.

1. Construa a circunferência de centro  $O$  e raio qualquer. Marque um ponto  $P$  qualquer no interior da circunferência de centro  $O$ ;
2. Trace a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ ;
3. Trace a reta  $t$  perpendicular a  $\overrightarrow{OP}$  passando por  $P$ ;

4. Marque os pontos  $A$  e  $B$ , interseção entre a reta  $t$  e a circunferência de centro  $O$ . Trace uma reta tangente à circunferência no ponto  $A$  ou  $B$ .
5. Marque o ponto  $P'$ , interseção entre a reta tangente e a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ .

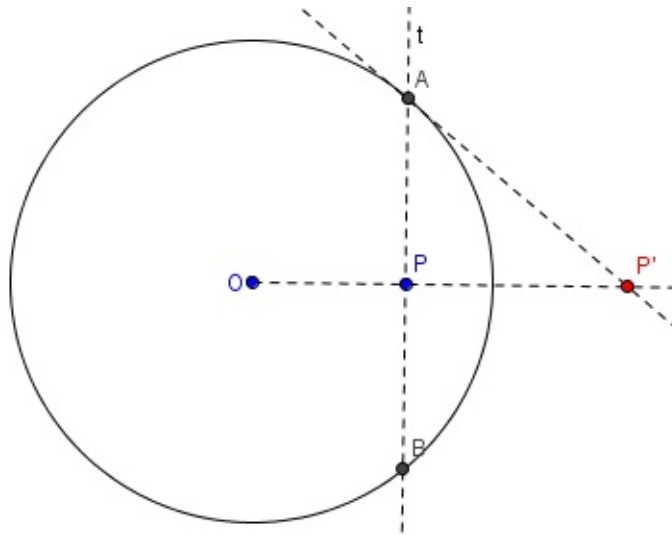


Figura 14 – Construção 2

**Construção 3** A construção a seguir pode ser encontrada em (MUNARETTO, 2010) e independe da posição relativa do ponto  $P \neq O$  e à circunferência de centro  $O$ .

1. Desenhe a circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ ;
2. Marque um ponto qualquer  $P$  e trace a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ ;
3. Passando por  $O$ , trace a perpendicular à semirreta  $\overrightarrow{OP}$  e marque os pontos  $A$  e  $B$  de interseção com a circunferência;
4. Trace a semirreta  $\overrightarrow{BP}$ , e marque o ponto  $C$ , interseção entre a circunferência e  $\overrightarrow{BP}$ ;
5. Trace a semirreta  $\overrightarrow{AC}$ ;
6. Marque o ponto  $P'$ , inverso de  $P$ , que é a interseção entre  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{AC}$ .

Sugerimos que a construção 3 seja feita num *software* de Geometria Dinâmica como o Geogebra ou Régua e Compasso.

Observando o Figura 15,  $\angle ACB = 90^\circ$ , pois é o ângulo do arco capaz  $AB$ , então,  $\angle ACB = \angle BOP$ , temos  $\angle OBP = \angle ABC$  e, pela soma dos ângulos internos de um triângulo,  $\angle OPB = \angle OAP'$ , pelo caso Ângulo-Ângulo-Ângulo, os triângulos  $\triangle ACB$  e  $\triangle POB$  são

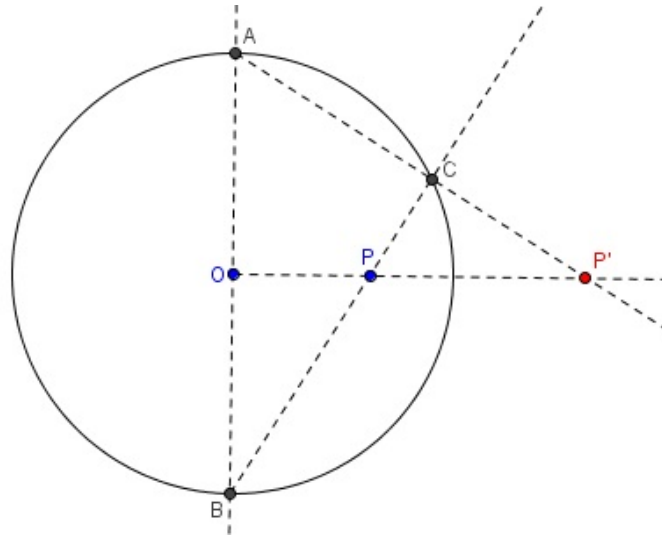


Figura 15 – Construção 3

semelhantes. Temos também,  $\angle ACB = \angle P'OA$ , são ângulos reto,  $\angle BAC = \angle OAP'$ , ângulo comum aos triângulos  $\triangle AOP'$  e  $\triangle ACB$ , e, pela soma dos ângulos internos de um triângulo,  $\angle CBA = \angle AP'O$ , então, os triângulos  $\triangle AOP'$  e  $\triangle ACB$ . Logo, os triângulos  $\triangle POB$  e  $\triangle AOP'$  também são semelhantes, então, temos a relação:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP'}} \Rightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'}$$

Como  $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ , então

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$$

Considerando uma circunferência  $\alpha$  com centro  $O$  e raio com medida  $r \in \mathbb{R}_+^*$  e um ponto arbitrário  $P$ , tal que  $\overline{OP} \leq r$ . Vamos considerar um número real  $x$  tal que  $\overline{OP} = x$ , então, sendo  $P'$  o inverso de  $P$ , temos  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 \Rightarrow \overline{OP'} = \frac{r^2}{x}$ . Deste modo, o comprimento do segmento  $\overline{OP'}$  é determinado por  $\frac{r^2}{x}$ , assim, quando  $P$  se aproxima de  $O$ ,  $x$  assume valores cada vez menores, se aproximando de zero, enquanto que  $\frac{r^2}{x}$  aumenta, indicando, assim, que  $P'$  se distancia de  $\alpha$  quando  $P$  se aproxima de  $O$  e quando  $P$  se distancia de  $O$ ,  $P'$  se aproxima de  $\alpha$ . Posto isto, podemos tomar o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r^2}{x} = r^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Então, quando  $P$  se aproxima de  $O$ ,  $P'$  tende ao infinito. Diante do exposto, se desejarmos que  $O$  tenha um ponto inverso, este ponto deverá estar infinitamente distante da circunferência. Assim, vamos postular a existência de um ponto que está infinitamente distante de qualquer ponto do plano  $\mathbb{E}$

**Axioma 1** *Seja  $\mathbb{E}$  o plano Euclidiano e  $\Omega$  um ponto, que chamaremos de **ponto ideal**, tal que, para todo  $P \in \mathbb{E}$ ,  $\overline{P\Omega} = \infty$  e  $\Omega$  está em qualquer reta que incide no plano  $\mathbb{E}$ .*

**Axioma 2** *Chamaremos de **plano de inversão**, denotaremos por  $\mathbb{E}_\infty$ , o plano Euclidiano adicionado com o Ponto Ideal.*

$$\mathbb{E}_\infty = \mathbb{E} \cup \{\Omega\}$$

**Definição 2.6** *Seja  $\alpha$  uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ . A transformação geométrica em  $\mathbb{E}_\infty$  que associa cada ponto  $P \neq O$  ao seu inverso  $P'$  em relação à  $C$  e é tal que  $O$  é o inverso de  $\Omega$  e  $\Omega$  é o inverso de  $O$  é denominada **inversão**,  $\alpha$  será denominada **circunferência de inversão** e  $O$  é o **centro de inversão**.*

Se  $P \neq O$  é um ponto que não pertence a circunferência  $\alpha$ , pela Definição 2.5, existe um único ponto  $P'$  do plano  $\mathbb{E}_\infty$  que é inverso a  $P$ . Se  $P$  é um ponto da circunferência  $\alpha$ , então, o inverso de  $P$  é o próprio  $P$  e como  $\Omega$  é o inverso de  $O$  e  $O$  é o inverso de  $\Omega$  em relação a  $\alpha$ , logo, a Inversão é uma aplicação biunívoca.

## 2.4 CIRCUNFERÊNCIAS ORTOGONAIS

**Definição 2.7** *Sejam  $C$  e  $D$  duas circunferências não coincidentes que se interceptam em um ponto  $P$ . Se  $C$  e  $D$  possuem retas tangentes  $s$  e  $t$ , respectivamente, em  $P$ , então, dizemos que o ângulo entre  $C$  e  $D$  em  $P$  é o ângulo em  $s$  e  $t$ . Desta forma, dizemos que  $C$  e  $D$  são circunferências ortogonais em  $P$  se  $s$  e  $t$  são perpendiculares. Ver Figura 16*

**Lema 2.1** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  duas circunferências secantes nos pontos  $P$  e  $Q$ . Então, o ângulo entre  $\alpha$  e  $\beta$  no ponto  $P$  é igual ao ângulo entre  $\alpha$  e  $\beta$  no ponto  $Q$ .*

### DEMONSTRAÇÃO

Observando a Figura 17, vamos denotar por  $\sigma$  o ângulo formado por  $\alpha$  e  $\beta$  no ponto  $P$  e por  $\tau$  o ângulo formado por  $\alpha$  e  $\beta$  no ponto  $Q$ . As retas tangentes a  $\alpha$  e  $\beta$  nos pontos  $P$  e  $Q$  se interceptam nos pontos  $R$  e  $S$  no interior das circunferências  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente.

Como as retas  $\overline{RP}$  e  $\overline{RQ}$  são tangentes a uma mesma circunferência e têm um ponto em comum, então os segmentos  $\overline{PR}$  e  $\overline{QR}$  são congruentes. A mesma justificativa vale para afirmar que os segmentos  $\overline{PS}$  e  $\overline{QS}$  são congruentes.

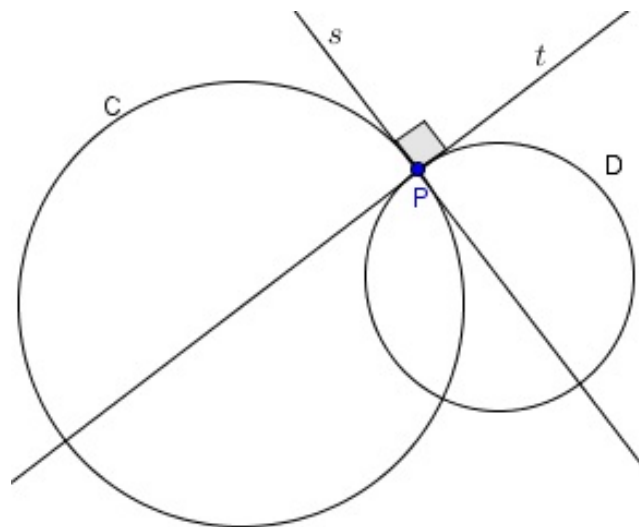
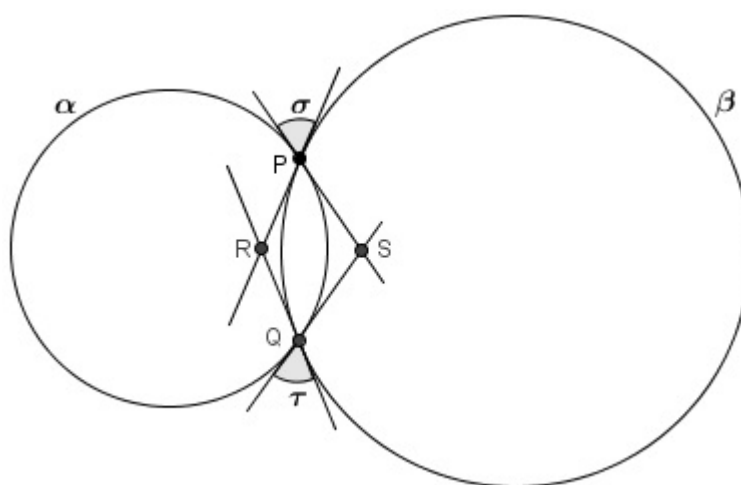


Figura 16 – Circunferências ortogonais C e D

Figura 17 – Os ângulos formados nos pontos  $P$  e  $Q$  são congruentes

Vamos desconsiderar as circunferências e observar apenas as retas. Tracemos o segmento  $\overline{RS}$  pelo caso de congruência de triângulos Lado-Lado Lado, os triângulos  $\triangle PRS$  e  $\triangle QRS$  são congruentes.

Assim, os ângulos  $\angle RPS$  e  $\angle RQS$  são congruentes, portanto,  $\sigma = \tau$ .

**Definição 2.8** Considere a circunferência  $\alpha$  com centro  $O$  e raio  $r$ . Chamaremos de **ângulo central** o ângulo com vértice no ponto  $O$ , ver Figura 18.

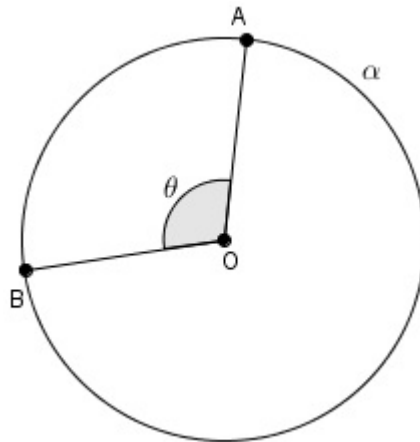


Figura 18 – Ângulo central  $\theta = \angle AOB$

**Definição 2.9** Considere  $\alpha$  uma circunferência com centro em  $O$  e raio  $r$ . Chamaremos de **ângulo de segmento** da circunferência  $\alpha$  o ângulo formado por uma reta secante e outra reta tangente a  $\alpha$  no ponto  $P$ .

**Proposição 2.2** Considere a circunferência  $\alpha$  com centro  $O$  e raio  $r$ . A medida do ângulo de segmento  $\angle ABC$  é igual a metade do ângulo central  $\angle BOC$ , ver Figura 19.

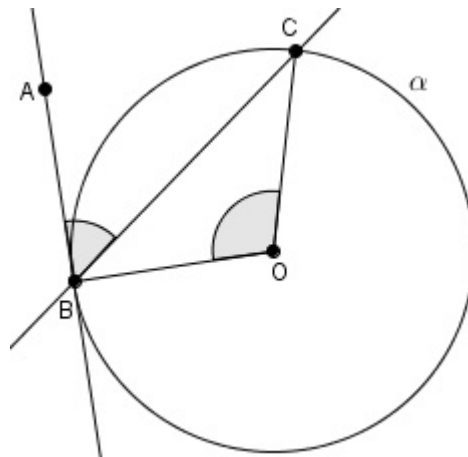


Figura 19 – O ângulo de segmento equivale a metade do ângulo central,  $\angle ABC = \frac{\angle BOC}{2}$

A demonstração da Proposição 2.2 pode ser encontrada em (NETO, 2012, Pag. 114)

**Lema 2.2** Sejam  $\alpha$  uma circunferência de centro no ponto  $O$  e  $r$  uma reta. Então,  $r$  é ortogonal à  $\alpha$  no ponto  $P$  se e somente se  $r$  passa pelo centro  $O$  de  $\alpha$ . Ver Figura 20

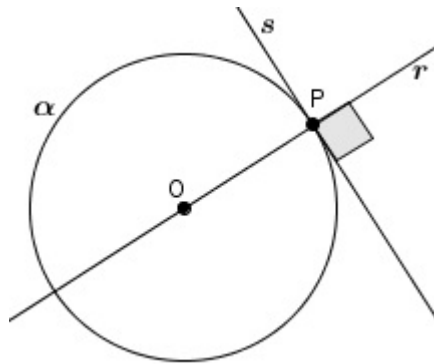


Figura 20 – Lema 2.2

## DEMONSTRAÇÃO

$\Rightarrow$ ) Para que a reta  $r$  seja ortogonal a  $\alpha$ , então, a reta  $r$  é perpendicular a reta  $s$  tangente a  $\alpha$  no ponto  $P$ . Assim, a reta  $r$  passa no centro  $O$  de  $\alpha$  e no ponto  $P$ , vamos supor que  $r$  e  $s$  não sejam perpendiculares. Assim, existe um ponto  $M \in s$  tal que  $\overline{OM} \perp s$ , por hipótese, os segmentos  $\overline{OM}$  e  $\overline{OP}$  não são coincidentes por que  $\overline{OP}$  e  $s$  não são perpendiculares. O ponto  $M$  divide a reta  $s$  em duas semirretas opostas. Vamos determinar na semirreta oposta a que tem o ponto  $P$  o ponto  $P'$  tal que  $\overline{MP} \cong \overline{MP'}$ . Assim, os triângulo  $\triangle OMP$  e  $\triangle OMP'$  são congruentes, caso LAL, pois  $\overline{OM}$  é o lado comum aos triângulos,  $\overline{OM}$  é perpendicular a  $s$  e  $\overline{MP} \cong \overline{MP'}$ , logo,  $\overline{OP} \cong \overline{OP'}$ , ver Figura 21, o que implica em  $P' \in \alpha$  que é absurdo, pois, por hipótese, a reta  $s$  intercepta a circunferência  $\alpha$  apenas no ponto  $P$ . Portanto, a reta  $r$  é ortogonal à circunferência  $\alpha$ .

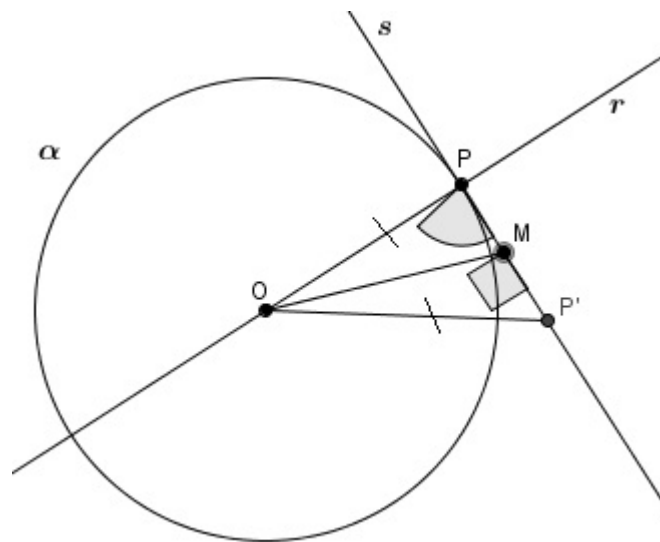


Figura 21 – Demonstração do Lema 2.2

$\Leftarrow$ ) Sejam  $r$  e  $s$  perpendiculares, então, vamos considerar que  $r$  não passa pelo centro

$O$  de  $\alpha$ , então,  $r$  intersecta  $\alpha$  em dois pontos  $P, Q$ . Assim, Pela Proposição 2.2, o ângulo central  $\angle POQ$  é o dobro do ângulo formado pelas retas  $r, s$  no ponto  $P$ , ou seja,  $\angle POQ = 180^\circ$ . Assim, as semirretas  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{OQ}$  estão na mesma reta, o que é absurdo. Logo,  $r$  passa pelo ponto  $O$ .

**Corolário 2.1** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  circunferências ortogonais que se intersectam no ponto  $P$ ,  $r$  é uma reta tangente a  $\alpha$  no ponto  $P$  e  $s$  é uma reta tangente a  $\beta$  no ponto  $P$ . Então,  $r$  incide no centro de  $\beta$  e  $s$  incide no centro de  $\alpha$ .*

#### DEMONSTRAÇÃO

A reta  $r$  é ortogonal a  $\beta$ , pelo Lema 2.2,  $r$  pelo centro de  $\beta$  e assim como  $s$  é ortogonal a  $\alpha$  e  $s$  passa pelo centro de  $\alpha$ .

**Lema 2.3** *Com centro em um ponto  $P$  fora da circunferência  $\alpha$  passa uma única circunferência  $\beta$  ortogonal a  $\alpha$ .*

#### DEMONSTRAÇÃO

Considere a circunferência  $\alpha$  de centro  $O$  e o ponto  $P$  fora de  $\alpha$ , como a Figura 22.

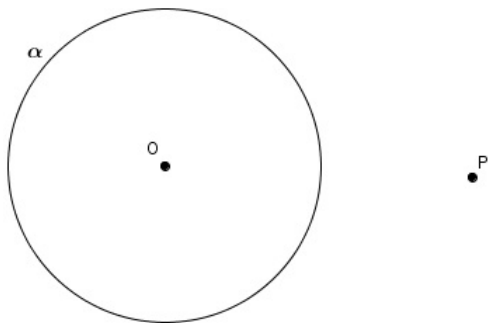


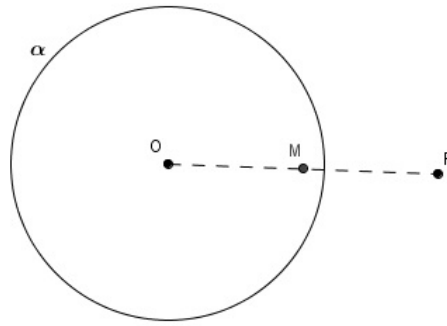
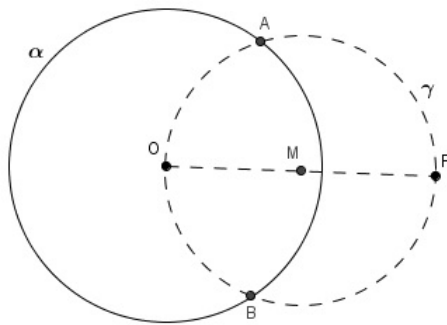
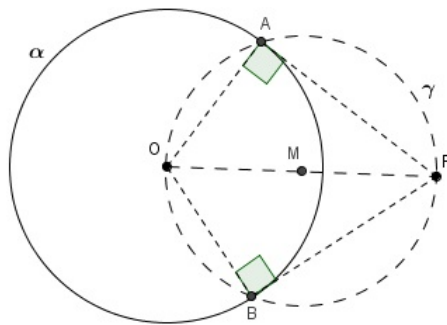
Figura 22 – Ponto  $P$  fora da circunferência  $\alpha$  com centro em  $O$

Determine o ponto médio  $M$  do segmento  $\overline{OP}$ , ver Figura 23.

Determinamos a circunferência  $\gamma$  com centro em  $M$  e raio  $\overline{OM}$ . Em seguida, marcamos os pontos  $A, B$  interseção entre  $\alpha$  e  $\gamma$ . Ver Figura 24.

Temos que o raio  $\overline{OA}$  é perpendicular à reta  $\overline{AP}$ , pois,  $A$  pertence ao arco capaz do segmento  $\overline{OP}$  sobre o ângulo de  $90^\circ$ , assim, vemos que o triângulo  $\triangle AOP$  é retângulo em  $A$ , analogamente, é possível mostrar que o triângulo  $\triangle BOP$  é retângulo em  $B$ . Temos ainda que os triângulos  $\triangle OAP$  e  $\triangle OBP$  são congruentes, ver Figura 25, pois,  $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ ,  $\overline{OP}$  é o



Figura 23 – Ponto médio  $M$  do segmento  $\overline{OP}$ Figura 24 – Circunferência  $\gamma$  com centro no ponto  $M$  e raio  $\overline{OM}$ Figura 25 – Os triângulos  $\triangle OAP$  e  $\triangle OBP$  são congruentes

lado comum e ambos são triângulos retângulos, assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, é possível mostrar que  $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ .

Assim, a circunferência  $\beta$  terá centro em  $P$ , raio  $\overline{PA}$  e é ortogonal a circunferência  $\alpha$ .

Suponhamos que há o ponto  $A'$ , diferente dos pontos  $A, B$ , pertencente a circunferência  $\alpha$ , tal que a circunferência  $\beta$ , com centro no ponto  $P$ , tenha raio  $\overline{A'P}$  e ortogonal a circunferência  $\alpha$ . Então, o triângulo  $\triangle OA'P$  é retângulo. Como  $\overline{OP}$  é lado comum dos triângulo  $\triangle OA'P$  e  $\triangle OAP$ ,  $\overline{OA} \cong \overline{OA'}$  e os triângulos  $\triangle OA'P$  e  $\triangle OAP$  são retângulos,

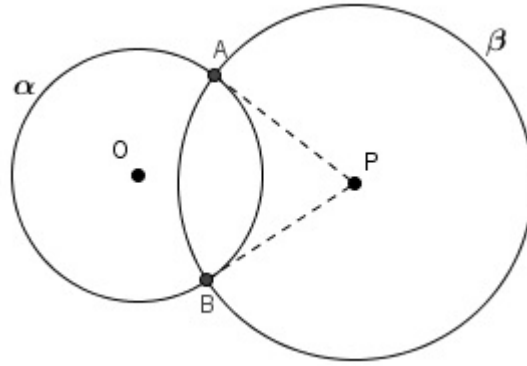


Figura 26 – Circunferência  $\beta$  ortogonal a circunferência  $\alpha$

aplicando o Teorema de Pitágoras, teremos  $\overline{OA} \cong \overline{OA'}$ , que nos leva a afirmar que  $A' = A$  ou  $A' = B$  que é absurdo. Logo, só há uma circunferência ortogonal a  $\alpha$  com centro no ponto  $P$ .

**Teorema 2.4** *Seja  $\alpha$  uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ . Existe  $O, P$  e  $P'$  colineares, então,  $P$  e  $P'$  são inversos em relação a  $\alpha$  se, e somente se, qualquer circunferência que passe por  $P$  e  $P'$  é ortogonal à circunferência  $\alpha$ .*

#### DEMONSTRAÇÃO

( $\Rightarrow$ ) Considerando que  $P$  e  $P'$  são inversos em relação a  $\alpha$  e  $\beta$  uma circunferência com centro  $O_1$  e raio  $t$  que passa por  $P$  e  $P'$ , Vamos provar que  $\beta$  é ortogonal a  $\alpha$ .

