



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Kaliny Ferreira do Nascimento

**LUZ, CÔNICAS, REFLEXÃO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA
O ENSINO DAS CÔNICAS**

RECIFE
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- K14l Nascimento, Kaliny Ferreira do
Luz, cônicas, reflexão: uma sequência didática para o ensino das cônicas / Kaliny Ferreira do Nascimento. - 2020.
136 f.
- Orientadora: Anete Soares Cavalcanti.
Inclui referências e apêndice(s).
- Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2020.
1. Ensino de Matemática. 2. Lúdico. 3. Cônicas. 4. Propriedades refletoras das cônicas. I. Cavalcanti, Anete Soares, orient. II. Título



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Kaliny Ferreira do Nascimento

**LUZ, CÔNICAS, REFLEXÃO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA
O ENSINO DAS CÔNICAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Anete Soares Cavalcanti

RECIFE
2020

KALINY FERREIRA DO NASCIMENTO

**LUZ, CÔNICAS, REFLEXÃO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O
ENSINO DAS CÔNICAS.**

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 31 / 07 / 2020 _

BANCA EXAMINADORA

Dr^a. Anete Soares Cavalcanti (Orientador(a))– UFRPE

Dr^a. Liliana Gabriela Russo – UFPE

Dr^a. Tarciana Maria Santos da Silva – PROFMAT/UFRPE

DECLARAÇÃO

Eu, KALINY FERREIRA DO NASCIMENTO declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título LUZ, CÔNICAS, REFLEXÃO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DAS CÔNICAS, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processo administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador ANETE SOARES CAVALCANTI, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 31 de julho de 2020.

Assinatura: _____

À minha família

Agradecimentos

A Deus, que sempre me guia e guarda;

Ao meu querido esposo, Ricardo Santana, pela força, incentivo e amor recebidos;

À minha orientadora, professora Dra. Anete Soares Cavalcanti, cuja orientação foi indispensável na realização desse trabalho;

À minha família, cujo amor e apoio me fizeram quem sou hoje;

À UFRPE, pelo fomento dado a essa pesquisa;

A meus colegas de turma pelas horas de estudo, em especial às minhas queridas amigas Débora Simone Ferreira de Queiroz e Andreia Simone da Silva que foram essenciais para que eu completasse esse ciclo na minha vida;

A meus alunos, que contribuíram com sua intensa participação durante e após o processo de aplicação dessa pesquisa.

*“A Geometria existe por toda a parte.
É preciso, porém, olhos para vê-la,
inteligência para compreendê-la
e alma para admirá-la.”
(Johannes Kepler)*

Resumo

Registros históricos apontam que as cônicas já eram estudadas desde o século IV a.C. por Hipócrates de Chios (470 – 410 a.C.). Com o avanço do estudo das cônicas, percebeu-se que elas possuíam propriedades de reflexão, devido a seus formatos, que poderiam ser aplicadas em áreas diversas como na engenharia civil, na astronomia e na medicina. Muitas são as aplicabilidades das propriedades refletoras das cônicas e pouco elas são exploradas em sala de aula. Além de estimular os alunos através de aulas lúdicas com experimentos práticos, elas são úteis para consolidar a ideia do conceito dessas cônicas e da localização de seus elementos. O objetivo desta pesquisa é propor uma sequência didática para auxiliar professores durante o processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo para alunos do Ensino Básico. Neste trabalho realizou-se a comparação entre duas sequências didáticas, que também podem ser vistas como parte de uma única sequência didática dividida em dois “grandes momentos”, a primeira utilizando o método de ensino tradicional e a segunda baseada em atividades lúdicas, ambos envolvendo o estudo das cônicas e de suas propriedades refletoras, apresentando como resultados a análise qualitativa de teste realizados pelos alunos ao final de cada etapa, bem como as considerações da professora a respeito de suas percepções durante o processo. O trabalho foi aplicado na Escola de Referência em Ensino Médio (EREM) Aníbal Falcão, localizada em Tejipió, bairro de Recife-PE. Espera-se que essa pesquisa inspire professores de matemática a aplicarem às suas aulas, a proposta apresentada.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Lúdico; Cônicas; Propriedades refletoras das cônicas.