Seja  $s$  uma reta que passa por  $O$  e é tangente a  $\beta$ . Chamaremos de  $T$  o ponto de tangência de  $s$  em  $\beta$ , como mostra a Figura 27

Sendo  $M$  o ponto médio do segmento  $\overline{PP'}$  e o triângulo  $\triangle PO_1P'$  é isósceles, então,  $\overline{O_1M}$  é perpendicular a  $\overline{PP'}$  e os segmentos  $\overline{PM}$  e  $\overline{MP'}$  são congruentes. Diante disso, os triângulos  $\triangle OMO_1$  e  $\triangle O_1MP'$  são retângulos no vértice  $M$ . Temos, ainda, que  $\overline{O_1T}$  é um segmento de reta que passa pelo centro de  $\beta$ , pelo Lema 2.2,  $\overline{O_1T}$  é ortogonal a  $\beta$ , então, o triângulo  $\triangle OTO_1$  é retângulo em  $T$ , ver Figura 28.

Consideremos  $m = \overline{PM} = \overline{MP'}$  e  $t = \overline{O_1P'} = \overline{O_1T}$ , assim,

$$2 \cdot m = \overline{PP'} = \overline{OP'} - \overline{OP} \Rightarrow m = \frac{\overline{OP'} - \overline{OP}}{2} \quad (2.1)$$

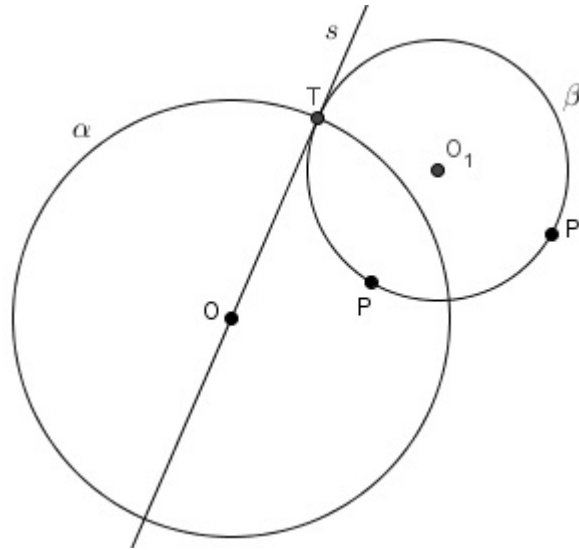


Figura 27 – Circunferência  $\beta$  passando por  $P$  e  $P'$  e reta  $s = \overline{OT}$  tangente em  $\beta$

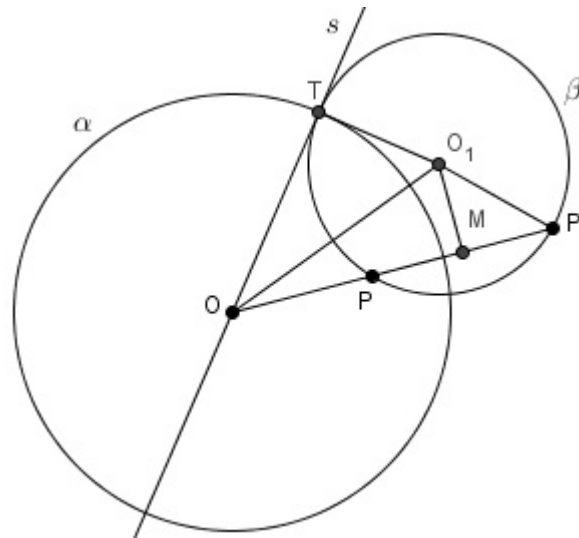


Figura 28 – As circunferência  $\alpha$  e  $\beta$  são ortogonais

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $\triangle O_1MP'$ , temos a seguinte relação:

$$\overline{O_1P'}^2 = \overline{MP'}^2 + \overline{MO_1}^2 \Rightarrow \overline{O_1P'}^2 = \left( \frac{\overline{OP'} - \overline{OP}}{2} \right)^2 + \overline{MO_1}^2$$

$$\overline{MO_1}^2 = \overline{O_1P'}^2 - \left( \frac{\overline{OP'} - \overline{OP}}{2} \right)^2 \quad (2.2)$$

Ainda temos:

$$\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM} = \overline{OP} + m$$

$$\begin{aligned}\overline{OM} &= \overline{OP} + \frac{\overline{OP'} - \overline{OP}}{2} \\ \overline{OM} &= \frac{\overline{OP} + \overline{OP'}}{2}\end{aligned}\tag{2.3}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $\triangle OMO_1$ , temos

$$\begin{aligned}\overline{OO_1}^2 &= \overline{O_1M}^2 + \overline{OM}^2 \\ \overline{OO_1}^2 &= \overline{O_1M}^2 + \left(\frac{\overline{OP} + \overline{OP'}}{2}\right)^2\end{aligned}\tag{2.4}$$

Fazendo (2.2) em (2.4), temos:

$$\begin{aligned}\overline{OO_1}^2 &= \overline{O_1P'}^2 - \left(\frac{\overline{OP'} - \overline{OP}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{OP} + \overline{OP'}}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ \overline{OO_1}^2 - \overline{O_1P'}^2 &= -\frac{\overline{OP}^2 - 2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OP'} + \overline{OP'}^2}{4} + \frac{\overline{OP}^2 + 2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OP'} + \overline{OP'}^2}{4}\end{aligned}$$

$$\overline{OO_1}^2 - t^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OP'}\tag{2.5}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $\triangle OTO_1$ , temos:

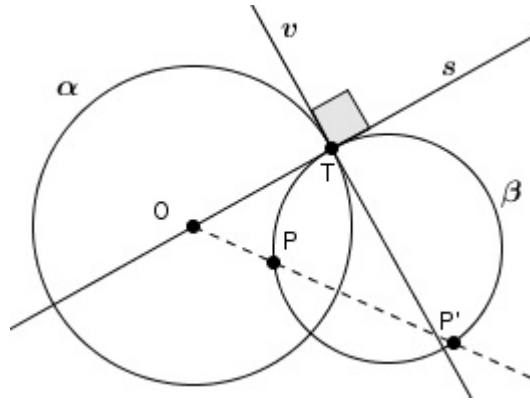
$$\overline{OT}^2 = \overline{OO_1}^2 - \overline{O_1T}^2 = \overline{OO_1}^2 - t^2 \Rightarrow \overline{OT}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OP'}\tag{2.6}$$

Como  $P$  e  $P'$  são inversos em relação a  $\alpha$ , temos

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 \Rightarrow \overline{OT} = r$$

Logo,  $T$  é um ponto da circunferência  $\alpha$ . Como  $s$  é tangente a  $\beta$  e é perpendicular a reta  $\overline{TO_1}$ , então,  $\beta$  é ortogonal a  $\alpha$ .

( $\Leftarrow$ ) Os pontos  $O$ ,  $P$  e  $P'$  são colineares,  $\beta$  é uma circunferência ortogonal à  $\alpha$  e passa pelos pontos  $P$  e  $P'$ . Vamos provar que  $P, P'$  são inversos em relação a  $\alpha$ . Se  $T$  é um ponto de interseção entre  $\alpha$  e  $\beta$ , então, existem as retas  $v$  tangente a  $\alpha$ , no ponto  $T$ , e  $s \perp v$  tangente a  $\beta$ . Pelo Lema 2.2, a reta  $s$  passa no ponto  $O$ , veja Figura 29.

Figura 29 – As circunferência  $\alpha$  e  $\beta$  são ortogonais

Tomando  $M$  como ponto médio de  $\overline{PP'}$ , temos que os triângulos  $\triangle OMO_1$  e  $\triangle O_1MP$  são retângulos em  $M$ . Temos ainda que a reta  $v$  é ortogonal a  $\beta$ , então,  $v$  incide no centro  $O_1$  de  $\beta$ , então, o triângulo  $\triangle OTO_1$  é retângulo em  $T$ . Deste modo, é possível provar a relação:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OT}^2$$

Como  $T$  é um ponto da circunferência  $\alpha$ , então,  $r = \overline{OT} \Rightarrow \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OT}^2 = r^2$ . Portanto,  $P$  e  $P'$  são inversos em relação  $\alpha$ .

**Corolário 2.2** *Considere  $\beta, \gamma$  circunferências que se intersectam nos pontos  $P, P'$ . Temos que  $P, P'$  são inversos em relação a circunferência  $\alpha$  se, e somente se,  $\beta, \gamma$  são ortogonais a  $\alpha$ .*

#### DEMONSTRAÇÃO

$\Rightarrow$ ) Sendo  $\beta, \gamma$  circunferências ortogonais a  $\alpha$  que passam por  $P$ , então, pelo Teorema 2.4,  $\beta, \gamma$  também passam pelo inverso de  $P$  em relação a  $\alpha$ . Como a interseção de duas circunferências têm, no máximo, dois pontos, então,  $P'$  é o inverso de  $P$  em relação a  $\alpha$

$\Leftarrow$ ) Sendo  $P, P'$  pontos inversos em relação à circunferência  $\alpha$  e  $\beta, \gamma$  são circunferências que passa por  $P, P'$ , pelo Teorema 2.4,  $\beta, \gamma$  são ortogonais a  $\alpha$ .

Pelo Teorema 2.4, para encontrar o inverso do ponto  $P$ , em relação a circunferência  $\alpha$  de centro  $O$ , basta construir uma circunferência ortogonal a  $\alpha$  passando por  $P$  e a reta  $\overline{OP}$ . Uma das interseções entre a reta  $\overline{OP}$  e a circunferência ortogonal a  $\alpha$  é o ponto  $P$  e a outra é o ponto  $P'$  inverso de  $P$  em relação a  $\alpha$ , ver Figura 30.

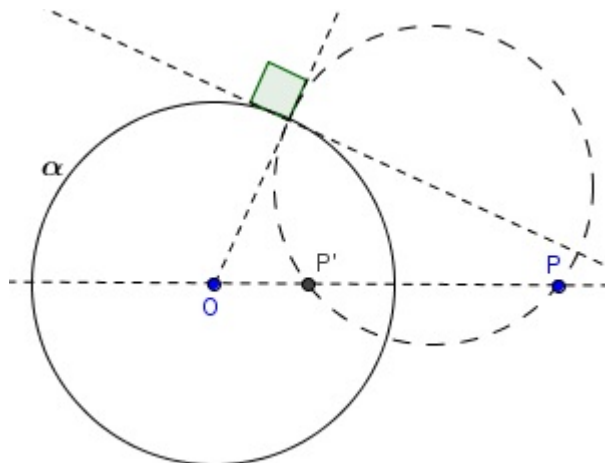


Figura 30 – Os pontos  $P$  e  $P'$  são inversos em relação a  $\alpha$ , conforme Teorema 2.4

## 2.5 INVERSÃO DE RETAS E CIRCUNFERÊNCIAS

Dependendo da posição relativa ao centro de inversão, a Inversão pode levar circunferência em circunferência ou em reta, assim como leva reta em reta ou circunferência, além disso, a Inversão é uma aplicação que conserva ângulos.

**Proposição 2.3** *Seja  $\alpha$  uma circunferência de inversão de centro  $O$  e raio  $r$ , o inverso de uma circunferência  $\beta$ , ortogonal a  $\alpha$ , é a própria circunferência  $\beta$  e o arco formado por todos os pontos de  $\beta$  no interior de  $\alpha$  é inverso ao arco formado por todos os pontos de  $\beta$  exterior a  $\alpha$ .*

### DEMONSTRAÇÃO

Consideremos, sem perda de generalidade, um ponto arbitrário  $A$  de  $\beta$  no interior de  $\alpha$  e o ponto  $B \in \alpha \cap \beta$ . Como  $\beta$  é ortogonal a  $\alpha$  e  $A$  é um ponto de  $\beta$ , pelo Teorema 2.4, o inverso de  $A$ ,  $A'$ , é a interseção entre a reta  $\overline{OA}$  e a circunferência  $\beta$ , que, pela definição de ponto inverso, é exterior a  $\alpha$ , deste modo, cada ponto de  $\beta$ , interior a  $\alpha$  está associado a um ponto de  $\beta$ , exterior a  $\alpha$ . Temos ainda que o inverso do ponto  $B$  é o próprio  $B$ , pois  $\overline{OB} = r$ , ver Figura 31.

**Teorema 2.5** *No plano  $\mathbb{E}_\infty$ , seja  $\alpha$  uma circunferência de inversão de centro  $O$*

- a) *A inversão de uma circunferência  $\beta$  que passa por  $O$  é uma reta  $\beta'$  que não passa por  $O$ , ver Figura 32.*
- b) *A inversão de uma reta  $s$  que não passa por  $O$  é uma circunferência que passa por  $O$ .*

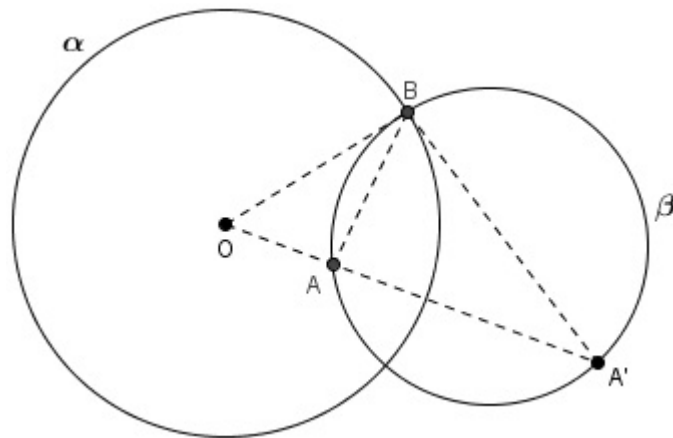


Figura 31 – As circunferências  $\alpha$  e  $\beta$  são ortogonais

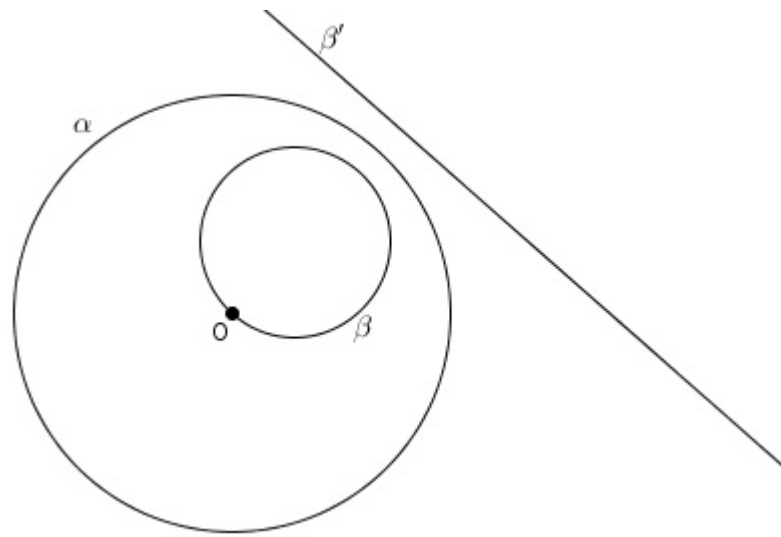


Figura 32 – A reta  $\beta'$  é inversa a circunferência  $\beta$  em relação a  $\alpha$

c) A inversão de uma circunferência  $\beta$  que não passa por  $O$  é uma circunferência  $\beta'$  que não passa por  $O$ , ver Figura 33.

A demonstração do Teorema 2.5 pode ser encontrado em (MUNARETTO, 2010, Pag. 24-31).

Segue de imediato que se  $m, n$  duas retas ou duas circunferências que passam no ponto  $P \neq O$ , então,  $m', n'$ , inversos, respectivamente, de  $m, n$ , passam por  $P'$ , inverso do ponto  $P$ . Se a interseção entre a reta  $s$  e uma circunferência  $\beta$ , que não passa por  $O$ , não é vazia, então  $s' \cap \beta' \neq \emptyset$ . E sendo  $m, n$  duas retas, ou duas circunferências, ou uma reta e uma circunferência, se  $m \cap n = \emptyset$ , então,  $m' \cap n' = \emptyset$ .

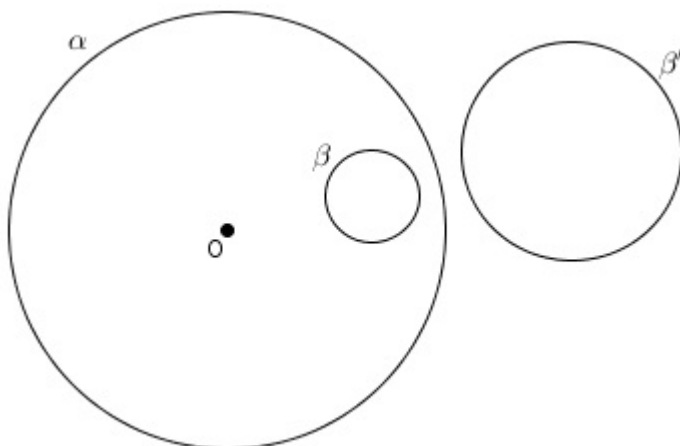


Figura 33 – A circunferência  $\beta'$  é inversa a circunferência  $\beta$  em relação a  $\alpha$

**Teorema 2.6** *Sejam  $m, n$  duas retas ou duas circunferências ou uma reta e uma circunferência que passam pelo ponto  $P \neq \Omega$  e  $m', n', P'$  os inversos de  $m, n, P$ , respectivamente. O ângulo formado por  $m, n$  no ponto  $P$  é igual ao ângulo formado por  $m', n'$  no ponto  $P'$ .*

A demonstração do Teorema 2.6 pode ser encontrado em (MUNARETTO, 2010, Pag. 31-37).

Pelo Teorema 2.6, a Inversão conserva ângulo formado por retas e circunferências, assim, diremos que a Inversão é uma aplicação Conforme.

**Teorema 2.7** *Seja  $\alpha$  uma circunferência de inversão de centro  $O$  e raio  $r$  e  $\beta$  uma circunferência que não passa por  $O$ . Seja  $A$  o inverso de  $O$  em relação a  $\beta$  e  $\beta'$  o inverso de  $\beta$  em relação a  $\alpha$ . Então,  $A'$ , o inverso de  $A$  em relação a  $\alpha$ , é o centro da circunferência  $\beta'$ .*

A demonstração do Teorema 2.7 pode ser encontrada em (MUNARETTO, 2010, Pag. 37).

**Corolário 2.3** *Considere a circunferência  $\alpha$  com centro  $O_\alpha$  e a circunferência  $\beta$  com centro  $O_\beta$ . Seja  $A$ , o inverso de  $O_\alpha$  em relação a  $\beta$ . Se  $\alpha, \beta$  são ortogonais, então,  $O_\beta$  é o inverso de  $A$  em relação a  $\alpha$ .*

#### DEMONSTRAÇÃO

Pelo Teorema 2.7, o inverso de  $A$ ,  $A'$ , em relação a  $\alpha$  é o centro da circunferência  $\beta'$ , inversa de  $\beta$  em relação a  $\alpha$ . Como  $\beta$  é ortogonal a  $\alpha$ , pela Proposição 2.3,  $\beta' = \beta$ , portanto,  $A' = O_\beta$ .



## Parte III

# CONSISTÊNCIA DO MODELO DE DISCO DE POINCARÉ

# 3 CONSISTÊNCIA DO MODELO DE DISCO DE POINCARÉ

Jules Henri Poincaré (1854-1912) era Engenheiro de Minas pela École Polytechnique (1875), trabalhou no Departamento de Minas até falecer. Foi Doutor em Ciências pela Universidade de Paris (1879), onde adquiriu Cátedra, e foi professor da Universidade de Sorbone. Ao contrário de outros famosos matemáticos, Poincaré se revelou um gênio na idade adulta e foi prova viva que habilidade para os números não é um pré-requisito para ser um grande matemático, pois, Poincaré não tinha habilidade para cálculos laboriosos mas é considerado um universalista em Matemática.

O modelo de Poincaré para Geometria Hiperbólica foi criado entre 1882 e 1887. Ele faz uso da Geometria Euclidiana, mas utilizando os postulados da Geometria Hiperbólica, assim, se houver alguma inconsistência, então, também há inconsistência na Geometria Euclidiana.

Mostraremos que o Modelo de Disco Proposto por Poincaré para Geometria Hiperbólica satisfaz os Axiomas de Hilbert mais o Axioma das Paralelas para Geometria Hiperbólica, ver seção 1.3, Página 26.

## 3.1 MODELO DE DISCO DE POINCARÉ

No Modelo de Disco, Poincaré dá significado aos termos indefinidos:

- Seja  $C$  o círculo euclidiano de raio 1 e centro  $O$  e seja  $\varphi$  a sua circunferência. O **Plano Hiperbólico**, que chamaremos de  $\mathbb{D}^2$ , é o círculo  $C$ , excluindo-se a circunferência  $\varphi$ ;
- **Ponto** é um elemento de  $\mathbb{D}^2$ , são os pontos do plano  $\mathbb{E}_\infty$  que estão no interior de  $\varphi$ , ver Figura 35;
- **Reta** é um conjunto obtido por interseção de  $C$  com a reta que incide no ponto  $O$ , ou com uma circunferência ortogonal à  $\varphi$ .

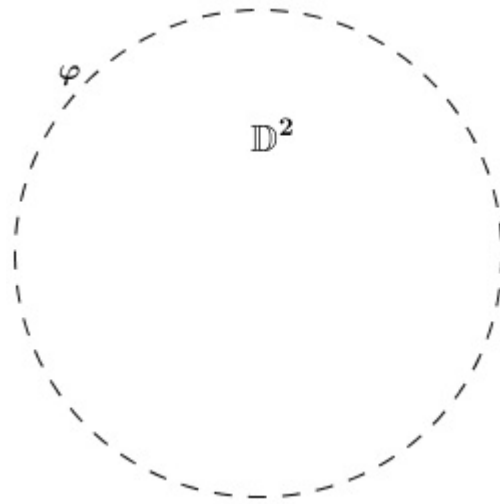


Figura 34 – Plano Hiperbólico chamado de  $\mathbb{D}^2$

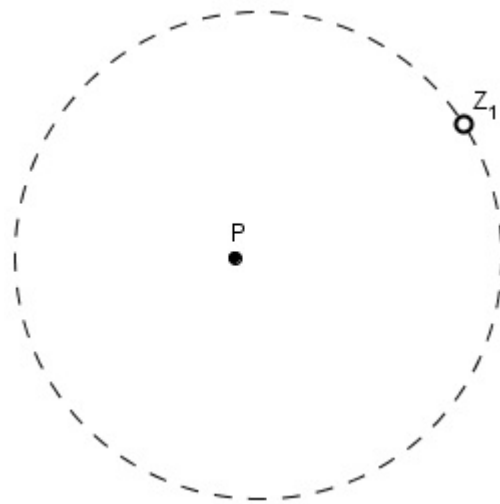


Figura 35 – Ponto  $P$  pertencente ao plano hiperbólico  $\mathbb{D}^2$  e o ponto  $Z_1$  não pertence ao plano hiperbólico  $\mathbb{D}^2$

Na Figura 36, o segmento  $\overline{Z_1Z_2}$  e o arco  $\widehat{Z_3Z_4}$  são exemplos de retas no modelo de Poincaré. Os pontos  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ , não são elementos do plano hiperbólico, são chamados de pontos ideais.

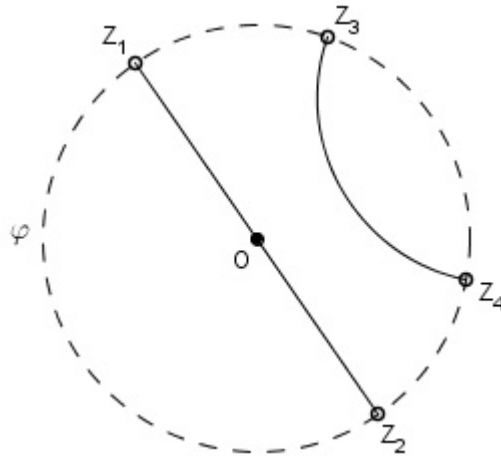


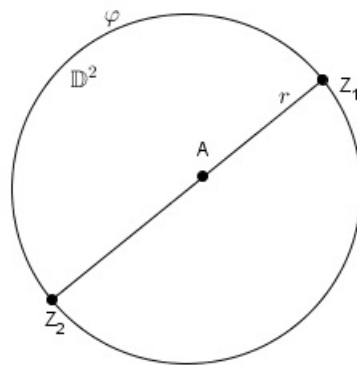
Figura 36 – Mode do Disco de Poincaré

Considere uma reta hiperbólica  $r$ , se  $r$  é um conjunto de pontos de uma reta euclidiana que passa pelo centro  $O$  de  $\varphi$  ou circunferência euclidiana ortogonal a  $\varphi$ , que denotaremos por  $\alpha_r$ , então diremos que  $\alpha_r$  gera a reta hiperbólica  $r$  e a interseção entre  $\varphi$  e  $\alpha_r$  são dois pontos,  $A$  e  $B$ , que serão os pontos ideais da reta hiperbólica  $r$ .

## 3.2 RELAÇÕES NO PLANO HIPERBÓLICO

**Definição 3.1** Considere  $r$  uma reta hiperbólica com pontos ideais  $Z_1$  e  $Z_2$  e um ponto  $A \in \mathbb{D}^2$ , diremos que  $A$  **pertence** a reta hiperbólica  $r$ , denotaremos por  $A \in r$  (lê-se:  $A$  pertence a  $r$ ), se

1.  $r$  é um diâmetro de  $\varphi$  e  $A, Z_1, Z_2$  são colineares no plano  $\mathbb{E}_\infty$ , ver Figura 37.

Figura 37 –  $A$  pertence a reta hiperbólica  $r$  que passa pelo centro de  $\varphi$

2.  $r$  é gerada por uma circunferência euclidiana  $\alpha_r$  ortogonal a  $\varphi$  com centro  $O_1$  e o segmento de reta euclidiana  $\overline{AO_1}$  é um raio de  $\alpha_r$ , ver Figura 38.

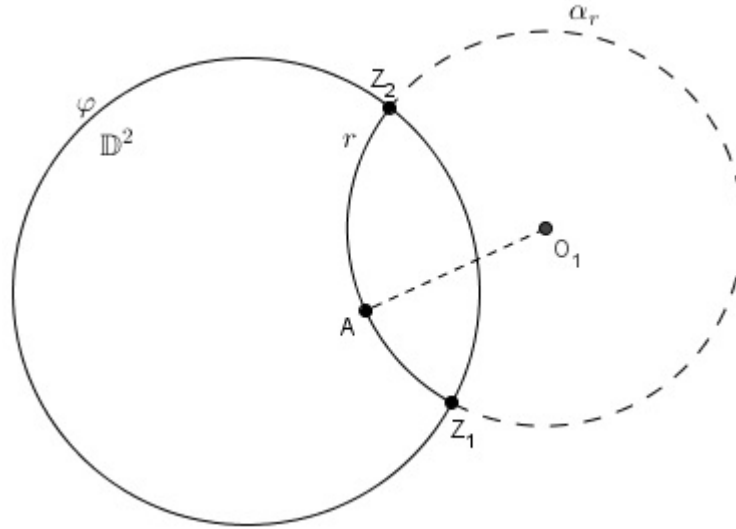


Figura 38 –  $A$  pertence a reta hiperbólica  $r$  que é gerada pela circunferência  $\alpha_r$ .

Sendo  $A \in \mathbb{D}^2$  pertencente a uma reta hiperbólica  $r$  também podemos dizer que  $r$  incide em  $A$  ou  $r$  passa por  $A$ .

**Definição 3.2** Seja  $r$  uma reta hiperbólica e os pontos  $A, B, C \in r$ , diremos que  $B$  **estar entre**  $A$  e  $C$ , denotaremos por  $A * B * C$ , se

1.  $r$  é um diâmetro da circunferência  $\varphi$  e  $B$  está entre  $A$  e  $C$  no plano  $\mathbb{E}_\infty$ , ver Figura 39.

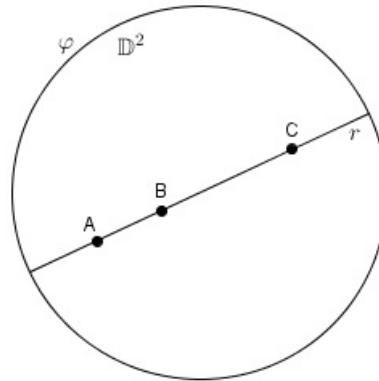


Figura 39 –  $B$  está entre  $A$  e  $C$  na reta hiperbólica que incide no centro de  $\varphi$ .

2.  $r$  é gerada pela circunferência  $\alpha_r$  com centro  $O_1$  e  $B$  é um ponto do ângulo euclidiano  $\angle AO_1C$ , ver Figura 40.

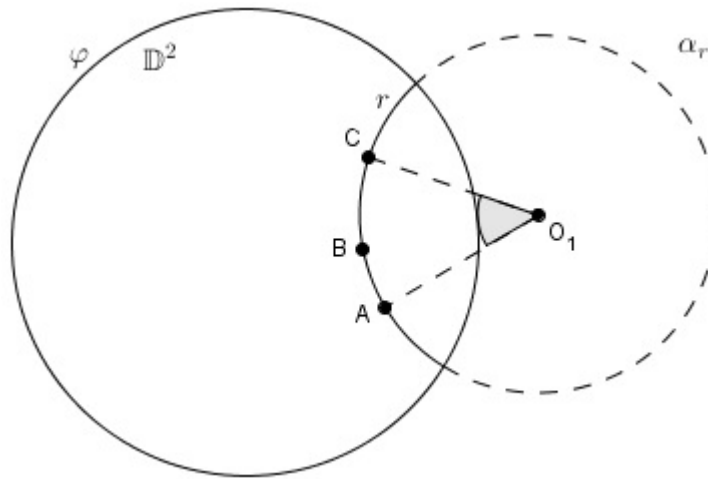


Figura 40 –  $B$  está entre  $A$  e  $C$  na reta hiperbólica que não incide no centro de  $\varphi$ .

Definida a relação "Estar Entre", podemos definir segmento de reta hiperbólica.

**Definição 3.3** O segmento de reta hiperbólica de extremos  $A$  e  $B$ , que denotaremos por  $[AB]$ , é o conjunto formado pelos pontos  $A, B \in \mathbb{D}^2$  e pelos pontos de  $\mathbb{D}^2$  que estão entre  $A$  e  $B$ , ver Figura 41, ou seja,

$$[AB] = \{A, B\} \cup \{P \in \mathbb{D}^2 \mid A * P * B\}$$

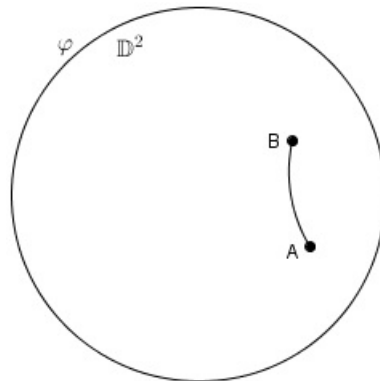


Figura 41 – Segmento de reta hiperbólica  $[AB]$ .

Segue da Definição 3.3 temos que  $[AB] = [BA]$

**Definição 3.4** Considere as retas hiperbólicas distintas  $r = \overline{AB}$ ,  $s = \overline{AC}$ .

1. Se  $r$  e  $s$  são retas hiperbólicas geradas pelas circunferências  $\alpha_r, \alpha_s$ , respectivamente, então, o ângulo formado pelas retas  $r, s$  é igual ao ângulo entre as circunferências  $\alpha_r, \alpha_s$  no ponto  $A^1$ , ver Figura 42.

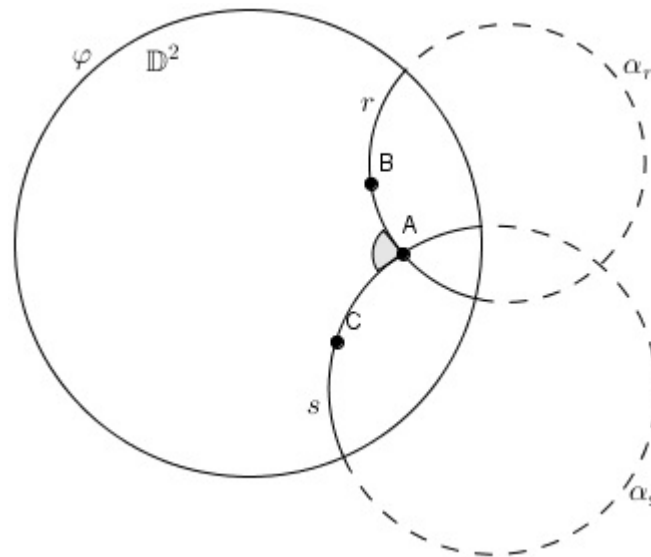


Figura 42 – Ângulo formado por pelas retas  $r, s$ , geradas, respectivamente, por  $\alpha_r, \alpha_s$

2. Se  $r$  é um diâmetro de  $\varphi$  e  $s$  é gerada pela circunferência  $\alpha_s$ , o ângulo formado pelas retas hiperbólicas  $r, s$  é igual ao ângulo de segmento em  $\alpha_s$  de vértice  $A$  no plano  $\mathbb{E}_\infty^2$

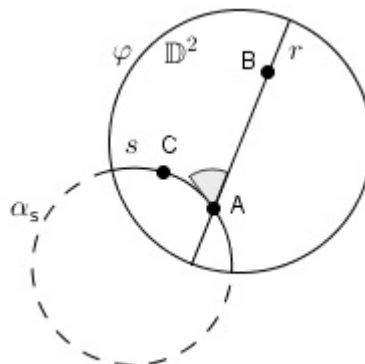


Figura 43 – Ângulo formado por pelas retas  $r, s$ , a reta hiperbólica  $r$  é um diâmetro de  $\varphi$  e  $s$  é gerada por  $\alpha_s$ .

<sup>1</sup> Ver Definição 2.7, Página 42.

<sup>2</sup> Ver Definição 2.9, Página 44.

3. Se  $r, s$  são diâmetros da circunferência  $\varphi$ , então,  $A = O$  e o ângulo formado pelas retas hiperbólicas  $r, s$  é igual ao ângulo formado pelas retas euclidianas  $\overline{AB}, \overline{AC}$ , ver Figura 44.

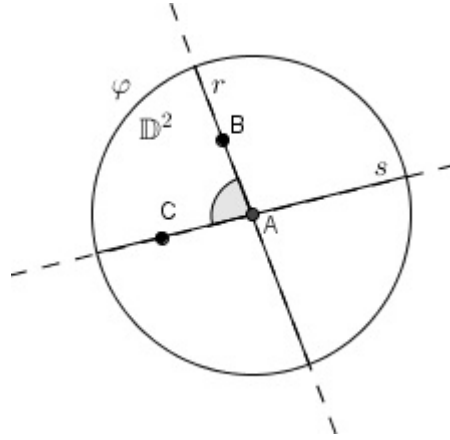


Figura 44 – Ângulo formado por pelas retas  $r, s$ , onde  $r, s$  são diâmetros de  $\varphi$ .

O ângulo formado pelas retas  $r, s$  será denotado por  $\angle BAC$

Vale salientar que  $\angle BAC = \angle CAB$  e, por conveniência, toda notação de ângulo se refere a ângulos menores ou iguais a  $180^\circ$  e a partir disso, seguem as mesmas terminologias: ângulo agudos, obtusos, complementar, suplementar, reto, opostos pelo vértice, etc.

**Definição 3.5** Considere as retas hiperbólicas  $\overline{AB}$ , com pontos ideais  $Z_1, Z_2$ , com  $Z_1$  mais próximo do ponto  $B$  do que o ponto  $A$ , no plano  $\mathbb{E}_\infty$ , e  $\overline{A'B'}$ , com pontos ideais  $Z'_1, Z'_2$ , com  $Z'_1$  mais próximo do ponto  $B'$  do que o ponto  $A'$ , no plano  $\mathbb{E}_\infty$ . Diremos que  $[AB]$  e  $[A'B']$  são **segmentos congruentes** se  $(A, B, Z_1, Z_2) = (A', B', Z'_1, Z'_2)$ <sup>3</sup>, ver Figura 45.

**Definição 3.6** Considere os pontos  $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{D}^2$ , diremos que  $\angle ABC$  e  $\angle DEF$  são **ângulos congruentes**, e representamos como  $\angle ABC = \angle DEF$ , se suas medidas forem iguais.

<sup>3</sup> Ver Definição 2.2, Página 31 e Definição 2.4, Página 34.



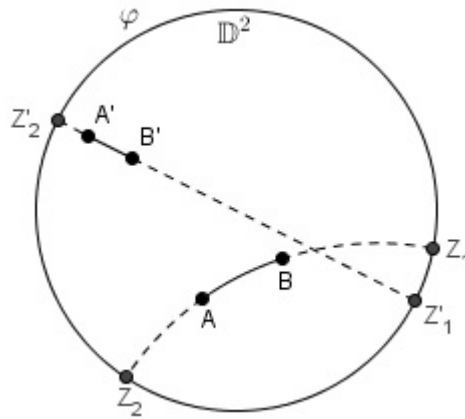


Figura 45 – Os segmentos  $[AB]$  e  $[A'B']$  são congruentes.

### 3.3 AXIOMAS DE INCIDÊNCIA

Vamos mostrar que o Modelo de Poincaré satisfaz os Axiomas de Incidência, para isso, vamos considerar  $\mathbb{D}^2$  como o plano de incidência

**Proposição 3.1** *O Disco de Poincaré satisfaz o Axioma II.*

Vamos mostrar que por dois pontos do plano hiperbólico incide uma única reta, então, considere a reta hiperbólica  $\overline{AB}$  como uma construção no plano  $\mathbb{E}_\infty$ , assim, temos que  $A, B \in C$ . Deste modo, consideremos quatro casos:

Caso 1) Considere os pontos  $A, B \in \mathbb{D}^2$  tal que  $O, A$  e  $B$  são colineares no  $\mathbb{E}_\infty$ , ver Figura 46.

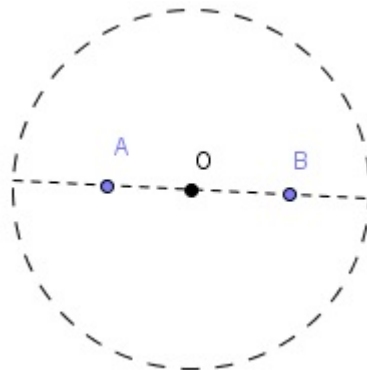


Figura 46 – Caso 3

Temos que  $A'$ , inverso de  $A$ , e  $B'$ , inverso de  $B$ , são pontos da reta  $\overline{AB}$ . Então, não há circunferência ortogonal a  $\varphi$  que passe por  $A$  e  $B$ . Logo, a reta hiperbólica que passa por  $A$  e  $B$  será a interseção entre a reta euclidiana  $\overline{AB}$  e  $\mathbb{D}^2$ .

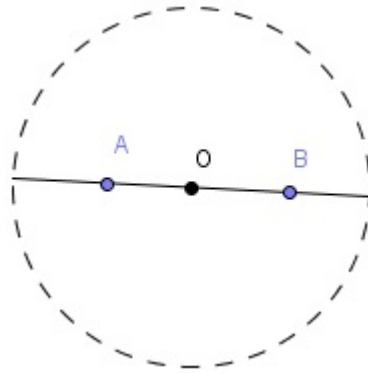


Figura 47 – Reta hiperbólica que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e o centro  $O$ .

Como a reta euclidiana  $\overline{AB}$  existe e é única, então, podemos dizer que a reta hiperbólica  $\overline{AB}$  também existe e é única. De forma análoga podemos construir uma reta hiperbólica determinada pelo ponto  $O$  e um ponto  $A \in \mathbb{D}^2$ .

Caso 2) Considere os pontos  $A, B \in \mathbb{D}^2$  e a reta  $\overline{AB}$  não passa pelo centro de  $\varphi$ .

Vamos determinar  $A'$  inverso do ponto  $A$  em relação a  $\varphi$ , ver Figura 48.

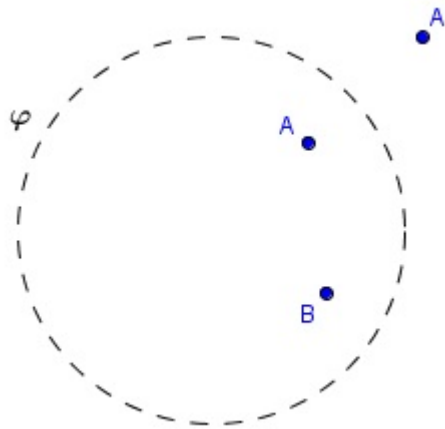


Figura 48 –  $A, B \in \mathbb{D}^2$

Vamos traçar as mediatrizes de  $\overline{AB}$  e de  $\overline{AA'}$  e marcar o ponto  $O$  interseção das duas mediatrizes, ver Figura 49.

O ponto  $O$  é centro da circunferência  $\beta$  com raio  $\overline{OA}$  que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $A'$ , ver Figura 50. Conforme o Teorema 2.4,  $\beta$  é ortogonal à  $\varphi$ .

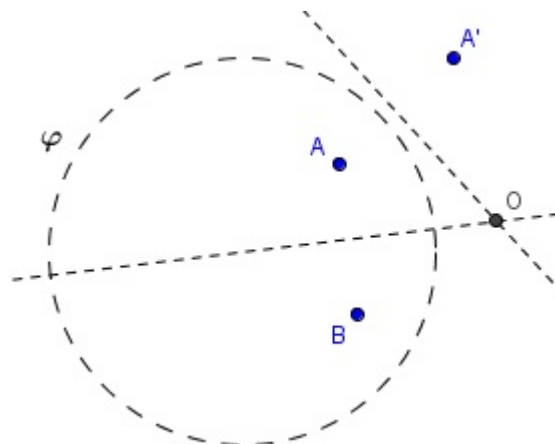


Figura 49 – Ponto  $O$  interseção das mediatrizes de  $\overline{AB}$  e de  $\overline{AA'}$

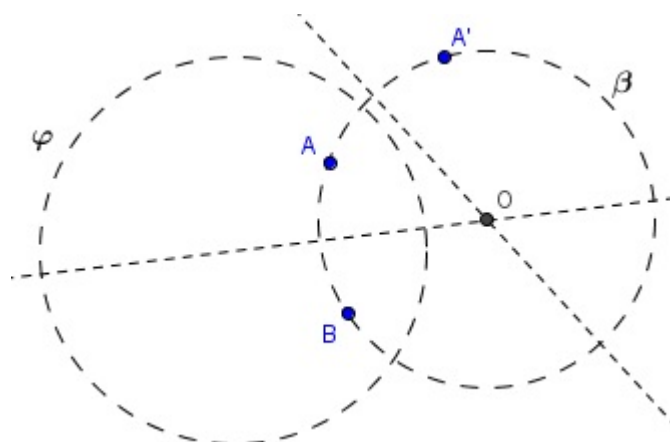


Figura 50 – As circunferência  $\alpha$  e  $\beta$  são ortogonais

A interseção entre  $\mathbb{D}^2$  e circunferência  $\beta$  é a reta hiperbólica que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ , ver Figura 51.

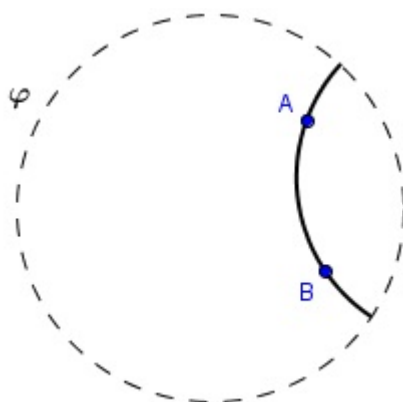


Figura 51 – Reta hiperbólica que passa pelos pontos  $A$  e  $B$

Na Geometria Euclidiana, três pontos distintos determinam um única circunferência, assim, a circunferência que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  é única, então a reta hiperbólica  $\overline{AB}$  é única.

É evidente que como uma única reta incide sobre os pontos  $A$  e  $B$ , então  $\overline{AB} = \overline{BA}$ .

No Modelo de Disco de Poincaré, é possível determinar uma reta hiperbólica por pontos ideais. Assim, se  $A$  e  $B$  são pontos ideais, então,  $A, B \in \varphi$ . Considere dois casos.

caso 1)  $O, A$  e  $B$  não são colineares no  $\mathbb{E}_\infty$ , veja Figura 52.

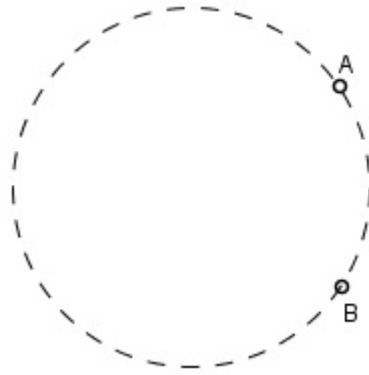


Figura 52 –  $A$  e  $B$  são pontos ideais.

Traçando a reta  $a$ , tangente a  $\varphi$  no ponto  $A$ , e a reta  $b$ , tangente a  $\varphi$  no ponto  $B$ , vamos encontrar o ponto  $C = a \cap b$ , veja Figura 53.

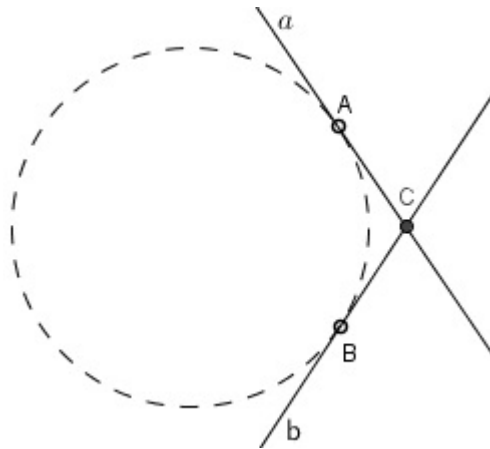


Figura 53 – As retas  $a$  e  $b$  são tangentes a  $\varphi$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente.

A circunferência de centro  $C$  e raio  $\overline{AC}$  é ortogonal a  $\varphi$  e passa pelo ponto  $B$ , veja Figura 54.

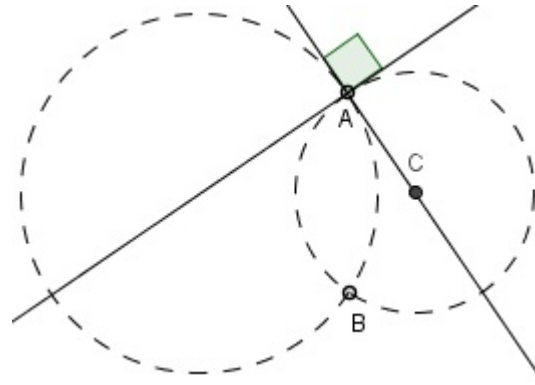


Figura 54 – As retas  $a$  e  $b$  são tangentes a  $\varphi$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente.

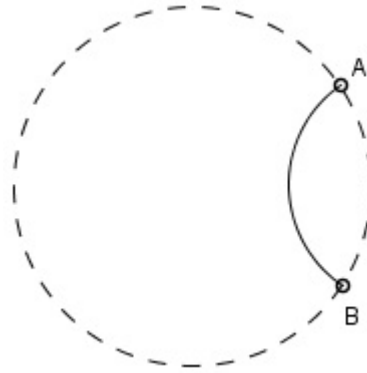


Figura 55 – Reta hiperbólica que tem pontos ideais  $A$  e  $B$ .

Assim, o arco  $\widehat{AB}$  é a reta hiperbólica que tem como pontos ideais  $A$  e  $B$ , ver Figura 55.

Na Geometria Euclidiana, a circunferência de centro  $C$  e raio  $AC$ , denotaremos por  $\mathcal{C}(C, A)$ , é única, então, a reta hiperbólica  $\overline{AB}$  também é única.

Caso 2  $O, A$  e  $B$  são colineares no  $\mathbb{E}_\infty$ , então, a reta hiperbólica  $\overline{AB}$  é o diâmetro de  $\varphi$  que incide em  $A$  e  $B$ .

**Definição 3.7** Considere as retas hiperbólicas  $r, s$ , dizemos que  $r, s$  são **retas hiperbólicas coincidentes** se uma incide em todos os pontos da outra, ou seja,  $r = s$ , do contrário, dizemos que  $r, s$  são retas hiperbólicas distintas, ou seja,  $r \neq s$ .

**Teorema 3.1** Considere as retas hiperbólicas  $r, s$ , se  $r$  incide em, ao menos, dois pontos de  $s$ , então,  $r, s$  são coincidentes.

DEMONSTRAÇÃO

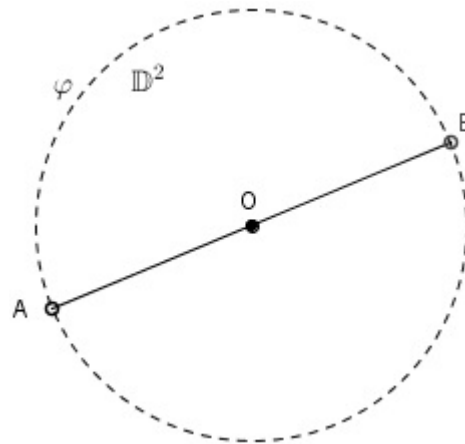


Figura 56 – Pontos ideais  $A$  e  $B$  e  $O, A$  e  $B$  são colineares no plano  $\mathbb{E}_\infty$

Se  $r, s$  incidem nos pontos  $A, B \in \mathbb{D}^2$ , pela Proposição 3.1,  $A, B$  determina uma única reta hiperbólica, logo,  $r = s$ .

Vejamus uma Aplicação no Disco de Poincaré que leva um ponto do Plano Hiperbólico a um ponto no Plano Hiperbólico.

**Definição 3.8** *Sejam  $r$  uma reta hiperbólica,  $A, A'$  pontos de  $\mathbb{D}^2$ , diremos que  $A, A'$  são **simétricos** ou **reflexos** à reta  $r$  se*

1.  $r$  é um diâmetro de  $\varphi$  e  $A, A'$  são simétricos a reta euclidiana que contém  $r$ , ver Figura 57.

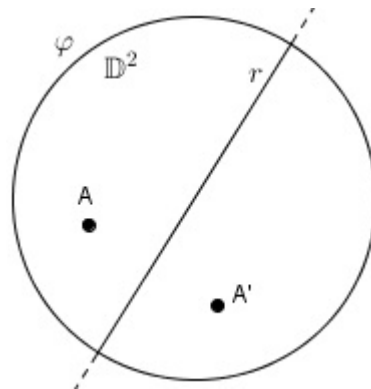


Figura 57 –  $A, A'$  são pontos do  $\mathbb{D}^2$  simétricos em relação a reta hiperbólica  $r$  e  $r$  é um diâmetro da circunferência euclidiana  $\varphi$

2.  $r$  é uma reta gerada pela circunferência  $\alpha_r$  e  $A, A'$  são inversos em relação a  $\alpha_r$  no  $\mathbb{E}_\infty$ .

Chamaremos  $r$  de *reta hiperbólica de simetria* ou *reflexão* e esta aplicação em  $\mathbb{D}^2$  de **Reflexão em relação a uma reta**.

Assim, verificamos que, no plano  $\mathbb{E}_\infty$ , se  $r$  é um diâmetro de  $\varphi$ ,  $A, A'$  estão em lados opostos a  $r$  e se  $r$  é um arco de uma circunferência  $\alpha_r$ , um ponto é exterior e o outro é interior a  $\alpha_r$ . Em ambos os casos de  $r$ , se  $A$  é um ponto de  $r$  veremos que  $A' = A$ .

Considerando dois pontos,  $A$  e  $A'$ , equidistantes de  $O$ , no  $\mathbb{E}_\infty$ , a reta de reflexão que transformar  $A$  em reflexo de  $A'$ , é a interseção entre a mediatriz do segmento de reta euclidiana  $\overline{AA'}$  e o interior de  $\varphi^4$ , ver Figura 58.

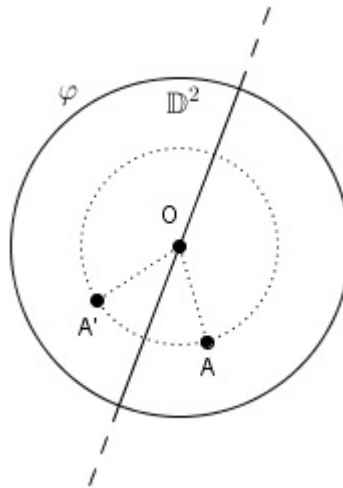


Figura 58 –  $O$  é equidistante de  $A$  e  $A'$  e a reta de reflexão é a interseção entre a mediatriz do segmento  $\overline{AA'}$  e o interior de  $\varphi$

Vamos determinar a reta  $r$  que transforma o ponto  $A$  em reflexo de  $A'$ , onde  $A$  e  $A'$  são distintos e não equidistantes de  $O$ .

1. a reta  $r$  é um arco da circunferência  $\alpha_r$  que é ortogonal a  $\varphi$ . Sendo  $O_1$  o centro de  $\alpha_r$  e como  $A$  e  $A'$  são inversos em relação a  $\alpha_r$ , então,  $O_1$  pertence a reta euclidiana  $\overline{AA'}$ , ver Figura 59.
2. Pelo Teorema 2.4, Página 48,  $\alpha_r$  é ortogonal a circunferência que determina a reta hiperbólica  $\overline{AA'}$ , então, os pontos ideais,  $Z_1$  e  $Z_2$ , são inversos em relação a circunferência  $\alpha_r$ , logo, o ponto  $O_1$  também pertence a reta euclidiana  $\overline{Z_1Z_2}$ , ou seja,  $O \in \overline{Z_1Z_2} \cap \overline{AA'}$ . Assim, vamos determinar os pontos ideais da reta hiperbólica  $\overline{AA'}$  e o ponto  $O$ , centro da circunferência  $\alpha_r$ , ver Figura 60.

<sup>4</sup> Consideramos que, no plano  $\mathbb{E}_\infty$ ,  $A, A'$  são simétricos a reta  $r$  se  $r$  for a mediatriz do segmento  $\overline{AA'}$

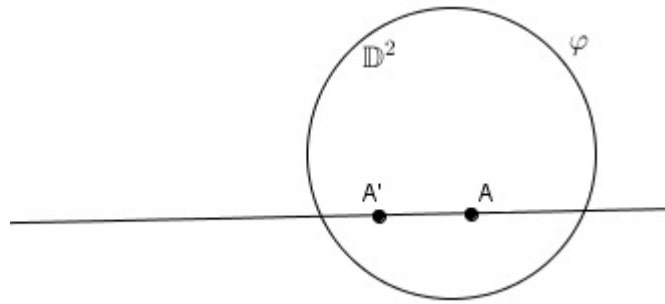


Figura 59 – Centro da circunferência  $\alpha_r$  pertence a reta euclidiana  $\overline{AA'}$ .

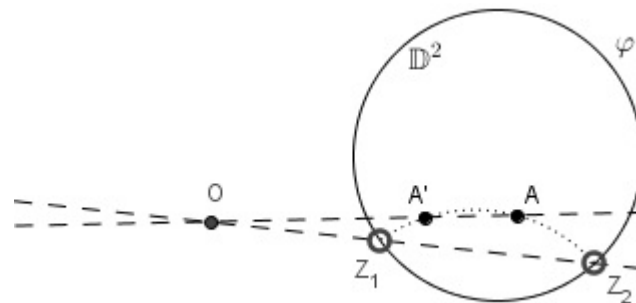


Figura 60 – Centro da circunferência  $\alpha_r$  pertence a interseção das retas euclidianas  $\overline{AA'}$  e  $\overline{Z_1Z_2}$ .

3. Falta saber o raio da circunferência  $\alpha_r$ , para isso, vamos determinar o ponto  $P$  tal que a reta euclidiana  $\overline{O_1P}$  seja tangente ao arco de circunferência  $Z_1Z_2$ , ver Figura 61.

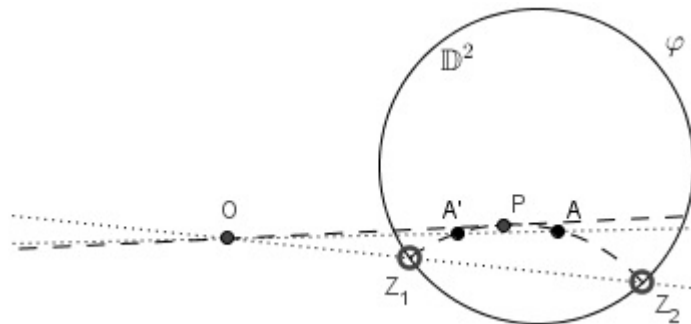


Figura 61 – A reta euclidiana  $\overline{OP}$  é tangente ao arco de circunferência  $Z_1Z_2$

4. por fim, temos que  $\alpha_r = \mathcal{C}(O, P)$ , assim, tracemos o arco que representa a reta hiperbólica  $r$ , ver Figura 62.

Vamos construir uma reta hiperbólica  $r$  que reflita o ponto  $A$  no ponto  $O$ , centro de  $\varphi$ .

Se  $A = O$ , então, a reta hiperbólica  $r$  incide em  $O$ , logo, qualquer diâmetro de  $\varphi$  pode ser a reta de reflexão  $r$ .



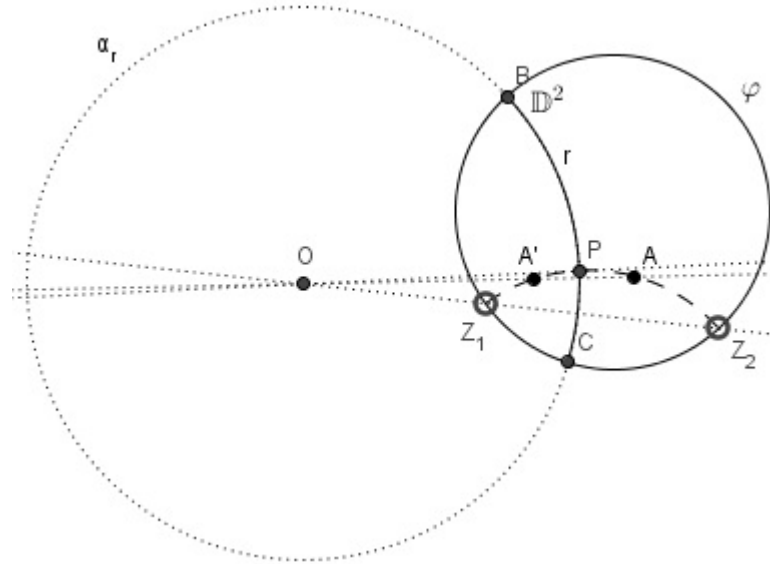


Figura 62 –  $r$  é reta de reflexão no plano  $\mathbb{D}^2$

Vamos considerar  $A \neq O$ , então, existe  $A'$ , inverso de  $A$  em relação a  $\varphi$ . Pelo Lema 2.3, Página 46, existe uma única circunferência ortogonal a  $\varphi$  com centro em  $A'$ , denotaremos por  $\alpha_r$ , que gera uma reta hiperbólica  $r$ . Sendo  $\varphi, \alpha_r$  circunferências ortogonais e  $A, A'$  inversos em relação a  $\varphi$ , pelo Corolário 2.3,  $O, A$  são inversos em relação a  $\alpha_r$ , portanto,  $O, A$  são simétricos em relação a reta hiperbólica  $r$ .

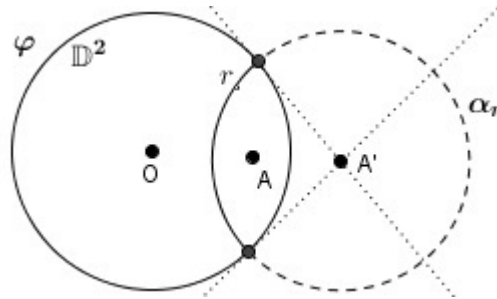


Figura 63 –  $A$  é reflexo de  $O$  em relação a reta hiperbólica  $r$

**Proposição 3.2** *Em  $\mathbb{D}^2$ , a reflexão em relação a uma reta leva uma reta hiperbólica em outra reta hiperbólica.*

DEMONSTRAÇÃO

Vamos considerar os seguintes casos:

Caso I- Sejam as retas hiperbólica  $r, s$  geradas pelas circunferências  $\alpha_r, \alpha_s$ , respectivamente, e  $\alpha_s$  não passa pelo centro de  $\alpha_r$ . Pela Proposição 2.3, tomando  $\alpha_r$  como circunferência

de inversão, a inversa de  $\varphi$  é a própria  $\varphi$ , a inversa de  $\alpha_s$ , pelo Teorema 2.5, página 53, é uma circunferência  $\alpha_{s'}$ . Pelo Teorema 2.6, página 54,  $\alpha_{s'}$  é ortogonal a  $\varphi$ . Logo,  $\alpha_{s'}$  gera uma reta hiperbólica  $s'$  que é simétrica a reta hiperbólica  $s$  em relação a  $r$ , ver Figura 64.

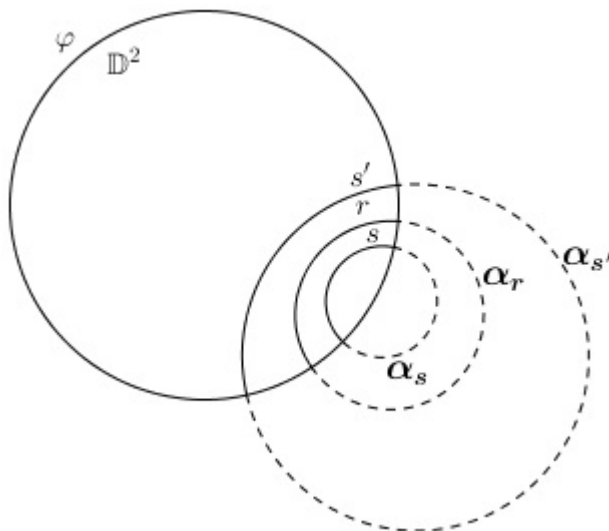


Figura 64 –  $s, s'$  são retas hiperbólicas simétricas em relação a reta hiperbólica  $r$ .

Caso II- Considere  $s$  uma reta hiperbólica que passa pelo centro de  $\varphi$ , ou seja,  $s$  é um segmento de uma reta euclidiana  $\tau_s$ ,  $r$  uma reta hiperbólica gerada por uma circunferência  $\alpha_r$  de centro  $O_1$  e  $\tau_s$  não passa pelo centro de  $\alpha_r$ . Tomando  $\alpha_r$  como circunferência de inversão, pelo Teorema 2.5, o inverso de  $\tau_s$  é uma circunferência  $\tau_{s'}$  que passa pelo centro  $O_1$  de  $\alpha_r$ . Então, o inverso do centro de  $\varphi$ ,  $O'$ , pertence a circunferência  $\tau_{s'}$ , como  $\alpha_r$  é ortogonal a  $\varphi$ , pelo Corolário 2.3,  $O', O_1$  são inversos em relação a  $\varphi$  e, pelo Teorema 2.4,  $\tau_{s'}$  é ortogonal a  $\varphi$ . Logo,  $\tau_{s'}$  gera uma reta hiperbólica  $s'$  que é simétrica à reta  $s$  em relação à reta hiperbólica  $r$ , ver Figura 65.

Caso III- Considere  $s, r$  retas hiperbólicas geradas pelas circunferências  $\alpha_s, \alpha_r$ , respectivamente, e  $\alpha_s$  passa pelo centro  $O_1$  de  $\alpha_r$ . A reta euclidiana  $\overline{OO_1}$  intercepta  $\alpha_s$  no ponto  $O'$ , como  $\alpha_s$  é ortogonal a  $\varphi$  e  $O, O', O_1$  são colineares, pelo Teorema 2.4,  $O', O_1$  são inversos em relação a  $\varphi$ . Pelo Corolário 2.3, o inverso de  $O'$ , em relação a  $\alpha_r$  é o ponto  $O$ , centro de  $\varphi$ , pelo Teorema 2.5, o inverso de  $\alpha_s$  em relação a  $\alpha_r$  é uma reta,  $\alpha_{s'}$ . Assim,  $\alpha_{s'}$  é uma reta que passa por  $O$ , logo o diâmetro de  $\varphi$  determinado pela reta euclidiana  $\alpha_{s'}$  é uma reta hiperbólica simétrica a reta  $s$  em relação à reta hiperbólica  $r$ , ver Figura 66.

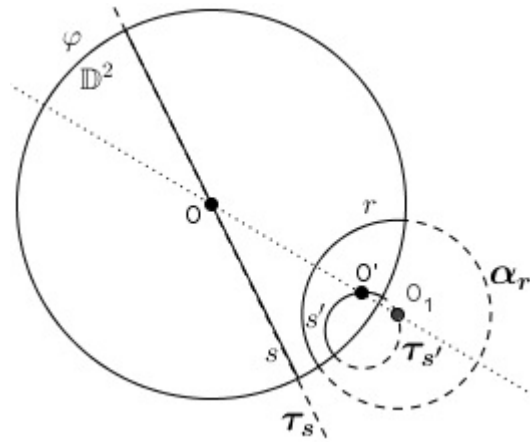


Figura 65 –  $s$  é um diâmetro de  $\varphi$  e  $s, s'$  são retas hiperbólicas simétricas em relação a reta hiperbólica  $r$ .

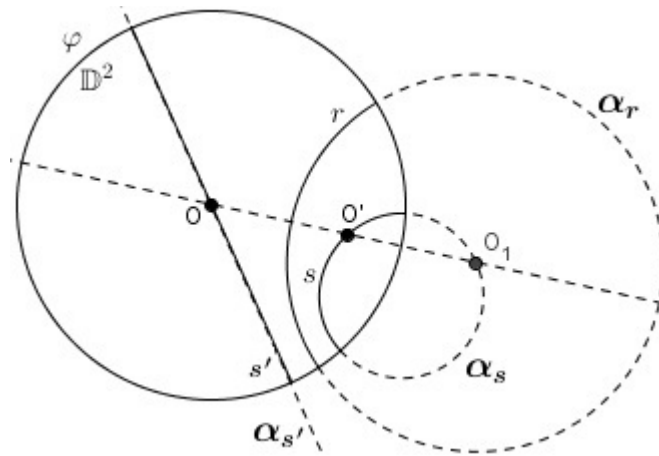


Figura 66 –  $s, s'$  são retas hiperbólicas simétricas em relação a reta hiperbólica  $r$

Caso IV- Considere  $r, s$  retas hiperbólicas tal que  $r$  é gerada pelas circunferência  $\alpha_r$  e  $s$  é um diâmetro de  $\varphi$  determinado pela reta  $\tau_s$  que passa pelo centro  $O_1$  de  $\alpha_r$ . Pelo Teorema 2.5, a inversa de  $\tau_s$  em relação a  $\alpha_r$  é a própria reta  $\tau_s$ , portanto,  $s$  é simétrica a si própria em relação a reta hiperbólica  $r$ , ver Figura 67.

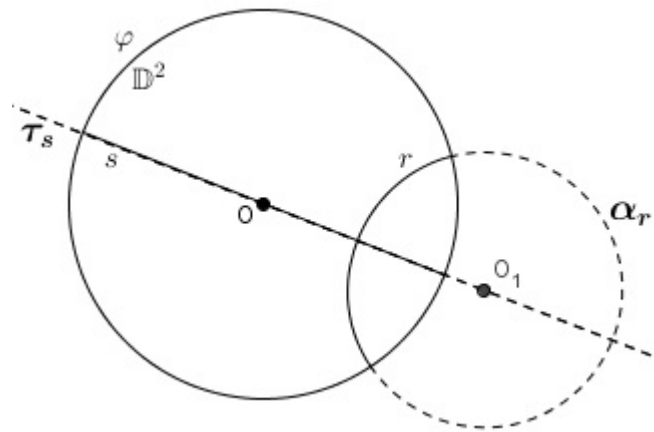


Figura 67 –  $s$  é simétrica a si própria em relação a reta hiperbólica  $r$

Caso V- Considere  $r, s$  retas hiperbólicas distintas tal que  $r, s$  são diâmetros de  $\varphi$ . Tomando  $r$  como reta hiperbólica de reflexão, no plano, assim,  $r$  divide  $\varphi$  em dois arcos simétricos à reta euclidiana  $v$  que contém  $r$ . Então, vamos considerar  $A, B$  pontos ideais da reta hiperbólica  $s$ , se existe uma reta hiperbólica  $s'$ , simétrica a  $s$  em relação a  $r$ , então, seus pontos ideais,  $A', B'$  são simétricos, respectivamente, a  $A, B$  em relação a  $r$ . Vamos traçar uma reta euclidiana  $t$  perpendicular a  $v$  passando pelo ponto  $A$  e marquemos o ponto  $A'$ , outra interseção entre  $t, \varphi$ . Vamos traçar a reta euclidiana  $u$  perpendicular a  $v$  passando por  $B$  e marquemos o ponto  $B'$  outra interseção entre  $u, \varphi$ . Como  $A', O, B'$  são colineares no  $\mathbb{E}_\infty$ , então  $O$  pertence a reta hiperbólica  $s'$ , ou seja,  $s'$  é um diâmetro de  $\varphi$ , ver Figura 68.

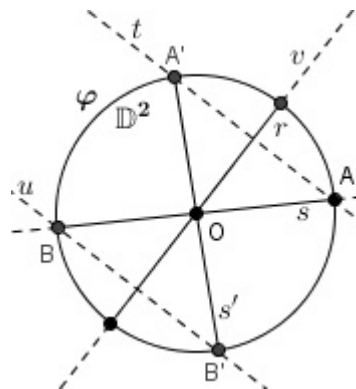


Figura 68 –  $s, s'$  são simétricas em relação a  $r$  e incidem em  $O$ .

Caso VI- Considere  $r, s$  retas hiperbólicas onde  $r$  é um diâmetro de  $\varphi$  e  $s$  é uma reta hiperbólica que não incide em  $O$ . Vamos considerar  $A, B$  pontos ideais da reta hiperbólica  $s$ . Se existir uma reta hiperbólica  $s'$ , simétrica a  $s$  em relação a  $r$ , então seus pontos ideais,  $A', B'$ , são simétricos, respectivamente, a  $A, B$  em relação a  $r$ . Vamos traçar uma reta euclidiana  $t$  perpendicular a  $r$  passando por  $A$  e marcamos  $A'$ , a outra interseção entre  $t, \varphi$ , tracemos a reta  $u$  perpendicular a  $r$  passando por  $B$  e marcamos  $B'$ , a outra interseção entre  $u, \varphi$ . Como  $A', B', O$  não são colineares no  $\mathbb{E}_\infty$ , então,  $s'$  é um arco de circunferência ortogonal a  $\varphi$ , ver Figura 69.

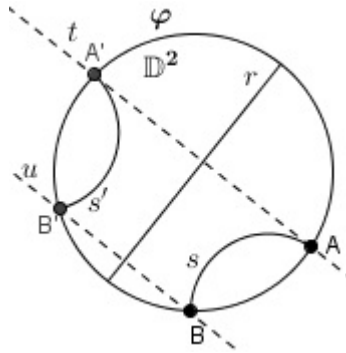


Figura 69 –  $s, s'$  são simétricas em relação a  $r$  e não incidem em  $O$ .

**Lema 3.1** *Duas retas hiperbólicas distintas se intersectam, no máximo, em um ponto*

#### DEMONSTRAÇÃO

Considere  $r, s$  retas hiperbólicas, se  $r, s$  são diâmetros de  $\varphi$ , então se intersectam no ponto  $O$ . Se  $r$  é um diâmetro de  $\varphi$  determinado por uma reta euclidiana  $t$  e  $s$  é uma reta hiperbólica gera pela circunferência  $\alpha_s$ , então,  $t, \alpha_s$  se intersectam, no máximo, em dois pontos,  $A, B$ . Como  $\alpha_s$  é ortogonal a  $\varphi$  e  $O, A, B$  são pontos colineares no plano  $\mathbb{E}_\infty$ , pelo Teorema 2.4,  $A, B$  são pontos inversos em relação a  $\varphi$ , logo, um deles está no interior e o outro é exterior a  $\varphi$ , ver Figura 70.

Se  $r, s$  retas hiperbólicas geradas pelas circunferências  $\alpha_r, \alpha_s$ , respectivamente, então,  $\alpha_r, \alpha_s$  se intersectam, no máximo, em dois pontos,  $A, B$ . Como  $\alpha_r, \alpha_s$  são ortogonais a  $\varphi$ , pelo Corolário 2.2,  $A, B$  são inversos em relação a  $\varphi$ , portanto, apenas um dos pontos pertence a  $\mathbb{D}^2$ , ver Figura 71.

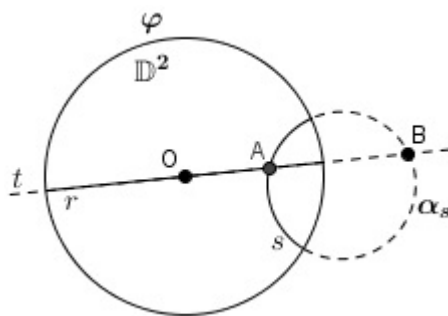


Figura 70 –  $r$  passa por  $O$  e  $s$  não passam por  $O$  e  $r, s$  se intersectam, no máximo, em um ponto

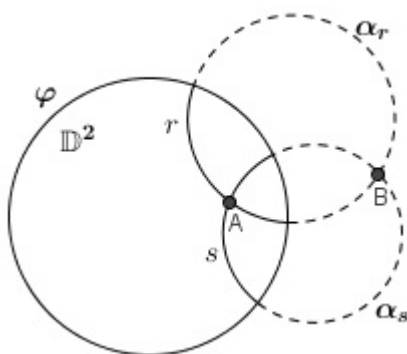


Figura 71 –  $r, s$  não passam por  $O$  e  $r, s$  se intersectam, no máximo, em um ponto no plano  $\mathbb{D}^2$

**Definição 3.9** Chamaremos de **retas hiperbólicas concorrentes** duas retas hiperbólicas distintas que se intersectam em um ponto.

**Proposição 3.3** O Modelo de Disco de Poincaré satisfaz o Axioma I2 e I3.

#### DEMONSTRAÇÃO

A menos que seja necessário uma reflexão, considere uma reta hiperbólica  $r$  que não passa por  $O$ . Logo,  $r$  é gerada por uma circunferência  $\alpha_r$  com centro  $O_1$  e intersecta  $\varphi$  nos pontos  $Z_1, Z_2$ . A reta euclidiana  $\overline{OO_1}$  intercepta o arco  $r$  no ponto  $A$ . Seja  $Z_3$  a interseção entre  $\varphi$  e a reta euclidiana  $\overline{OZ_1}$ , teremos, então, um ponto  $B$  que é a interseção entre o arco  $r$  e a reta euclidiana  $\overline{Z_3O_1}$ . Assim, temos que a reta hiperbólica  $r$  incide ao menos em dois pontos,  $A, B$ , assim, o Disco de Poincaré satisfaz o Axioma I2, ver Figura 72.

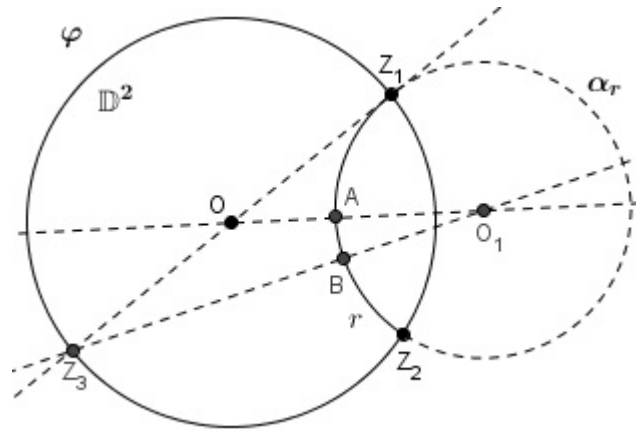


Figura 72 – O Modelo de Disco de Poincaré satisfaz o Axioma I2.

Para provar que o Disco de Poincaré satisfaz o Axioma I3, a menos que seja necessário uma reflexão, tomemos os pontos distintos  $O, A, B \in \mathbb{D}^2$  não colineares no  $\mathbb{E}_\infty$ . Consideremos que existe uma reta hiperbólica que incide em  $O, A, B$ . Assim, as retas hiperbólicas  $\overline{OA}$  e  $\overline{AB}$  são coincidentes, que é um absurdo, pois  $\overline{OA}$  é um diâmetro de  $\varphi$  e  $\overline{AB}$  é um arco de circunferência ortogonal a  $\varphi$ , portanto, não é possível construir uma reta hiperbólica que incida em  $O, A, B$ , logo, o Disco de Poincaré satisfaz o Axioma I3, ver Figura 73.

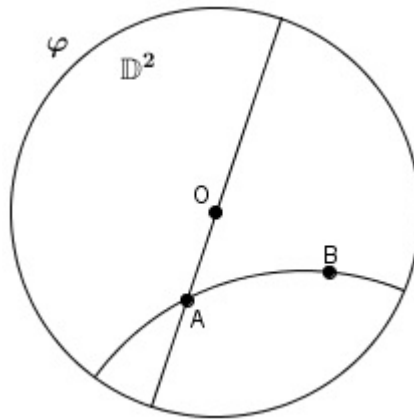


Figura 73 – O Modelo de Disco de Poincaré satisfaz o Axioma I3.

**Teorema 3.2** *As afirmações a seguir são verdadeiras no Modelo de Poincaré:*

1. *Para cada reta hiperbólica  $h$ , existe pelo menos um ponto  $P$ , tal que  $P$  não incide a  $h$ .*
2. *Para cada ponto  $P$  existe pelo menos uma reta  $h$ , tal que  $h$  não incide sobre  $P$ .*
3. *Para cada ponto  $P$  existem pelo menos duas retas distintas  $h_1$  e  $h_2$ , tais que  $h_1$  e  $h_2$  incidem sobre  $P$ .*

4. Para cada ponto  $P$ , existem pontos  $Q$  e  $R$ , tais que  $P$ ,  $Q$  e  $R$  não são colineares.

### DEMONSTRAÇÃO

1. Considere  $h$  uma reta hiperbólica, suponhamos que qualquer ponto  $P$  incida em  $h$ . Teremos, então, que qualquer subconjunto de  $\mathbb{D}^2$ , está contido na reta  $h$ , o que é contradiz a Proposição 3.3.
2. Suponhamos que existe um ponto  $P \in \mathbb{D}^2$  que é incidente a qualquer reta hiperbólica  $h$ . Então, para quaisquer dois pontos  $A, B \in \mathbb{D}^2 \setminus \{P\}$  distintos,  $P \in \overline{AB}$ , pelo que  $A$ ,  $B$  e  $P$  são colineares. Para quaisquer três pontos  $A, B, C \in \mathbb{D}^2 \setminus \{P\}$ , distintos dois a dois,  $P \in \overline{AB} \cap \overline{AC}$ , resultado do Teorema 3.3 que  $\overline{AB} = \overline{AC}$ . Consequentemente  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares. Pela arbitrariedade da escolha dos pontos, concluímos que quaisquer três pontos do plano  $\mathbb{D}^2$  são colineares, o que contradiz a Proposição 3.3. Assim, nem todo ponto  $P$  é incidente na reta hiperbólica  $h$ , para cada ponto  $P \in \mathbb{D}^2$  existe pelo menos uma reta hiperbólica  $h$  tal que  $P \notin h$ .
3. Seja o ponto  $P \in \mathbb{D}^2$  arbitrário e seja  $h$  uma reta hiperbólica tal que  $h$  não incide sobre  $P$ , cuja existência é garantida pela Afirmação 2. Pela Proposição 3.3,  $h$  incide sobre pelo menos dois pontos distintos, digamos  $A$  e  $B$ . Considere a reta hiperbólica  $\overline{AP} = h_1$  e a reta hiperbólica  $\overline{BP} = h_2$ . Se  $h_1 = h_2$ , então  $\{A, B\} \subset h_1$ , resultando do Teorema 3.3 que  $h_1 = h$ , e, consequentemente,  $P \in h$ , o que é absurdo. Assim,  $h_1$  e  $h_2$  são retas distintas que incidem sobre  $P$ . Da arbitrariedade na escolha de  $P$ , conclui-se que qualquer ponto é incidente a duas retas distintas.
4. Seja o ponto  $P \in \mathbb{D}^2$  arbitrário e seja  $h$  uma reta hiperbólica tal que  $h$  não incide sobre  $P$ , cuja existência é garantida pela Afirmação 2. Pela Proposição 3.3,  $h$  é incidente sobre pelo menos dois pontos distintos,  $Q$  e  $R$ . Como  $P \notin h$ , pela Proposição 3.1,  $h$  é a única reta que passa por  $Q$  e  $R$ , então, os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  não são colineares. Da arbitrariedade da escola de  $P$ , conclui-se que cada ponto  $P \in \mathbb{D}^2$  existem dois pontos  $Q$  e  $R$  tais que  $P$ ,  $Q$  e  $R$  não são colineares.

## 3.4 AXIOMAS DE ORDEM

**Proposição 3.4** *O Modelo de Poincaré satisfaz o Axioma O1, O2 e O3*

### DEMONSTRAÇÃO



A demonstração que o Disco de Poincaré satisfaz os Axiomas O1 e O3 decorre da Definição 3.2, Página 60.

Vamos provar que o Disco de Poincaré satisfaz o Axioma O2, sejam os pontos  $A, C \in \mathbb{D}^2$ , a reta hiperbólica  $r = \overline{AC}$  gerada pela circunferência  $\alpha_r$  com centro em  $O_1$  e  $Z_1, Z_2$  pontos de interseção entre  $\alpha_r, \varphi$ , com  $Z_1$  mais próximo de  $C$  do que  $A$ . Traçando o segmento euclidiano  $\overline{CZ_1}$ , podemos determinar um ponto  $P$  que está entre  $C$  e  $Z_1$  no  $\mathbb{E}_\infty$ . A semirreta euclidiana  $\overrightarrow{O_1P}$  interceta  $\alpha_r$  em um ponto  $B$ , interior a  $\varphi$ . Temos, então, que  $B \in \mathbb{D}^2$  é um ponto pertencente a reta hiperbólica  $r$  e, no  $\mathbb{E}_\infty$ ,  $C$  é um ponto do ângulo  $\angle AO_1B$ , pela Definição 3.2,  $A * C * B$ , assim, o Disco de Poincaré satisfaz o Axioma O2.

**Definição 3.10** *A semirreta de vértice, ou origem,  $A$  que passa por  $B$ , que denotamos por  $\overrightarrow{AB}$ , é o conjunto formado pelo segmento de reta  $[AB]$  e pelos pontos  $P \in \mathbb{D}^2$  tais que  $A * B * P$ , isto é*

$$\overrightarrow{AB} = [AB] \cup \{P \in \mathbb{D}^2 \mid A * B * P\}$$

**Proposição 3.5** *O Modelo de Disco de Poincaré satisfaz o Axioma O4.*

#### DEMONSTRAÇÃO

Considere, a menos que seja necessário uma reflexão, os pontos distintos  $A, B, C \in \mathbb{D}^2 \setminus \{O\}$ , não colineares dois a dois com o ponto  $O$ , no  $\mathbb{E}_\infty$ , e não pertencentes a uma mesma reta hiperbólica e as retas hiperbólicas  $r = \overline{AB}, s = \overline{AC}, t = \overline{BC}$  geradas pelas circunferências  $\alpha_r, \alpha_s, \alpha_t$ , respectivamente. Sem perda de generalidade, considere a Figura 74.

Tome um ponto  $P$  do segmento hiperbólico  $[AC]$ , seja  $h$  uma reta hiperbólica que incide em  $P$ . A menos de uma reflexão, se  $h$  for gerada por uma circunferência  $\alpha_h$ , pelo Corolário 2.2,  $\alpha_h$  passa pelo ponto  $P'$ , inverso de  $P$  em relação a  $\varphi$ . Diante do exposto, a menos que  $\alpha_h, \alpha_r$  sejam coincidentes,  $\alpha_h$  tem pontos no interior de  $\alpha_r$ . Temos ainda que entre  $P, P'$  há pontos dos arcos que representam os segmento hiperbólicos  $[AB], [BC]$ , deste modo, a reta hiperbólica  $h$  intercetará  $[AB]$  ou  $[BC]$ , ver Figura 75.

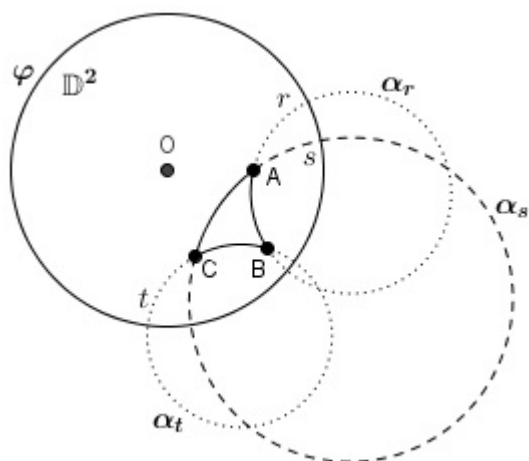


Figura 74 –  $A, B, C$  formam segmentos hiperbólicos não pertencentes a uma mesma reta hiperbólica.

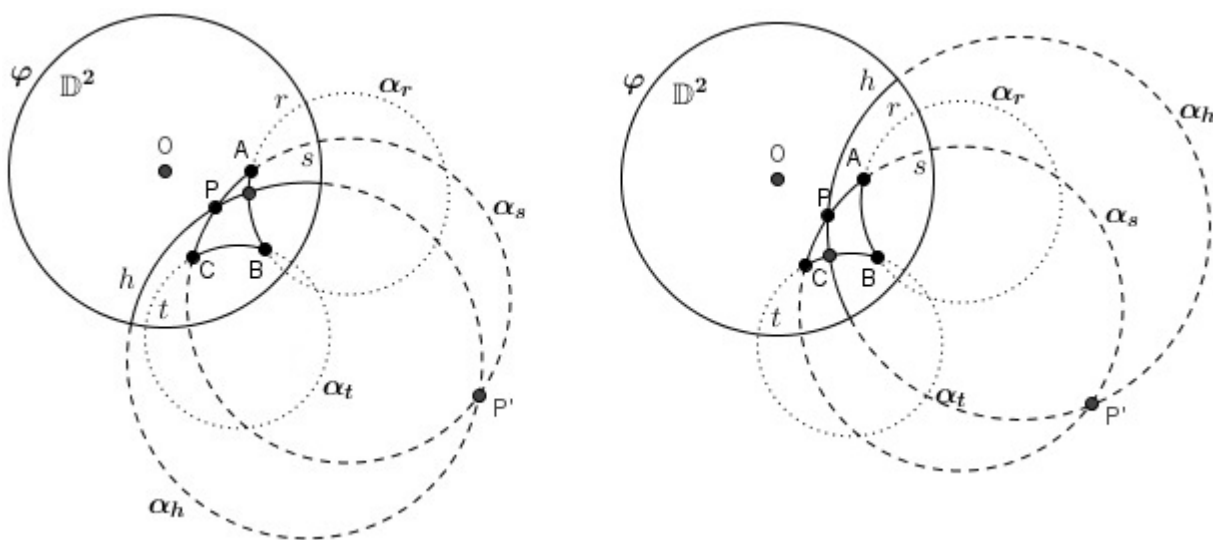


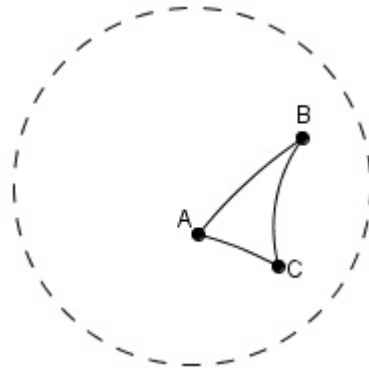
Figura 75 – O Modelo de Disco de Poincaré satisfaz o Axioma O4

**Definição 3.11** *Sejam os pontos  $A, B, C \in \mathbb{D}^2$  não colineares. O conjunto*

$$\Delta ABC = [AB] \cup [BC] \cup [AC]$$

*é designado por triângulo de vértices  $A, B$  e  $C$  ou lados  $[AB], [BC]$  e  $[AC]$ . Os ângulos  $\angle ABC, \angle BCA$  e  $\angle CAB$  designam-se ângulos internos do triângulo  $\Delta ABC$ , sendo o ângulo que se opõe, ou oposto, a um dos lados de  $\Delta ABC$  aquele que é formado pelas semirretas que contém os outros dois lados.*

Na Figura 76, por exemplo, o ângulo oposto ao lado  $[AB]$  é  $\angle ACB$  pois a semirreta que contém o segmento de reta  $[AB]$  não é um de seus lados.

Figura 76 – Triângulo  $\triangle ABC$ 

Vale salientar as anotações  $[ABC]$ ,  $[BAC]$ , etc se referem ao mesmo triângulo, cujos vértices são  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Sempre que escrevermos  $[ABC]$  ou  $\angle ABC$  pressupomos que  $A, B, C \in \mathbb{D}^2$  são três pontos não colineares.

Decorre de imediato da Proposição 3.5 que, no Disco de Poincaré, uma reta hiperbólica  $h$  que não incide em nenhum dos vértices do triângulo  $\triangle ABC$  intersesta no máximo em dois lados do triângulo  $\triangle ABC$ . Se a reta hiperbólica  $h$  incide em nenhum dos vértices e nem intersesta dois lados do triângulo  $\triangle ABC$ , então,  $h$  não intersesta em nenhum dos três lados do triângulo  $\triangle ABC$ , ou seja, não intersesta o triângulo. Consequentemente, se uma reta hiperbólica  $h$  que não incide em nenhum dos vértices do triângulo  $\triangle ABC$  intersesta dois lados ou nenhum dos três lados do triângulo  $\triangle ABC$ , ver Figura 77.

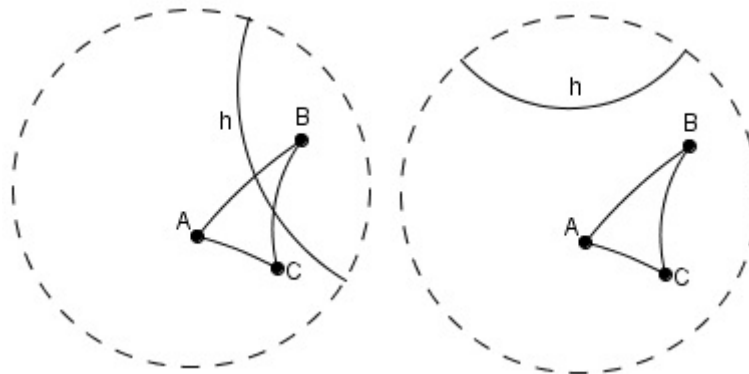


Figura 77 – Posições relativas entre reta hiperbólica e triângulo hiperbólico

Decorre de imediato que o interior de um segmento de reta não é um conjunto vazio.

O Teorema seguinte estabelece uma relação entre dois pontos e uma reta no  $\mathbb{D}^2$ , dando significado as expressões "os pontos  $P$  e  $Q$  estão do mesmo lado da reta  $r$ " e "os pontos  $P$  e  $Q$

estão em lados opostos relativamente à reta  $r$ ".

**Teorema 3.3** *Para cada reta  $r$  do  $\mathbb{D}^2$  existem dois subconjuntos não vazios do  $\mathbb{D}^2$ , que denotaremos por  $\mathbb{D}_1^2$  e  $\mathbb{D}_2^2$ , tais que:*

1.  $\mathbb{D}^2 \setminus r = \mathbb{D}_1^2 \cup \mathbb{D}_2^2$ , ver Figura 78;

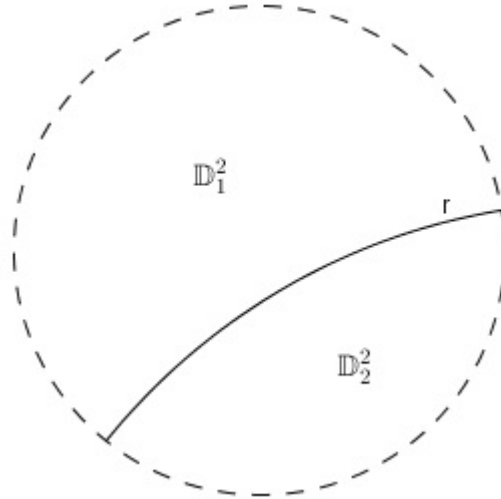


Figura 78 –  $\mathbb{D}^2 \setminus r = \mathbb{D}_1^2 \cup \mathbb{D}_2^2$

2. *Dois pontos distintos  $A, B \in \mathbb{D}^2 \setminus r$  pertencem ao mesmo conjunto,  $\mathbb{D}_1^2$  ou  $\mathbb{D}_2^2$ , se e só se  $[AB]$  não interseca  $r$ , ver Figura 79;*

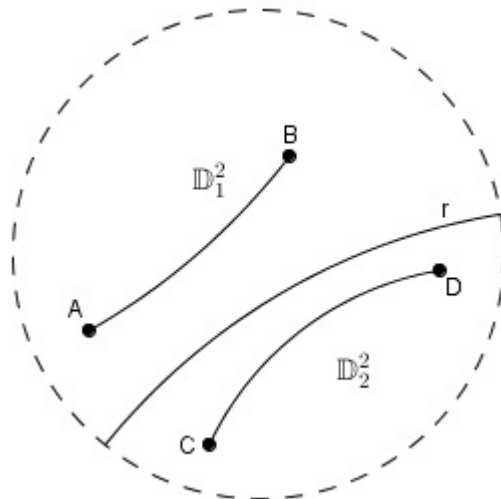


Figura 79 –  $A, B \in \mathbb{D}_1^2$  e  $C, D \in \mathbb{D}_2^2$

3. Dois pontos,  $A, C \in \mathbb{D}^2 \setminus r$  pertencem a diferentes conjuntos, um ponto pertence a  $\mathbb{D}_1^2$  e o outro ponto pertence a  $\mathbb{D}_2^2$ , se e só se  $[AC]$  interseca  $r$ , ver Figura 80.

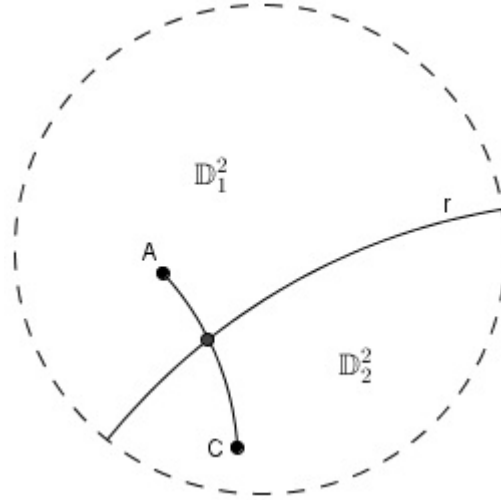


Figura 80 –  $A$  e  $C$  pertencem a conjuntos diferentes.

Os conjuntos  $\overline{\mathbb{D}_1^2} = \mathbb{D}_1^2 \cup r$  e  $\overline{\mathbb{D}_2^2} = \mathbb{D}_2^2 \cup r$  serão chamados de **semiplanos**, diremos que os pontos  $A$  e  $B$  **estão do mesmo lado da reta**  $r$  se e só se acontecer o ponto 2 do Teorema 3.3 e diremos que os pontos  $A$  e  $B$  **estão em lados opostos relativamente à reta**  $r$  se e só se acontecer o ponto 3 do Teorema 3.3.

## 3.5 AXIOMAS DE CONGRUÊNCIAS

Emprega-se a palavra CONGRUÊNCIAS, CONGRUENTE ou CÔNGRUO relativamente a figuras geométricas, para expressar noções corrigueiras de **igualdade**. Deste modo, menciona-se congruência entre retas, ou entre ângulos. Entretanto, é comum utilizar o termo "igual" quando o rigor exige "congruente". Assim, definiremos uma distância no plano hiperbólico  $\mathbb{D}^2$ . Por simplicidade, usaremos para "congruência" e "igual" o mesmo sinal.

### 3.5.1 DISTÂNCIA HIPERBÓLICA

Uma *distância* no plano  $\mathbb{D}^2$  é uma função  $d : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que possui as seguintes propriedades para quaisquer pontos  $A, B, C \in \mathbb{D}^2$ :

- (a) Positiva Definida:  $d(A, B) \geq 0$  e  $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ ;

(b) Simétrica:  $d(A, B) = d(B, A)$ ;

(c) Desigualdade Triangular:  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ .

Assim, iremos definir uma distância em  $\mathbb{D}^2$  chamada de *Distância Hiperbólica* e estabelecemos que a medida do segmento  $[AB]$  é a distância entre os pontos  $A$  e  $B$ .

Para seu modelo, Poincaré propôs a seguinte métrica:

Sejam os pontos  $A, B \in \mathbb{D}^2$  e  $Z_1$  e  $Z_2$  pontos ideais da reta hiperbólica  $\overline{AB}$ , com  $Z_1$  mais próximo de  $B$  do que de  $A$ , no  $\mathbb{E}_\infty$ , ver Figura 81. A distância entre os pontos  $A$  e  $B$ , denotado por  $d(A, B)$ , é

$$d(A, B) = |\ln(A, B, Z_1, Z_2)|$$

onde  $\ln$  é o logaritmo natural ou neperiano e  $(A, B, Z_1, Z_2)$  é a razão cruzada dos pontos  $A$  e  $B$ , se a reta hiperbólica  $\overline{AB}$  for um diâmetro de  $\varphi$ , do contrário é a razão circular, em relação a  $Z_1$  e  $Z_2$ .

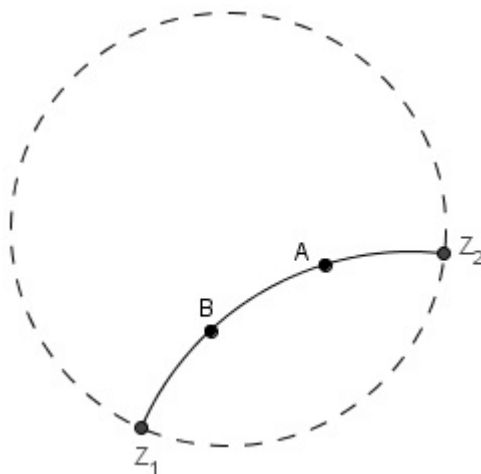


Figura 81 – Reta  $\overline{AB}$  com pontos ideais  $Z_1$  e  $Z_2$

Precisamos mostrar se a função  $d$  está bem definida, pois foram feitas escolhas aleatória dos índices dos pontos ideais, afinal, estamos determinando o logaritmo de um número sem saber se ele é estritamente positivo.

Como os pontos  $B, Z_1$  e  $Z_2$  são distintos dois a dois, temos que a razão cruzada  $(A, B, Z_1, Z_2)$  está bem definida.

(a) Pelo Teorema 2.3, se  $A \neq B$  a razão cruzada  $(A, B, Z_1, Z_2) > 1 \Rightarrow |\ln(A, B, Z_1, Z_2)| > 0$

Suponha que  $A = B$ , então

$$A = B \Leftrightarrow (A, B, Z_1, Z_2) = 1 \Leftrightarrow |\ln(A, B, Z_1, Z_2)| = 0$$

- (b) Suponha  $A \neq B$ , temos que  $(A, B, Z_1, Z_2) = (B, A, Z_1, Z_2)^{-1}$ . Por outro lado, para todo  $t > 0$ ,  $lnt^{-1} = -lnt$ . Assim,  $d(A, B)$  não depende da ordem de escolha dos pontos ideais  $Z_1$  e  $Z_2$ . Então,  $d(A, B) = d(B, A)$ .
- (c) Antes de provar que a distância de Poincaré satisfaz a desigual, vamos provar que a Reflexão numa reta no  $\mathbb{D}^2$  é uma isometria.

### 3.5.1.1 ISOMETRIA NO $\mathbb{D}^2$

A seguir, definiremos os requisitos necessários para que uma aplicação, no  $\mathbb{D}^2$ , seja classificada como isometria.

**Definição 3.12** *Seja uma aplicação  $T : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ , diremos que  $T$  é uma isometria se:*

- (a)  *$T$  é uma função biunívoca;*
- (b) *para todo  $A, B \in \mathbb{D}^2$ ,  $d(A, B) = d(T(A), T(B))$ ;*
- (c)  *$T$  é uma aplicação conforme.*

**Proposição 3.6** *Considere  $A, A' \in \mathbb{D}^2$  pontos simétricos em relação a uma reta hiperbólica  $r$ , para todo ponto  $M \in r$ ,  $d(A, M) = d(M, A')$ .*

### DEMONSTRAÇÃO

- a) Observando a Figura 82, no  $\mathbb{D}^2$ ,  $A$  é reflexo de  $A'$  em relação a reta  $r$  que passa por  $O$ ,  $M$  é um ponto da reta  $r$ ,  $Z_1$  e  $Z_2$  são pontos ideais da reta  $\overline{AM}$ ,  $Z_3$  e  $Z_4$  são pontos ideais da reta  $\overline{MA'}$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são circunferências que determinam as retas  $\overline{MA'}$  e  $\overline{AM}$ , respectivamente, no  $\mathbb{D}^2$ , e  $M'$  é o inverso de  $M$  em relação a circunferência  $\varphi$  que determina o plano hiperbólico  $\mathbb{D}^2$ .

No plano  $\mathbb{E}_\infty$ , a reflexão em relação a reta, os pontos que estão sobre a reta de reflexão são reflexos de si mesmo, ou seja, a reflexão do ponto  $M$  é o próprio  $M$  e o de  $M'$  é o próprio  $M'$ . Além disso, a reflexão em relação a uma reta associa uma circunferência a uma circunferência com mesmo raio.

Temos que a circunferência  $\varphi$  é simétrica a si mesma em relação a  $r$ , pois  $r$  passa pelo centro de  $\varphi$  dividindo-a em duas semicircunferências que são simétricas em relação a  $r$ . Além disso,  $\alpha$  passa por três pontos simétricos a três pontos de  $\beta$ , então,  $\alpha$  e  $\beta$  são simétricos em relação a  $r$ . Por fim,  $Z_1, Z_2 \in \varphi \cap \beta$  e  $Z_3, Z_4 \in \varphi \cap \alpha$ , então, podemos afirmar que  $Z_1$  e  $Z_2$  são simétricos, respectivamente, a  $Z_4$  e  $Z_3$ , em

relação a  $r$ . Como reflexão em relação a uma reta é uma isometria, então, conserva distância, logo:

$$\begin{aligned} AZ_1 &= A'Z_4 \\ AZ_2 &= A'Z_3 \\ MZ_2 &= MZ_3 \\ MZ_1 &= MZ_4 \end{aligned} \Rightarrow \frac{AZ_1}{MZ_1} \cdot \frac{MZ_2}{AZ_2} = \frac{MZ_3}{A'Z_3} \cdot \frac{A'Z_4}{MZ_4} \Rightarrow d(A, M) = d(M, A')$$

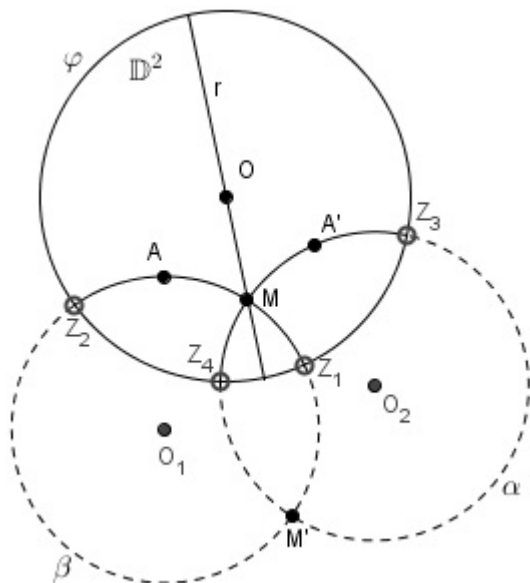


Figura 82 – Reflexão se o eixo passa por  $O$

- b) Observando a Figura 83, os pontos  $A$  e  $A'$  são inversos em relação a circunferência  $\alpha_r$ ,  $M$  é um ponto arbitrário de  $r$ ,  $M'$  é o inverso de  $M$  em relação a circunferência  $\varphi$ , o arco  $r$  divide  $\varphi$  em dois arcos,  $s$  e  $t$ ,  $\beta$  e  $\rho$  são circunferências que determinam, respectivamente, as retas  $\overline{AM}$  e  $\overline{MA'}$ , no  $\mathbb{D}^2$ , os pontos  $Z_1$  e  $Z_2$  são pontos ideais da reta hiperbólica  $\overline{AM}$  e  $Z_3$  e  $Z_4$  são pontos ideais da reta hiperbólica  $\overline{MA'}$ .

Considerando  $\alpha_r$  como a circunferência de inversão, temos que o inverso do ponto  $M$  é o próprio  $M$ , assim como o inverso de  $M'$  é o próprio  $M'$  e, por hipótese, os pontos  $A$  e  $A'$  são inversos. Como a circunferência  $\rho$  passa por  $A, M$  e  $M'$ , o seu inverso,  $\rho'$ , passará pelos inversos destes pontos,  $A', M$  e  $M'$ , respectivamente. Pelo Teorema 2.5 Alínea  $c$ , Página 53, o inverso de  $\rho$ ,  $\rho'$ , é uma circunferência que não passa por  $O_1$ . Como três pontos determinam uma única circunferência<sup>5</sup> e a circunferência  $\beta$  passa pelos pontos  $A', M$  e  $M'$ , então,  $\rho' = \beta$ .

As circunferências  $\varphi, \beta$  interseam nos pontos  $Z_1, Z_2$ , pelo Corolário ??, Página ??,  $\varphi', \beta'$ , inversos de  $\varphi, \beta$ , interseam nos pontos  $Z'_1, Z'_2$ , inversos dos pontos  $Z_1, Z_2$ .

<sup>5</sup> Procurar referência!





$$\overline{MO_1} = \frac{\overline{MZ_1}}{\overline{MZ_4}} \cdot \frac{\overline{A'Z_4}}{\overline{AZ_1}} \cdot \overline{O_1A} \Rightarrow \frac{\overline{MO_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{MZ_1}}{\overline{MZ_4}} \cdot \frac{\overline{A'Z_4}}{\overline{AZ_1}} \quad (3.3)$$

Pela semelhança entre os triângulos  $\triangle MO_1Z_2$  e  $\triangle MO_1Z_3$ , temos

$$\frac{\overline{MZ_3}}{\overline{MZ_2}} = \frac{\overline{MO_1}}{\overline{Z_2O_1}} \Rightarrow \overline{MO_1} = \frac{\overline{MZ_3}}{\overline{MZ_2}} \cdot \overline{Z_2O_1} \quad (3.4)$$

Analogamente, pela semelhança dos triângulos  $\triangle AO_1Z_2$  e  $\triangle A'O_1Z_3$ , temos

$$\overline{Z_2O_1} = \frac{\overline{AZ_2}}{\overline{A'Z_3}} \cdot \overline{O_1A'} \quad (3.5)$$

Pelas Igualdades 3.4 e 3.5, temos

$$\overline{MO_1} = \frac{\overline{MZ_3}}{\overline{MZ_2}} \cdot \frac{\overline{AZ_2}}{\overline{A'Z_3}} \cdot \overline{O_1A'} \Rightarrow \frac{\overline{MO_1}}{\overline{O_1A'}} = \frac{\overline{MZ_3}}{\overline{MZ_2}} \cdot \frac{\overline{AZ_2}}{\overline{A'Z_3}} \quad (3.6)$$

Como  $\overline{O_1M}$  é raio da circunferência  $\alpha_r$ , então, temos

$$\overline{O_1M}^2 = \overline{O_1A} \cdot \overline{O_1A'} \Rightarrow \frac{\overline{O_1M}}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1M}}$$

Das Igualdades 3.3 e 3.6, temos

$$\frac{\overline{MZ_1}}{\overline{MZ_4}} \cdot \frac{\overline{A'Z_4}}{\overline{AZ_1}} = \left( \frac{\overline{MZ_3}}{\overline{MZ_2}} \cdot \frac{\overline{AZ_2}}{\overline{A'Z_3}} \right)^{-1} \Rightarrow \frac{\overline{MZ_1}}{\overline{MZ_4}} \cdot \frac{\overline{A'Z_4}}{\overline{AZ_1}} = \frac{\overline{MZ_2}}{\overline{MZ_3}} \cdot \frac{\overline{A'Z_3}}{\overline{AZ_2}} \quad (3.7)$$

Pela Igualdade 3.7, temos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AZ_1}}{\overline{MZ_1}} \cdot \frac{\overline{MZ_2}}{\overline{AZ_2}} &= \frac{\overline{MZ_3}}{\overline{A'Z_3}} \cdot \frac{\overline{A'Z_4}}{\overline{MZ_4}} \Rightarrow \\ (A, M, Z_1, Z_2) &= (M, A', Z_3, Z_4) \Rightarrow \ln(A, M, Z_1, Z_2) = \ln(M, A', Z_3, Z_4) \end{aligned}$$

Assim, provamos que, para todo  $M \in r$ ,  $d(A, M) = d(A', M)$ .

**Teorema 3.4** *A Reflexão em relação a uma reta no plano  $\mathbb{D}^2$  é uma Isometria*

Considere, no plano  $\mathbb{D}^2$ , a reta  $r$  e os pontos  $A, B, C$  reflexos, respectivamente, dos pontos  $A', B', C'$  em relação a reta  $r$ .

Se a reta hiperbólica  $r$  é um diâmetro de  $\varphi$ , então já tá provado, pois a reflexão em relação a uma reta no plano  $\mathbb{E}_\infty$  é uma isometria<sup>6</sup>. Então, vamos considerar que  $r$  é uma reta hiperbólica gerada por uma circunferência  $\alpha_r$ .

Pela Definição de Ponto Inverso em relação a uma circunferência (Definição 2.5, Página 36) a reflexão em relação a uma reta hiperbólica é uma função biunívoca, pois, os pontos simétricos em relação a reta hiperbólica  $r$  são inversos em relação à circunferência  $\alpha_r$ , ver Figura 84.

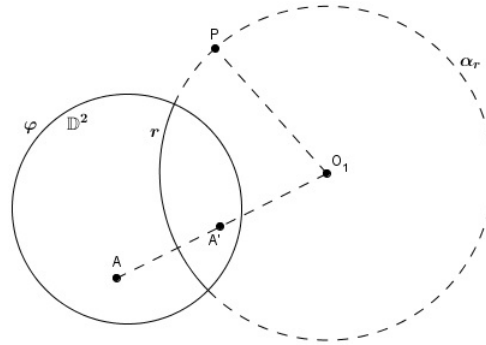


Figura 84 –  $A$  é reflexo de  $A'$  e  $A'$  é reflexo de  $A$ , a reflexão é uma função biunívoca

Vamos considerar a reta hiperbólica  $\overline{AB}$  com pontos ideais  $Z_1$  e  $Z_2$  e a reta hiperbólica  $\overline{A'B'}$  com pontos ideais  $Z'_1$  e  $Z'_2$ , temos que os pontos  $A, B, Z_1$  e  $Z_2$  são inversos aos pontos  $A', B', Z'_1$  e  $Z'_2$  em relação a circunferência  $\alpha_r$ , ver Figura 85.

Assim, no  $\mathbb{E}_\infty$ , temos a relação

$$\overline{O_1A} \cdot \overline{O_1A'} = \overline{O_1Z_1} \cdot \overline{O_1Z'_1} \Rightarrow \frac{O_1A}{O_1Z'_1} = \frac{O_1Z_1}{O_1A'}$$

como o ângulo  $\angle AO_1Z_1$  é comum, então os triângulos  $\triangle O_1AZ_1$  e  $\triangle O_1A'Z'_1$  são semelhantes. De forma análoga, podemos mostrar que os triângulos  $\triangle O_1BZ_1$  e  $\triangle O_1B'Z'_1$  são semelhantes, logo,

$$\frac{AZ_1}{BZ_1} = \frac{A'Z'_1}{B'Z'_1}$$

Fazendo processo idêntico, também podemos mostrar que  $\frac{BZ_2}{AZ_2} = \frac{B'Z'_2}{A'Z'_2}$ , então

$$\frac{AZ_1}{BZ_1} \cdot \frac{BZ_2}{AZ_2} = \frac{A'Z'_1}{B'Z'_1} \cdot \frac{B'Z'_2}{A'Z'_2} \Rightarrow d(A, B) = d(A', B')$$

Portanto, no  $\mathbb{D}^2$ , a reflexão em relação a uma reta conserva a distância. Por fim, no  $\mathbb{E}_\infty$ , a inversão em relação a uma circunferência é uma aplicação conforme, ou seja, preserva

<sup>6</sup> Ver (FLORENCIO, 2011, Pag. 16-19)

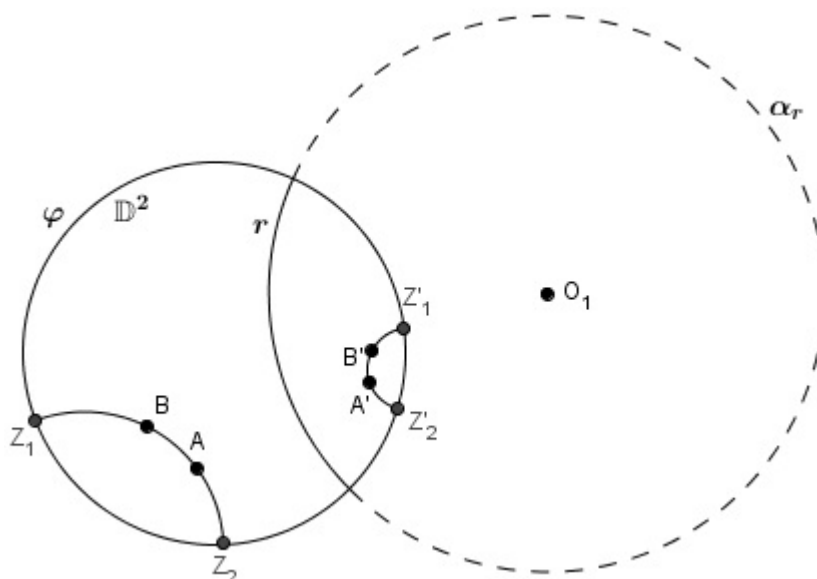


Figura 85 – os pontos  $A, B, Z_1$  e  $Z_2$  são inversos aos pontos  $A', B', Z'_1$  e  $Z'_2$  em relação a circunferência  $\alpha_r$ .

o ângulo formado entre retas e circunferências, logo, no  $\mathbb{D}^2$ , a reflexão em relação a uma reta também é uma função conforme. Assim, mostramos que a reflexão em relação a uma reta no plano  $\mathbb{D}^2$  é uma isometria.

**Definição 3.13** Tomemos os pontos  $A, A', M \in \mathbb{D}^2$  tal que  $A * M * A'$ . Dizemos que  $M$  é **ponto médio hiperbólico** de  $[AA']$  se  $d(A, M) = d(M, A')$ .

**Proposição 3.7** Se os pontos  $A, A' \in \mathbb{D}^2$  são simétricos em relação a uma reta hiperbólica  $r$ , então  $r$  intersecta o segmento hiperbólico  $[AA']$  no ponto médio de  $[AA']$ .

#### DEMONSTRAÇÃO

Seja  $M \in \mathbb{D}^2$  o ponto de interseção entre  $r, [AA']$ . Como  $A * M * A'$ , então

$$d(A, A') = d(A, M) + d(M, A')$$

Como  $M \in r$ , temos

$$d(A, M) = d(M, A')$$

Portanto,

$$d(A, M) = d(M, A') = \frac{d(A, A')}{2}$$

**Proposição 3.8** Se os pontos  $A, A' \in \mathbb{D}^2$  são simétricos em relação a uma reta hiperbólica  $r$ , então  $r$  é perpendicular à reta hiperbólica  $\overline{AA'}$

## DEMONSTRAÇÃO

A menos que necessite de uma reflexão, vamos tomar  $A, A'$  colineares com  $O$ , no  $\mathbb{E}_\infty$ , então a reta hiperbólica  $\overline{AA'}$  é um diâmetro de  $\varphi$  determinado por uma reta euclidiana  $\tau$  e a reta hiperbólica  $r$  é gerada por uma circunferência  $\alpha_r$ . Como  $A, A'$  são inversos em relação a  $r$ , então,  $\tau$  incide no centro de  $\alpha$ , portanto,  $\tau$  é ortogonal a  $\alpha_r$  e, conseqüentemente, as retas hiperbólicas  $\overline{AA'}$  e  $r$  são perpendiculares, de forma análoga provamos que se  $\overline{AA'}$  é gerada por uma circunferência  $\alpha$  e  $r$  é um diâmetro de  $\varphi$  então  $\overline{AA'}$  e  $r$  são perpendiculares, ver Figura 86.

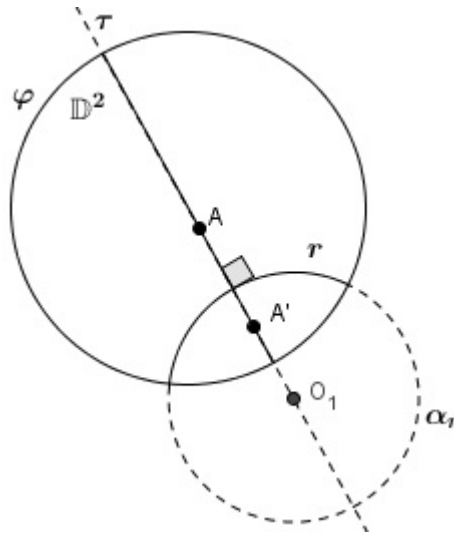


Figura 86 –  $\overline{AA'}$  é uma reta hiperbólica que passa por  $O$  e é perpendicular a  $r$ .

Se as retas hiperbólicas  $\overline{AA'}, r$  são diâmetros de  $\varphi$ , pela definição de reflexão em uma reta, no  $\mathbb{E}_\infty$ ,  $\overline{AA'}, r$  são perpendiculares, ver Figura 87.

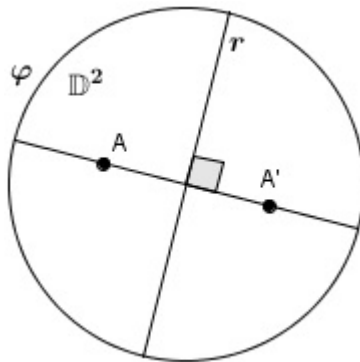


Figura 87 –  $\overline{AA'}, r$  são retas hiperbólicas que passam por  $O$  e são perpendiculares.

Considerando que as retas hiperbólicas  $\overline{AA'}, r$  são geradas pelas circunferências  $\alpha, \alpha_r$ , respectivamente, como  $A, A'$  são inversos em relação a  $\alpha_r$  no  $\mathbb{E}_\infty$  e  $\alpha$  passa por  $A, A'$ , pelo

Teorema 2.4,  $\alpha, \alpha_r$  são ortogonais, então, as retas hiperbólicas  $\overline{AA'}$ ,  $r$  são perpendiculares no  $\mathbb{D}^2$ , ver Figura 88.

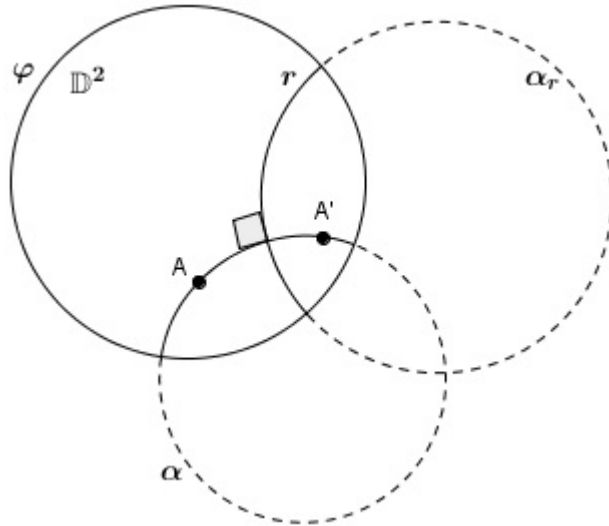


Figura 88 –  $\overline{AA'}$ ,  $r$  são retas hiperbólicas que não passam por  $O$  e são perpendiculares.

**Definição 3.14** Chamaremos de **mediatriz** no  $\mathbb{D}^2$  do segmento hiperbólico  $[AB]$  a reta que é perpendicular a  $[AB]$  e passa pelo seu ponto médio.

Pela Definição 3.14, a reta hiperbólica de reflexão dos pontos  $A, B \in \mathbb{D}^2$  é a mediatriz do segmento hiperbólico  $[AB]$  e, além disso, os extremos de um segmento hiperbólico são equidistantes de qualquer ponto de sua mediatriz.

### 3.5.1.2 A DISTÂNCIA DE POINCARÉ SATISFAZ A DESIGUALDADE TRIANGULAR

Vamos considerar dois casos para provar que a distância hiperbólica satisfaz a desigualdade triangular.

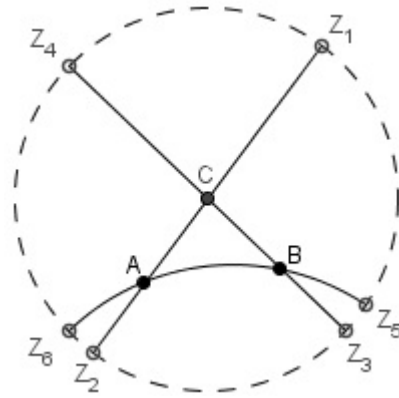
Caso I- Considere um ponto  $C$  tal que  $A * C * B$ . Assim,

$$d(A, B) = |\ln(A, B, Z_1, Z_2)| = |\ln[(A, C, Z_1, Z_2) \cdot (C, B, Z_1, Z_2)]| = |\ln(A, C, Z_1, Z_2)| + |\ln(C, B, Z_1, Z_2)| = d(A, C) + d(C, B)$$

Caso II- Os pontos  $A, B$  e  $C$  não são colineares no plano  $\mathbb{D}^2$ . A menos que seja necessário uma reflexão, vamos considerar  $C$  o centro de  $\varphi$ , ver Figura 89.

Temos

$$(A, C, Z_1, Z_2) = \frac{AZ_1}{CZ_1} \cdot \frac{CZ_2}{AZ_2}$$

Figura 89 –  $C$  é o centro da circunferência

Como  $C$  é o centro da circunferência, então  $CZ_1 = CZ_2 = 1$ , assim

$$(A, C, Z_1, Z_2) = \frac{AZ_1}{AZ_2}$$

A menor distância entre o ponto  $A$  e a circunferência é a medida do segmento euclidiano  $AZ_2$ , logo,  $AZ_2 < AZ_6$ . Por outro lado, a medida de  $AZ_1$  é a maior distância entre o ponto  $A$  e a circunferência, logo  $AZ_1 > AZ_5$ , assim

$$(A, C, Z_1, Z_2) = \frac{AZ_1}{AZ_2} > \frac{AZ_5}{AZ_6}$$

De forma semelhante, também provamos que  $(C, B, Z_3, Z_4) = \frac{BZ_4}{BZ_3} > \frac{BZ_6}{BZ_5}$ , temos

$$(A, C, Z_1, Z_2) \cdot (C, B, Z_3, Z_4) = \frac{AZ_1}{AZ_2} \cdot \frac{BZ_4}{BZ_3} > \frac{AZ_5}{AZ_6} \cdot \frac{BZ_6}{BZ_5} = (A, B, Z_5, Z_6)$$

Por fim,

$$\begin{aligned} d(A, C) + d(C, B) &= \ln(A, C, Z_1, Z_2) + \ln(C, B, Z_3, Z_4) = \\ &= \ln[(A, C, Z_1, Z_2) \cdot (C, B, Z_3, Z_4)] > \ln(A, B, Z_5, Z_6) = d(A, B) \end{aligned}$$

Portanto, dados os pontos  $A, B, C \in \mathbb{D}^2$

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

**Proposição 3.9** *Considere os pontos  $A, B, A', B' \in \mathbb{D}^2$  se  $d(A, B) = d(A', B')$  então  $[AB] = [A'B']$ .*

## DEMONSTRAÇÃO

Sejam  $Z_1, Z_2$  pontos ideais da reta hiperbólica  $\overline{AB}$  e  $Z'_1, Z'_2$  pontos ideais da reta hiperbólica  $\overline{A'B'}$ , então

$$d(A, B) = d(A', B') \Rightarrow |\ln(A, B, Z_1, Z_2)| = |\ln(A', B', Z'_1, Z'_2)| \Rightarrow \ln(A, B, Z_1, Z_2) = \pm \ln(A', B', Z'_1, Z'_2)$$

$$\text{Se } \ln(A, B, Z_1, Z_2) = \ln(A', B', Z'_1, Z'_2) \Rightarrow (A, B, Z_1, Z_2) = (A', B', Z'_1, Z'_2)$$

$$\text{Se } \ln(A, B, Z_1, Z_2) = -\ln(A', B', Z'_1, Z'_2) \Rightarrow \ln(A, B, Z_1, Z_2) = \ln(A', B', Z'_1, Z'_2)^{-1} \Rightarrow (A, B, Z_1, Z_2) = (A', B', Z'_1, Z'_2)^{-1} \Rightarrow (A, B, Z_1, Z_2) = (A', B', Z'_2, Z'_1)$$

Assim, se dois segmentos hiperbólicos tem a mesma distância hiperbólica dizemos que eles são congruentes.

## 3.5.2 CIRCUNFERÊNCIA HIPERBÓLICA

Vamos contruir uma circunferência no Modelo de Poincaré utilizando a definição de circunferência no plano euclidiano, que é o 3º Postulado de Euclides, apresentado com uma linguagem moderna.

**Definição 3.15** *Seja o ponto  $C \in \mathbb{D}^2$  e uma distância hiperbólica  $\rho$ , chamaremos de **circunferência hiperbólica** o conjunto formado por todos os pontos que estão a uma distância  $\rho$  do ponto  $C$ . Assim,  $C$  é o centro hiperbólico e  $\rho$  é o raio hiperbólico.*

Se o ponto  $P \in \mathbb{D}^2$  pertence a circunferência hiperbólica  $\alpha$  com centro hiperbólico  $C$ , então, o raio hiperbólico  $\rho = d(C, P)$  ou podemos dizer que o raio hiperbólico de  $\alpha$  é  $[CP]$ .

Vamos considerar um ponto  $P \in \mathbb{D}^2$  tal que  $P \neq O$ . Assim, teremos uma distância não-nula  $\rho = d(O, P)$ . Tome  $P_0$  tal que  $d(O, P) = d(O, P_0)$ , ver Figura 90, assim, temos

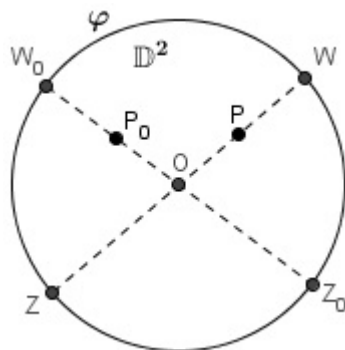


Figura 90 –  $P_0, P$  são equidistantes de  $O$  no  $\mathbb{D}^2$



$$d(O, P) = d(O, P_0) \Rightarrow \left| \ln \left( \frac{\overline{PZ}}{\overline{OZ}} \cdot \frac{\overline{OW}}{\overline{PW}} \right) \right| = \left| \ln \left( \frac{\overline{P_0Z_0}}{\overline{OZ_0}} \cdot \frac{\overline{OW_0}}{\overline{P_0W_0}} \right) \right| \Rightarrow$$

$$\left( \frac{\overline{PZ}}{\overline{OZ}} \cdot \frac{\overline{OW}}{\overline{PW}} \right) = \left( \frac{\overline{P_0Z_0}}{\overline{OZ_0}} \cdot \frac{\overline{OW_0}}{\overline{P_0W_0}} \right)$$

Como  $\overline{OW} = \overline{OZ} = \overline{OW_0} = \overline{OZ_0} = 1$ , então

$$\frac{\overline{PZ}}{\overline{PW}} = \frac{\overline{P_0Z_0}}{\overline{P_0W_0}}$$

Temos  $\overline{PZ} = 1 + \overline{OP}$ ,  $\overline{PW} = 1 - \overline{OP}$ ,  $\overline{P_0Z_0} = 1 + \overline{OP_0}$  e  $\overline{P_0W_0} = 1 - \overline{OP_0}$ , assim

$$\frac{1 + \overline{OP}}{1 - \overline{OP}} = \frac{1 + \overline{OP_0}}{1 - \overline{OP_0}} \Rightarrow (1 + \overline{OP}) \cdot (1 - \overline{OP_0}) = (1 + \overline{OP_0}) \cdot (1 - \overline{OP}) \Rightarrow$$

$$1 - \overline{OP_0} + \overline{OP} - \overline{OP} \cdot \overline{OP_0} = 1 - \overline{OP} + \overline{OP_0} - \overline{OP} \cdot \overline{OP_0} \Rightarrow$$

$$2 \cdot \overline{OP} = 2 \cdot \overline{OP_0} \Rightarrow \overline{OP} = \overline{OP_0}$$

Deste modo, no  $\mathbb{E}_\infty$ ,  $P, P_0$  são equidistantes de  $O$ . Pela arbitrariedade na escolha do ponto  $P_0$ , podemos concluir que, considerando uma circunferência euclidiana  $\alpha$  com centro em  $O$  e raio  $\overline{OP}$ , no  $\mathbb{D}^2$ , o conjunto de pontos que estão a uma distância  $[OP]$  do ponto  $O$  é a circunferência euclidiana  $\alpha$ , dito isso, podemos dizer que toda circunferência hiperbólica com centro em  $O$  e raio hiperbólico  $\rho = [OP]$  é igual a circunferência euclidiana com centro  $O$  e raio euclidiano  $\overline{OP}$ , ver Figura 91.

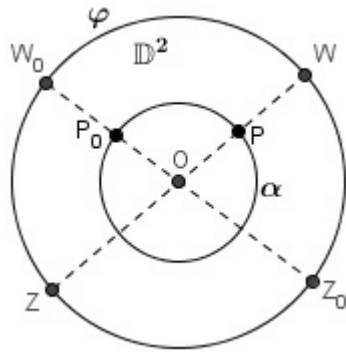


Figura 91 –  $\alpha$  é uma circunferência hiperbólica.

Para determinar a medida euclidiana do raio da circunferência hiperbólica com centro em  $O$ , então, seja o raio

$$\rho = \ln(O, P, W, Z) \Rightarrow e^\rho = (O, P, W, Z) = \frac{\overline{OW}}{\overline{PW}} \cdot \frac{\overline{PZ}}{\overline{OZ}}$$

Como  $\overline{OW} = \overline{OZ} = 1$ ,  $\overline{PW} = 1 - \overline{OP}$  e  $\overline{PZ} = 1 + \overline{OP}$ , teremos

$$e^\rho = \frac{1}{1 - \overline{OP}} \cdot \frac{1 + \overline{OP}}{1} \Rightarrow \overline{OP} = \frac{e^\rho + 1}{e^\rho - 1}$$

Ainda, considerando a circunferência hiperbólica  $\alpha$  com centro  $O$  e raio  $\rho$ , seja  $f$  uma reta hiperbólica arbitrária gerada pela circunferência  $\alpha_f$  de centro  $O_1$ . A reflexão de  $\alpha$  em relação a  $f$  é uma circunferência  $\alpha'$  e a reflexão do  $O$  em relação a  $f$  é o ponto  $O'$ , ver Figura 92. Temos que  $O'$  é o centro hiperbólico da circunferência  $\alpha'$ , pois, a reflexão em relação a uma reta no  $\mathbb{D}^2$  conserva a distância. Logo, podemos concluir que toda circunferência hiperbólica com centro distinto de  $O$  é uma circunferência euclidiana.

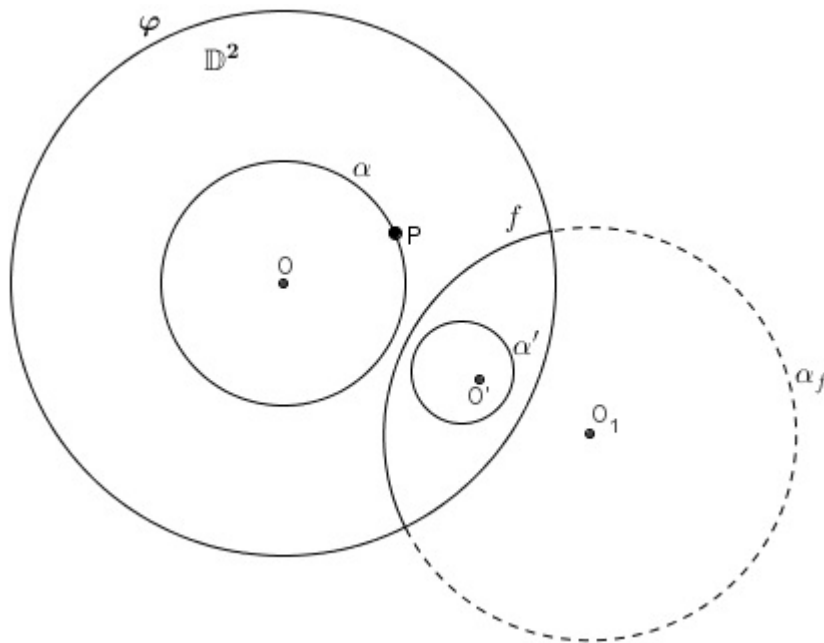


Figura 92 –  $\alpha$  e  $\alpha'$  são simétricos em relação a reta  $f$ .

Considerando o plano  $\mathbb{E}_\infty$ , temos  $O'_1$  inverso de  $O_1$  em relação a  $\alpha$ , os pontos  $O, O'_1$  são distintos, pois  $O_1 \neq \Omega$ , temos  $E$  inverso de  $O'_1$  em relação a  $\alpha_f$ , os pontos  $E, O'$  são distintos, pois  $O \neq E$ . Como  $\alpha'$  é inverso a  $\alpha$  em relação a  $\alpha_f$ , então, pelo Teorema 2.7, página 54, o ponto  $E$  é o centro euclidiano da circunferência  $\alpha'$ . Logo, podemos concluir que o centro hiperbólico de uma circunferência não centrada em  $O$  é distinto do centro euclidiano, ver Figura 93. Além disso, pela construção para determinar o ponto  $E$ , podemos afirmar que os pontos  $O, O', E$  são colineares no plano  $\mathbb{E}_\infty$ .

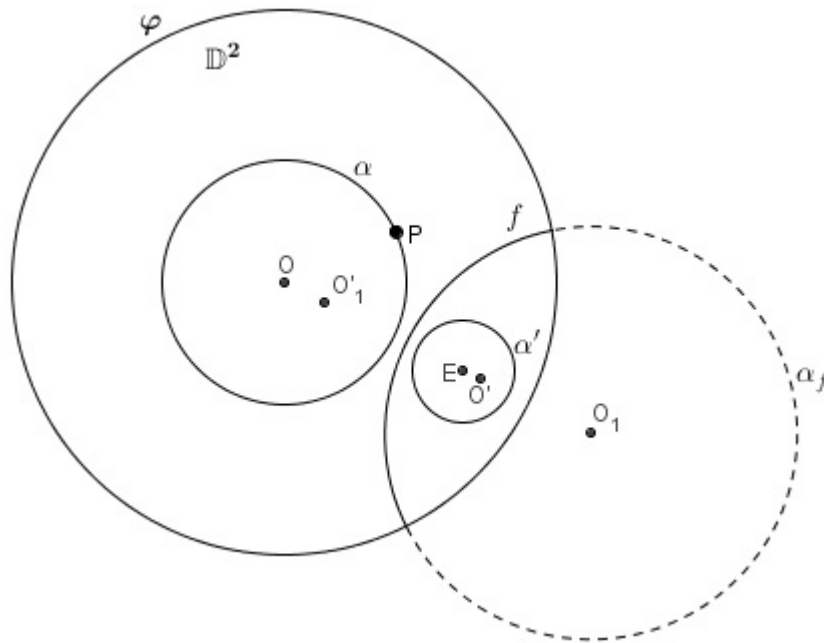


Figura 93 – O centro euclidiano e o centro hiperbólico de uma circunferência com centro distinto de  $O$  não coincidem.

### 3.5.2.1 CONSTRUÇÃO DE CIRCUNFERÊNCIA HIPERBÓLICA

1. Considere os pontos distintos  $A, B \in \mathbb{D}^2$ , vamos construir a circunferência  $\alpha$  com centro hiperbólico  $A$  e raio  $\rho = [AB]$ .

No plano  $\mathbb{E}_\infty$ , Se  $A = O$ , então  $\alpha = \mathcal{C}(O, B)$ . Se  $A \neq O$ , seja  $A'$  o inverso de  $A$  em relação a circunferência  $\varphi$ ,  $M$  o ponto médio do segmento euclidiano  $\overline{AA'}$  e circunferência  $\beta = \mathcal{C}(M, A)$ , pelo Teorema 2.4, Página 48, as circunferências  $\alpha$  e  $\varphi$  são ortogonais, logo,  $\beta$  gera uma reta hiperbólica  $r$ . Assim, seja  $C$  o simétrico de  $B$  em relação a  $r$ , no  $\mathbb{D}^2$ , temos, então,  $d(C, A) = d(B, A)$ , deste modo, o ponto  $C$  pertence a circunferência  $\alpha$ . Seja  $s$  a mediatriz do segmento euclidiano  $\overline{BC}$ , temos que  $O_1 \in s \cap t$ , portanto,  $\alpha = \mathcal{C}(O_1, B)$ , ver Figura 94.

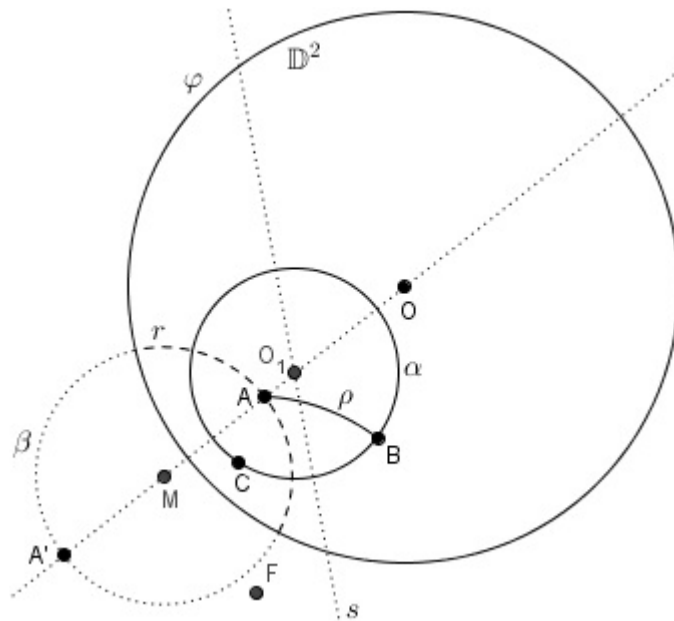


Figura 94 – Circunferência  $\alpha$  com centro hiperbólico  $A$  e raio hiperbólico  $\rho = [AB]$

2. Vamos determinar o centro hiperbólico  $O_1$  da circunferência  $\alpha$ .

Sejam os pontos distintos  $A, B, C \in \alpha$ , se  $d(A, O) = d(B, O) = d(C, O)$ , então,  $O_1 = O$ . Vamos considerar que ao menos  $d(A, O) \neq d(B, O)$ , como os pontos  $A, B$  e  $C$  não são colineares<sup>7</sup>, no plano  $\mathbb{D}^2$ , então, as mediatrizes dos segmentos hiperbólicos  $[AB]$  e  $[BC]$ ,  $r$  e  $s$ , respectivamente, são concorrentes e incidem no ponto  $O_1$ <sup>8</sup>. Como  $d(O_1, A) = d(O_1, B) = d(O_1, C)$ , então,  $O_1 \in r \cap s$ .

Na Figura 96, os pontos  $A, B, C$  são simétricos, respectivamente, a  $D, E, F$  em relação a reta  $r$ , então, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  são congruentes.

<sup>7</sup> A demonstração de que três pontos distintos de uma circunferência não são colineares se encontra em (ANDRADE, 2013, pag 64)

<sup>8</sup> As mediatrizes dos lados de um triângulo hiperbólico são concorrentes, ver demonstração em (ANDRADE, 2013, Pag. 139-140)

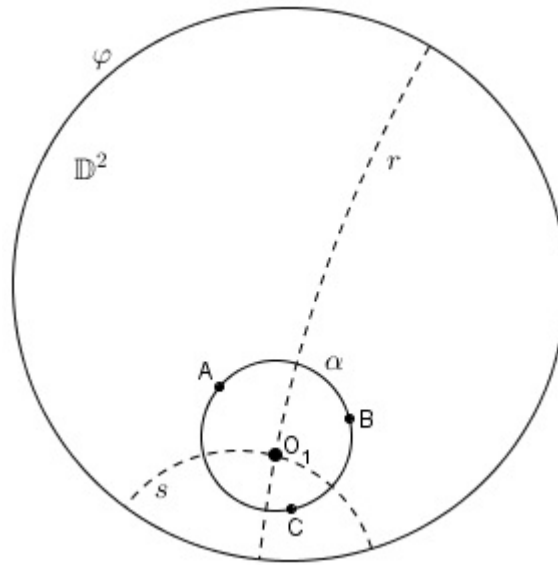


Figura 95 –  $r$  e  $s$  são mediatrizes de  $[AB]$  e  $[BC]$ , respectivamente, e  $O_1 \in r \cap s$  é o centro da circunferência  $\alpha$

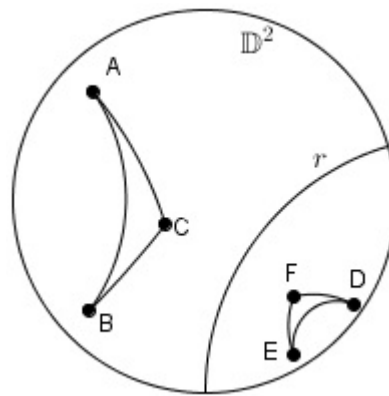


Figura 96 – os pontos  $A, B, C$  são simétricos, respectivamente, a  $D, E, F$  em relação a reta  $r$ , logo  $\triangle ABC = \triangle DEF$

**Proposição 3.10** *O Modelo de Disco de Poincaré satisfaz o Axioma C1, C2, C3 e C4*

Considere as retas hiperbólica  $r$  e  $s$  e os pontos  $A, B \in r$  e  $A' \in s$ .

Considere uma reta  $t$  que reflete o ponto  $A$  no ponto  $A'$  e o ponto  $C$ , simétrico a  $B$  em relação a  $t$ . Temos que  $d(A, B) = d(A', C)$ , assim, seja  $\alpha$  a circunferência de centro  $A'$  e raio  $[A'C]$  cuja interseção com a reta  $s$  são dois pontos,  $B'_1$  e  $B'_2$ . Assim,  $[AB] = [A'B'_1] = [A'B'_2]$ , ver Figura 97.

Através desta construção, mostramos que o Modelo de Poincaré satisfaz o Axioma C1 e de forma análoga, também é possível mostrar que este Modelo satisfaz o Axioma C2.

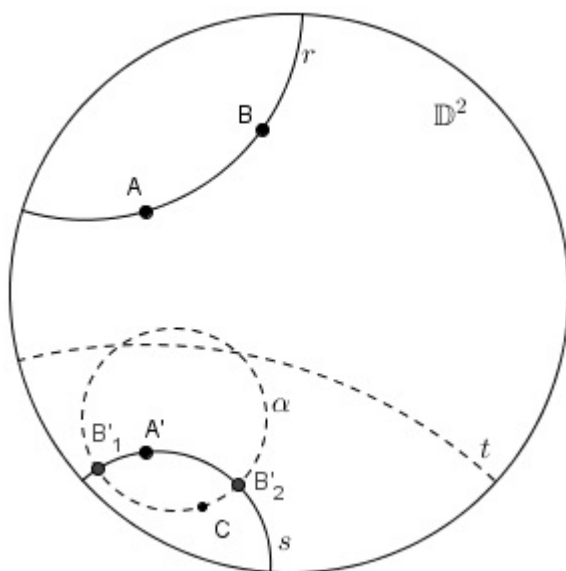


Figura 97 – Demonstração que o Modelo de Poincaré satisfaz o Axioma C1

Para provar que o Disco de Poincaré satisfaz o Axioma C3, tome  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{D}^2$  tais que  $d(A, B) = d(A', B') = x$  e  $d(B, C) = d(B', C') = y$ . Como  $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$  e  $d(A', C') = d(A', B') + d(B', C')$ , então  $d(A, C) = d(A', C') = x + y \Rightarrow [AC] = [A'C']$

Vamos mostrar que o Modelo de Disco de Poincaré satisfaz o Axioma C4, para isso, considere um ângulo hiperbólico  $\angle ABC$  e uma semirreta hiperbólica  $\overrightarrow{B'C'}$ , sem perda da generalidade, vamos considerar que as retas hiperbólicas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BC}$  são geradas, respectivamente, pelas circunferências  $\alpha$  e  $\beta$ .

Vamos considerar que a semirreta hiperbólica  $\overrightarrow{B'C'}$  é gerada pela circunferência  $\lambda$ , então, vamos determinar uma semirreta  $\overrightarrow{B'A'}$  tal que  $\angle A'B'C' = \theta$ .

Tracemos duas retas euclidianas concorrentes,  $a$  e  $b$ , no ponto  $B'$  formando o ângulo  $\theta$  e  $a$  é tangente à  $\lambda_1$ . Se  $b$  não incide em  $O$ , ver Figura 98

Então,  $\angle A'B'C'$  é um ângulo formado por duas circunferências, assim, se existir uma circunferência  $\lambda_2$  tangente a  $b$  no ponto  $B'$  e que gera a semirreta hiperbólica  $\overrightarrow{B'A'}$ , então,  $\lambda_2$  passa pelos pontos  $B'$  e  $B''$ , inverso a  $B'$  em relação a  $\varphi$ , dito isso, o centro  $O'$  de  $\lambda_2$  pertence a reta  $c$  mediatriz do segmento  $\overline{B'B''}$  e como  $\lambda_2$  é tangente a  $b$  no ponto  $B'$ , então,  $O'$  pertence a reta  $d$  perpendicular a  $b$  no ponto  $B'$ . Como  $b$  não incide em  $B''$ , temos que  $c$  e  $d$  são retas concorrentes, assim, existe  $O' \in c \cap d$  e  $\lambda_2 = \mathcal{C}(O', B')$ , ver Figura 99. Pela construção, verificamos que a circunferência  $\lambda_2$  é única, então, a semirreta hiperbólica  $\overrightarrow{B'A'}$  também é única.

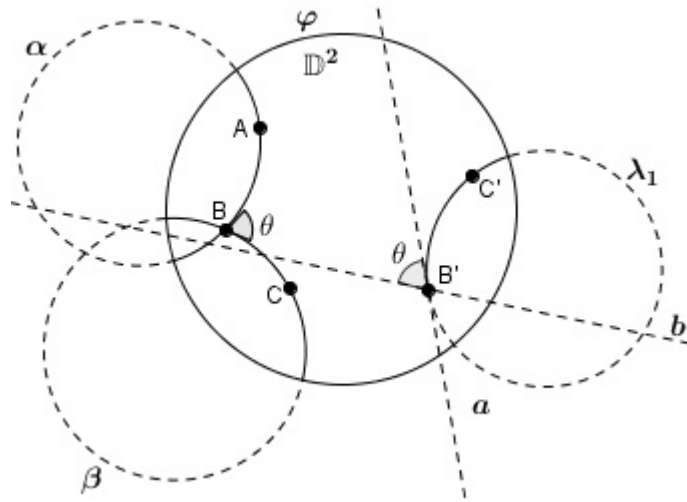


Figura 98 – Retas euclidianas,  $a$  e  $b$ , formando um ângulo  $\theta$

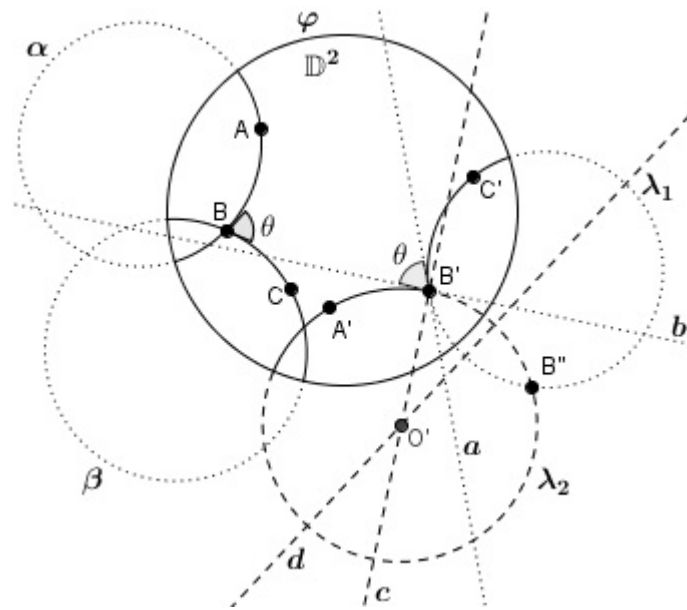


Figura 99 – Circunferência  $\lambda_2 = C(O', B')$

Analogamente podemos contruir uma semirreta do outro lado de  $\overrightarrow{B'C'}$  formando o ângulo  $\theta$ , ver Figura 100.

Se  $b$  incide em  $O$ , então,  $b$  gera a semirreta hiperbólica  $\overrightarrow{B'A'}$ , neste caso, a circunferência  $\lambda_2$  não existe, pois  $B'$  e  $B''$  pertencem a  $b$  e, assim, não é possível contruir uma circunferência tangente a  $b$  que passe por  $B'$  e  $B''$ , portanto, a semirreta  $\overrightarrow{B'A'}$  é única, ver Figura 101.

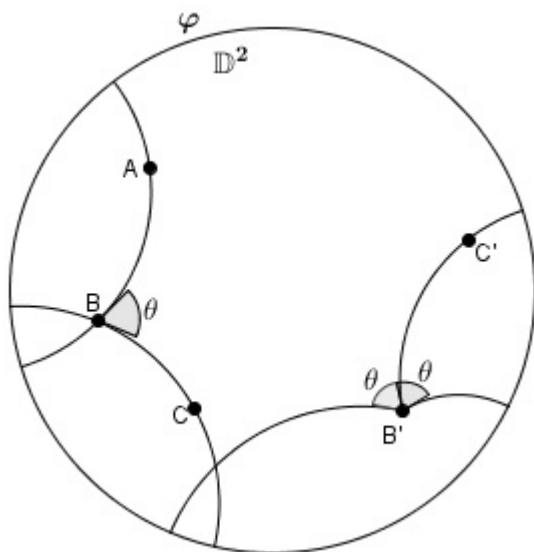


Figura 100 – Ângulos hiperbólicos com uma lado em comum.

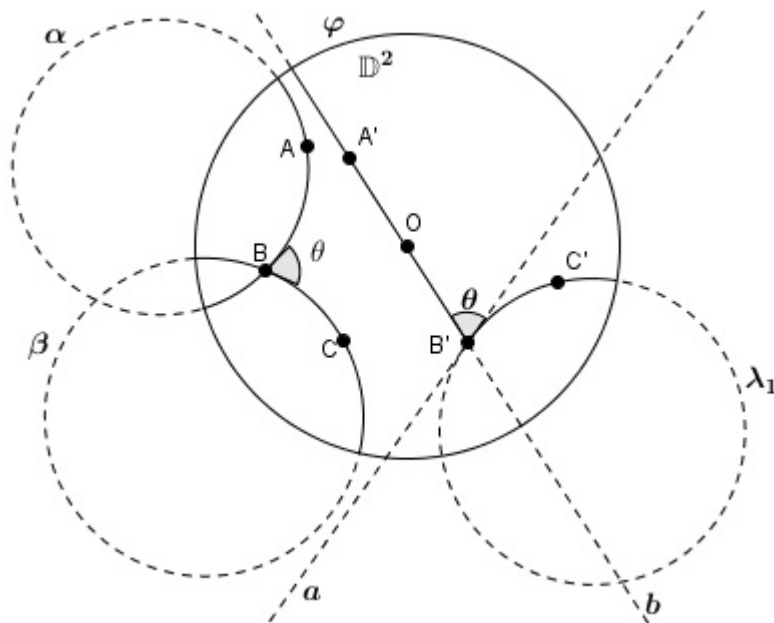


Figura 101 – O Modelo de Poincaré satisfaz o Axioma C4.

A forma de medir ângulos formados por retas hiperbólicas<sup>9</sup> já nos garante que, no Modelo de Poincaré, todo ângulo é congruente a si mesmo. Assim, provamos que o Modelo de Poincaré satisfaz o Axioma C4.

**Proposição 3.11** *Seja a reta  $\overline{AB}$  e os pontos  $C, D$  e  $P$  tais que  $A * P * B$  e  $C$  e  $D$  estão em lados opostos da reta  $\overline{AB}$ . Temos  $\angle APC = \angle BPD$  se, e somente se, os pontos  $C, D$  e  $P$*

<sup>9</sup> Ver Definição 3.4, Página 62



são colineares.

### DEMONSTRAÇÃO

$\Rightarrow$ ) Temos  $\angle APB = 180^\circ$ , seja  $\angle APC = \angle BPD = \theta$ . Temos que  $\angle BPC$  e  $\theta$  são ângulos suplementares, assim como  $\angle APD$  e  $\theta$  são suplementares, logo,  $\angle BPC = \angle APD$ . Portanto, as semirretas  $\overrightarrow{PC}$  e  $\overrightarrow{PD}$  estão na mesma reta, ver Figura 102.

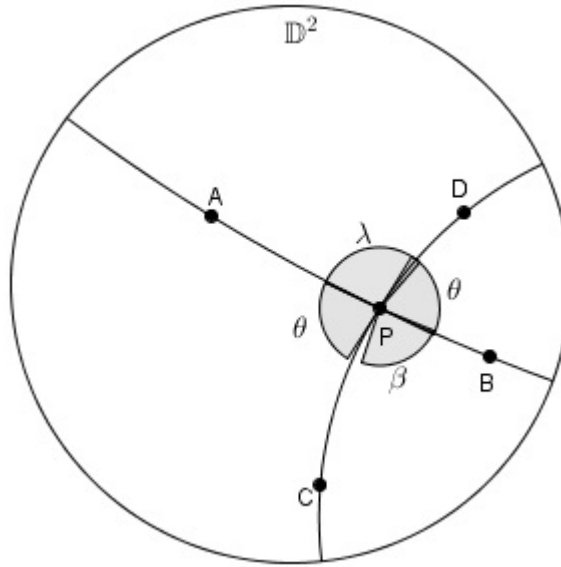


Figura 102 – Os ângulos  $\lambda$  e  $\beta$  são congruentes

$\Leftarrow$ ) Na Geometria Euclidiana, os ângulos  $\angle APC$  e  $\angle BPD$  são congruentes, o que é suficiente para concluir que, na Geometria Hiperbólica, ângulos opostos pelo vértice (OPV)<sup>10</sup> são congruentes.

**Definição 3.16** Considere os triângulos hiperbólicos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  se  $[AB] = [A'B']$ ,  $[AC] = [A'C']$ ,  $[BC] = [B'C']$  e  $\angle ABC = \angle A'B'C'$ ,  $\angle BAC = \angle B'A'C'$  e  $\angle ACB = \angle A'C'B'$  então, dizemos que  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são **triângulos hiperbólicos congruentes**, denotaremos por  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ .

**Proposição 3.12** O Modelo de Disco de Poincaré satisfaz o Axioma C5.

Vamos admitir, sem perda de generalidade a situação da Figura 103. Temos  $[AB] = [A'B']$ ,  $[AC] = [A'C']$  e  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ .

<sup>10</sup> A definição de ângulos opostos pelo vértice para Geometria Hiperbólica será a mesma da Geometria Euclidiana.

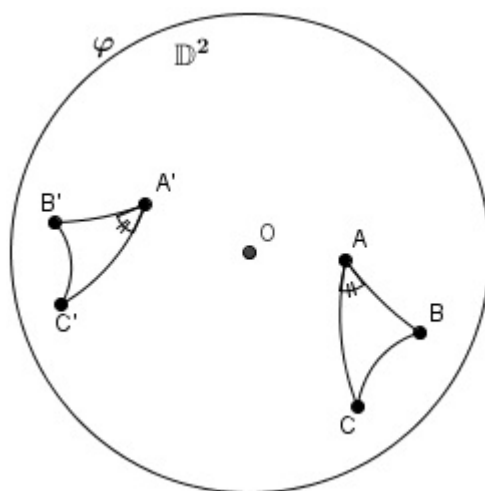


Figura 103 –  $[AB] = [A'B']$ ,  $[AC] = [A'C']$  e  $\angle BAC = \angle B'A'C'$

Seja  $f$  a reta que reflete  $A$  em  $O$  e sejam  $B_1$  e  $C_1$  simétricos, respectivamente, a  $B$  e  $C$  em relação a  $f$ . Temos  $\triangle OB_1C_1 = \triangle ABC$ , ver Figura 104.

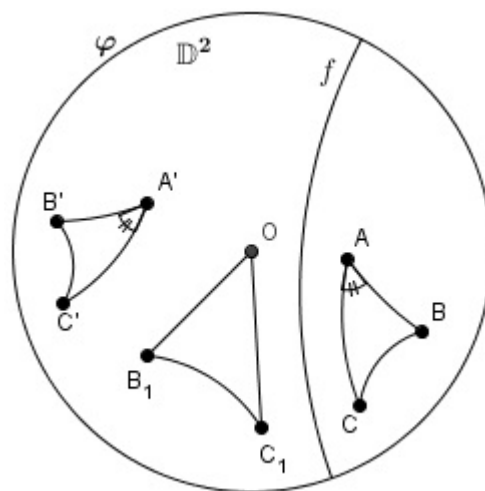


Figura 104 –  $\triangle OB_1C_1$  e  $\triangle ABC$  são simétricos em relação a reta  $f$ .

Seja  $g$  a reta que reflete  $A'$  em  $O$ , teremos  $B''$  simétrico a  $B'$  e  $C''$  simétrico a  $C'$  em relação a  $g$  e  $\triangle OB''C'' = \triangle A'B'C'$ , ver Figura 105.

Podemos definir uma reta hiperbólica  $r$  que leva  $B_1$  em  $B''$ , por hipótese,  $[AB] = [A'B']$ , sendo  $A'$  simétrico a  $O$  e  $B'$  simétrico a  $B''$  em relação a  $g$  e  $A$  simétrico a  $O$  e  $B$  simétrico a  $B_1$  em relação a  $f$ , então,  $[AB] = [A'B'] = [OB''] = [OB_1]$ . Como as retas hiperbólicas  $\overline{OB''}$  e  $\overline{OB_1}$  são diâmetros de  $\varphi$ , logo,  $B_1, B''$  são equidistantes de  $O$  no  $\mathbb{E}_\infty$ . Assim, podemos traçar uma reta hiperbólica de reflexão  $r$  que leva  $B_1$  em  $B''$  e  $r$  passa por  $O$ , então,  $O$  é simétrico a si mesmo em relação a  $r$ . Temos que  $\angle B_1OC_1 = \angle B''OC''$  e  $[OC_1] = [OC'']$ ,

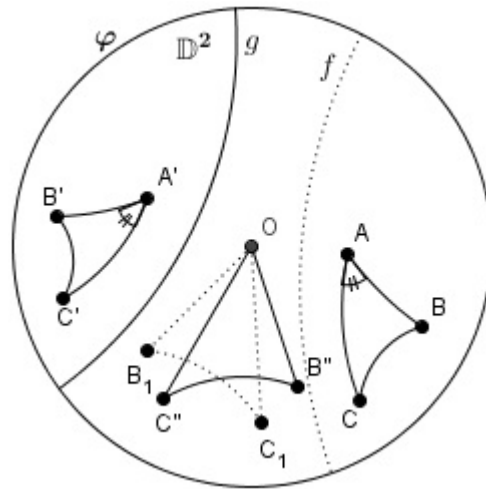


Figura 105 –  $\triangle OB''C''$  e  $\triangle A'B'C'$  são simétricos em relação a reta  $g$ .

então,  $C''$  e  $C_1$  são simétricos em relação a  $r$ , logo,  $\triangle OB_1C'' = \triangle A'B'C' = \triangle ABC$ , então,  $\angle A'B'C' = \angle OB_1C'' = \angle ABC$  e  $\angle OC''B_1 = \angle A'C'B' = \angle ACB$ . Portanto, o Modelo de Disco de Poincaré satisfaz o Axioma C5, ver Figura 106.

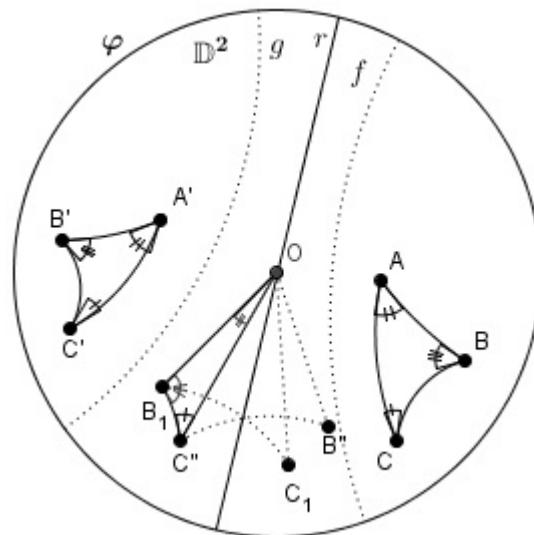


Figura 106 – O Modelo de Disco de Poincaré satisfaz o Axioma C5.

**Proposição 3.13** *Todo segmento hiperbólico possui ponto médio e ele é único.*

#### DEMONSTRAÇÃO

A demonstração da Proposição 3.13 pode ser vista em (ANDRADE, 2013, Pag. 45-46).

**Teorema 3.5** *Todo segmento tem mediatriz e é única*

### DEMONSTRAÇÃO

Pela Proposição 3.10, no Disco de Poincaré, seja um ponto  $E$  pertencente a uma reta  $r$ , só é possível traçar uma única semirreta, em cada lado de  $r$ , como origem em  $E$  e perpendicular a  $r$ . Estas semirretas estão numa mesma reta, assim, só é possível traçar uma única reta hiperbólica perpendicular a  $r$  incidindo no ponto  $E$ . Além disso, pela Proposição 3.13, todo segmento hiperbólico tem um único ponto médio, assim, todo segmento possui uma única reta hiperbólica mediatriz.

Pelo Teorema 3.5, também podemos concluir que tomando dois pontos no  $\mathbb{D}^2$ ,  $A$  e  $A'$ , existe um única reta hiperbólica  $r$  que reflete  $A$  em  $A'$ .

## 3.6 AXIOMA DAS PARALELAS

Os Axiomas vistos até aqui são da Geometria Neutra e, a partir deles, podemos criar outras Geometrias adicionando mais Axiomas. Para Geometria Hiperbólica é necessário adicionar apenas o Axioma das Paralelas.

**Proposição 3.14** *O Modelo de Disco de Poincaré satisfaz o Axioma H1.*

No plano euclidiano, retas paralelas são retas que não têm pontos em comum, porém, esta definição não é suficiente para definir retas paralelas no plano hiperbólico.

**Definição 3.17** *Seja  $r$  uma reta,  $Z_1$  um dos pontos ideais de  $r$  e  $P \in \mathbb{D}^2$  um ponto não incidente a  $r$ . Dizemos que uma **reta  $s$  é paralela a  $r$  no ponto  $P$  em direção a  $Z_1$**  se  $r \cap s = \phi$  e  $Z_1$  é um dos pontos ideais de  $s$ .*

**Definição 3.18** *Sejam  $r$  e  $s$  retas paralelas no ponto  $P$  em direção a  $Z_1$ , seja  $t$  uma reta perpendicular a  $r$  e incide em  $P$ , o ângulo agudo formado por  $t$  e  $s$  no ponto  $P$  é chamado de **Ângulo de Paralelismo de  $P$** .*

Uma reta hiperbólica  $r$  possui dois pontos ideais, portanto, é possível traçar duas retas hiperbólicas paralelas a  $r$  que incidem em um ponto  $P \in \mathbb{D}^2 \setminus r$  em direção a cada um dos pontos ideais de  $r$  e o ângulo de paralelismo formado por estas retas são congruente<sup>11</sup>, ver Figura 107

Existe um outro tipo de retas hiperbólicas que não se intersectam, as retas hiperbólicas ultra paralelas.

<sup>11</sup> Ver (ANDRADE, 2013, Pag. 84-86)

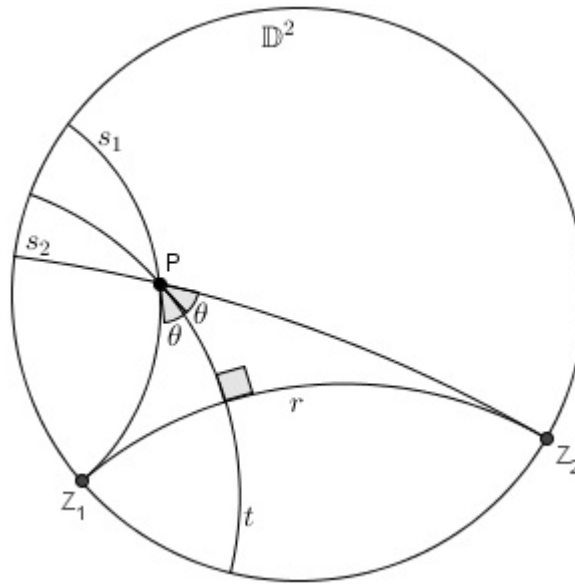


Figura 107 – Retas  $s_1$  e  $s_2$  são paralelas a  $r$  no ponto  $P$  e  $\theta$  é a medida do Ângulo de Paralelismo de  $P$ .

**Definição 3.19** *Uma reta hiperbólica  $r$  é ultraparalela à reta hiperbólica  $s$  no ponto  $P$  se  $r$  incide em  $P$ , não intersesta  $s$  e não tem ponto ideal em comum com a reta  $s$ .*

A Figura 108 ilustra um exemplo de retas ultra paralelas.

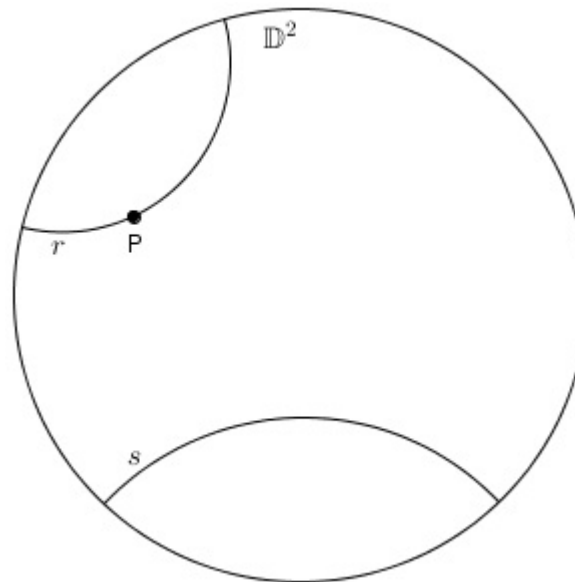


Figura 108 – Reta  $r$  é ultra paralela à reta  $s$  no ponto  $P$

**Teorema 3.6** *A reta  $r$  é ultraparalela a reta  $s$  se, e somente se,  $r$  e  $s$  admitem uma perpendicular em comum.*

A demonstração do Teorema 3.6 pode ser visto em (ANDRADE, 2013, Pag. 136-137), vamos apresenta uma construção para encontrar a perpendicular comum às retas hiperbólicas  $r$  e  $s$ .

Considere as retas ultraparalelas<sup>12</sup>  $r$  e  $s$ , onde a circunferência que gera a reta  $r$ ,  $\alpha_r$ , tem centro no ponto  $O_r$  e a circunferência que gera  $s$ ,  $\alpha_s$ , tem centro no ponto  $O_s$ . Se  $\alpha_r$  e  $\alpha_s$  têm mesmo raio e a reta euclidiana  $\overline{O_r O_s}$  incide no centro  $O$  de  $\varphi$ , então, pelo Lema 2.2, Página 44, o diâmetro de  $\varphi$  contido na reta  $\overline{O_r O_s}$  é a perpendicular comum a  $r$  e a  $s$ , ver Figura 109.

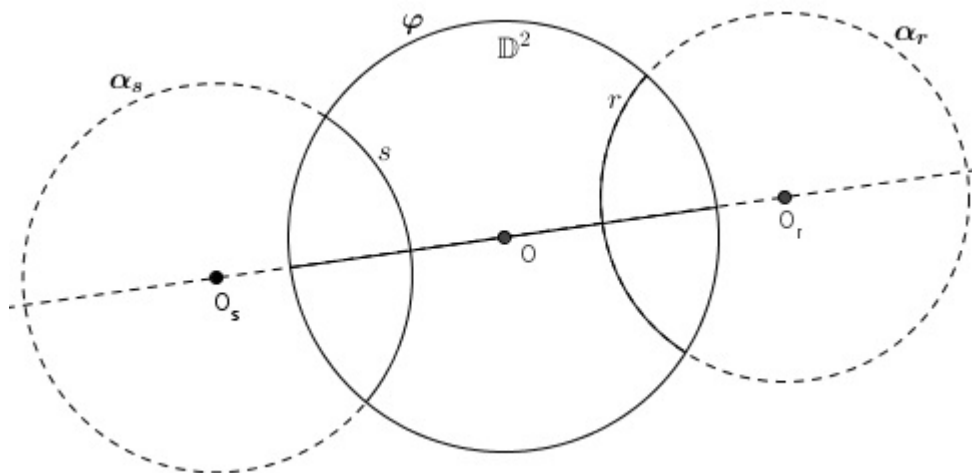


Figura 109 – Um diâmetro de  $\varphi$  é perpendicular às retas  $s$  e  $r$

Se a reta euclidiana  $\overline{O_s O_r}$  não incide em  $O$ , vamos considerar  $Z_1$  e  $Z_2$  como pontos ideais de  $r$  e  $Z_3$  e  $Z_4$  como pontos ideais de  $s$ . Podemos traçar uma reta  $t$  que reflete o ponto  $Z_1$  em  $Z_2$  e  $Z_3$  em  $Z_4$  e a reta  $t$  será perpendicular a  $r$  e a  $s$ .

Seja  $\alpha_t$  a circunferência que gera a reta  $t$  e seja  $O_t$  o centro de  $\alpha_t$ . Temos que  $Z_1$  e  $Z_2$  são inversos em relação a  $\alpha_t$ , assim como  $Z_3$  e  $Z_4$  também são. Então, as retas euclidianas  $\overline{Z_1 Z_2}$  e  $\overline{Z_3 Z_4}$  incidem em  $O_t$ , ver Figura 110.

Como  $\alpha_t$  é ortogonal a  $\varphi$ , então, vamos determinar um ponto  $P$  tal que  $\overline{PO_t}$  é tangente a  $\varphi$ , ver Figura 111.

<sup>12</sup> Admitamos que se  $r$  é ultraparalela a  $s$ , então,  $s$  é ultraparalela a  $r$ .

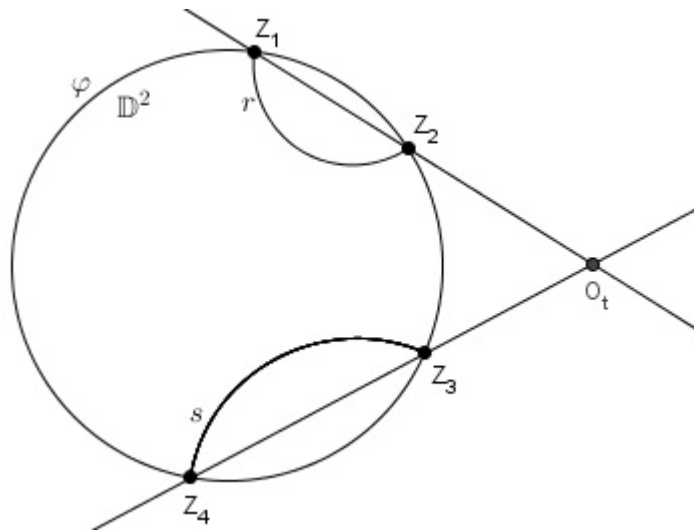


Figura 110 –  $O_t$  é o centro da circunferência  $\alpha_t$

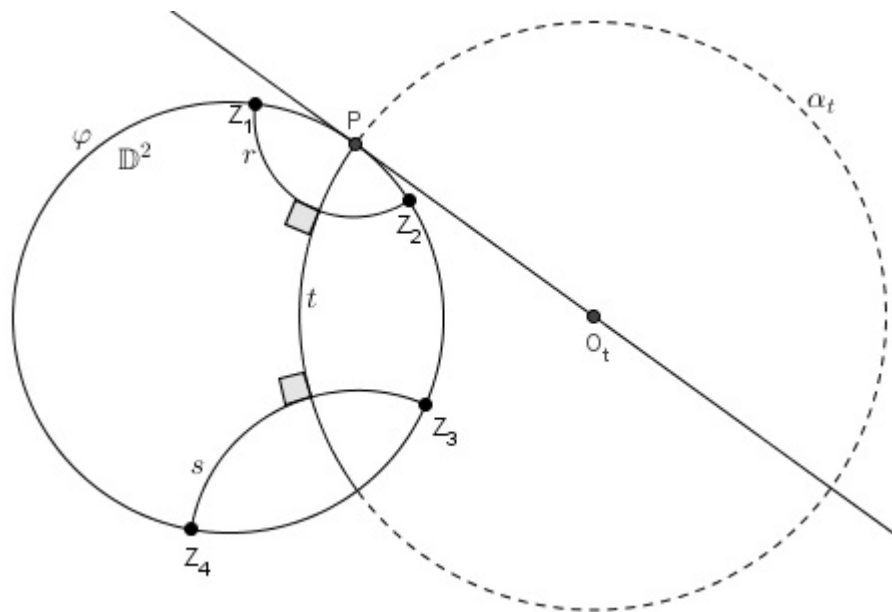


Figura 111 – Reta  $t$  é perpendicular a  $r$  e a  $s$

Pela construção, é possível observar que se as retas  $r$  e  $s$  forem paralelas não haverá reta perpendicular comum, outra forma de verificar isso é que o ângulo de paralelismo deve ser agudo<sup>13</sup>.

<sup>13</sup> Ver (ANDRADE, 2013, Pag. 91)

# CONCLUSÃO

Neste trabalho, vimos a descoberta da existência da Geometria Hiperbólica ocorreu a partir do questionamento da independência do 5º Postulado de Euclides. Embora, todos que tentaram fracassaram, as contribuições vinheram através das estratégias utilizadas por cada um. Mesmo que o caminho adotado não ajudasse a chegar numa nova Geometria, as tentativas fracassadas instigaram outros matemáticos a pensar em novos caminhos.

Todo esse processo mostra que a Matemática é construída de forma lenta e por várias pessoas, apresentando resultados satisfatórios e muitos fracassos, de forma lógica e com afirmações possíveis de prova.

Durante vários séculos, não se imaginava a possibilidade de traçar duas retas distintas e paralelas a uma reta dada passando por um mesmo ponto. Muitos resultados da Geometria Hiperbólica foram encontrados através de processos axiomáticos e Poincaré contribuiu construindo um Modelo simples para o plano hiperbólico cuja consistência está condicionada a consistência da Geometria Euclidiana.

A Geometria Hiperbólica pode ser introduzida nas escolas, através do Modelo de Disco de Poincaré, devido sua simplicidade e baseado na Geometria Euclidiana. Deste modo, o aluno da Educação Básica teria conhecimento que a Geometria Euclidiana não é a única possível.



# REFERÊNCIAS

- ALVES, S.; FILHO, L. C. dos S. Encontro com o mundo não euclidiano. In: *XXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*. [s.n.], 2006. Disponível em: <[http://www.ime.unicamp.br/lem/cnmac/sergio\\_cnmac\\_3.pdf](http://www.ime.unicamp.br/lem/cnmac/sergio_cnmac_3.pdf)>. Acesso em: 02/01/2014.
- ANDRADE, P. *Introdução à Geometria Hiperbólica: O modelo de Poincaré*. First. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Textos Universitários, v. 15).
- BRAZ, F. M. *HISTÓRIA DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA*. 2009. Monografia apresentada na UFMG para obtenção do título de Especialização em Matemática. Disponível em: <[http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia\\_FernandaMartins.pdf](http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_FernandaMartins.pdf)>. Acesso em: 09/01/2014.
- COUTINHO, L. *CONVITE ÀS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS*. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2001.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA ELEMENTAR: Geometria plana*. 8. ed. [S.l.]: Atual Editora, 2005.
- EUCLIDES. *ELEMENTOS DE GEOMETRIA*. 1944. Disponível em: <<http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/be00001a.pdf>>. Acesso em: 30/11/2013.
- FARIA, R. M. A. *INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS PROBLEMAS CLÁSSICOS DE DESARGUES, FAGNANO E MALFATTI*. Dissertação (Mestrado) — Universidade dos Açores - UA, Ponta Delgada-PT, abr. 2013. Disponível em: <<https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/2769/1/DissertMestradoRaquelMariaAlmeidaFaria2013.pdf>>. Acesso em: 17/04/2014.
- FERREIRA, F. A matemática de Kurt Gödel. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, n. 55, p. 39–62, 2006. Disponível em: <<http://www.ciul.ul.pt/~ferferr/GodelMat.pdf>>. Acesso em: 10/08/2014.
- FLORENCIO, M. P. *TRANSFORMAÇÕES NO PLANO E GRUPOS DE SIMETRIA*. São Carlos-SP: [s.n.], 2011. Disponível em: <[http://www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/5/TCC\\_Final\\_Mariele.pdf](http://www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/5/TCC_Final_Mariele.pdf)>. Acesso em: 10/07/2014.
- GREENBERG, M. J. *GEOMETRIAS EUCLIDIANA E NÃO-EUCLIDIANA*. San Francisco: W. H. Freeman Company, 1980.
- HARTSHORNE, R. *GEOMETRY: Euclid and beyond*. [S.l.]: Springer, 2000.
- LIMA, E. L. et al. *A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- LOPES, M. da S. *GEOMETRIAS PLANAS*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Aveiro-UA, Aveiros-Portugal, 2007. Disponível em: <<http://ria.ua.pt/bitstream/10773/2890/1/2008000634.pdf>>. Acesso em: 15/03/2014.

MARTINS, J. E. *MODELOS PARA GEOMETRIA HIPERBÓLICA*. 2011. Monografia apresentada na UFPB para obtenção do título de Licenciado em Matemática. Disponível em: <<http://rei.biblioteca.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/33/1/JEM14082012.PDF>>. Acesso em: 01/12/2013.

MUNARETTO, A. C. C. *RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE APOLÔNIO POR MEIO DA INVERSÃO*: Um roteiro de estudo para a formação de professores em geometria. 2010. Monografia apresentada na UFPR para obtenção do título de Especialista de Expressão Gráfica no Ensino. Disponível em: <<http://www.pb.utfpr.edu.br/anamunaretto/monografia.pdf>>. Acesso em: 01/12/2013.

NETO, A. C. M. *TÓPICOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR*: Geometria euclidiana plana. 1. ed. Rio de Janeiro: SMB, 2012. (Coleção do Professor de Matemática, v. 2).

SITTA, A. M.; PEDROSO, H. A.; TADINI, W. M. Razões cruzadas: Aspectos algébricos e topológicos. *Revista de Matemática e Estatística*, São Paulo, n. 20, p. 67–77, 2002. Disponível em: <[http://jaguar.fcav.unesp.br/RME/fasciculos/v20/A4\\_Artigo.pdf](http://jaguar.fcav.unesp.br/RME/fasciculos/v20/A4_Artigo.pdf)>. Acesso em: 21/04/2014.

WAGNER, E. *CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática, v. 9).