Abstract

Historical records show that conics have been studied since the 4th century BC by Hippocrates of Chios (470 - 410 BC). With the advancement of the study of conics, it was noticed that they had reflection properties, due to their formats, which could be applied in different areas such as civil engineering, astronomy and medicine. There are many applications of the reflective properties of conics and little is explored in the classroom. In addition to stimulating students through playful lessons with practical experiments, they are useful to consolidate the idea of the concept of these conics and the location of their elements. The objective of this research is to propose a didactic sequence to assist teachers during the teaching-learning process of this content for students of Basic Education. In this work, a comparison was made between two didactic sequences, which can also be seen as part of a single didactic sequence divided into two “great moments”, the first using the traditional teaching method and the second based on playful activities, both involving the study of conics and their reflective properties, presenting as results the qualitative analysis of tests performed by students at the end of each stage, as well as the teacher’s considerations regarding their perceptions during the process. The work was applied at the Reference School in High School (EREM) Aníbal Falcão, located in Tejipió, neighborhood of Recife-PE. It is hoped that this research will inspire mathematics teachers to apply the presented proposal to their classes.

Keywords: Mathematics teaching; Ludic; Conical; Reflective properties of conics.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Problema da duplicação do Cubo	27
Figura 2 – Seções de um plano perpendicular à geratriz de um cone acutângulo, retângulo e obtusângulo	28
Figura 3 – Construção dos pontos da parábola - Menaechmus	29
Figura 4 – As Cônicas – Obra de Apolônio de Pérgamo	31
Figura 5 – Aplicação de área por falta ou aplicação elíptica	31
Figura 6 – Solução do problema de aplicação de área por falta ou elíptica	32
Figura 7 – Aplicação de área por excesso ou aplicação hiperbólica	33
Figura 8 – Aplicação exata de área ou aplicação parabólica	34
Figura 9 – Determinação das cônicas através da inclinação de um plano que secciona um cone de duas folhas	35
Figura 10 – Semelhança entre parábolas	36
Figura 11 – Teorema de Pascal	37
Figura 12 – Classificação das cônicas através da excentricidade	38
Figura 13 – Propriedade das retas tangentes a uma circunferência - 1	39
Figura 14 – Propriedade das retas tangentes a uma circunferência - 2	40
Figura 15 – Germinal Pierre Dandelin (1794 - 1847)	41
Figura 16 – Esferas de Dandelin e as cônicas	42
Figura 17 – Inclinação do plano que secciona o cone de duas folhas - Elipse	43
Figura 18 – Teorema de Dandelin - Elipse	43
Figura 19 – Retas diretrizes de uma Elipse	45
Figura 20 – Elipse como L.G.	46
Figura 21 – Inclinação do plano que secciona o cone de duas folhas - Parábola	47
Figura 22 – Teorema de Dandelin - Parábola	47
Figura 23 – Parábola como L.G.	49
Figura 24 – Inclinação do plano que secciona o cone de duas folhas - Hipérbole	49
Figura 25 – Teorema de Dandelin - Hipérbole	50
Figura 26 – Retas diretrizes de uma Hipérbole	51
Figura 27 – Hipérbole como L.G.	53
Figura 28 – Elementos da elipse	54
Figura 29 – Construção com barbante de uma elipse	55
Figura 30 – Eixos maior e menor de uma elipse	57
Figura 31 – Indicação dos focos de uma elipse através de uma abordagem geométrica	57
Figura 32 – Elementos da parábola	58
Figura 33 – Construção com barbante de uma parábola	59
Figura 34 – Identificação geométrica do foco e da reta diretriz de uma parábola – Parte 1	61
Figura 35 – Identificação geométrica do foco e da reta diretriz de uma parábola – Parte 2	62
Figura 36 – Elementos da hipérbole	63
Figura 37 – Determinação dos vértices A_1 e A_2 de uma hipérbole utilizando régua e barbante	64

Figura 38 – Determinação de um ponto P pertencente a hipérbole utilizando régua e barbante	65
Figura 39 – Identificação geométrica dos focos e das assíntotas de uma hipérbole - Parte 1	67
Figura 40 – Identificação geométrica dos focos e das assíntotas de uma hipérbole - Parte 2	68
Figura 41 – Lei de reflexão da luz em superfícies planas e curvas	69
Figura 42 – Consequência da lei de reflexão da luz	70
Figura 43 – Propriedade do ponto interior ou exterior a uma elipse	70
Figura 44 – Propriedade refletora da elipse	71
Figura 45 – Propriedade refletora da elipse - demonstração	72
Figura 46 – Construção da elipse a partir de suas retas tangentes	73
Figura 47 – Retas tangentes à Elipse	73
Figura 48 – Propriedade refletora da parábola	74
Figura 49 – Propriedade refletora da parábola - demonstração	75
Figura 50 – Construção da parábola a partir de suas retas tangentes	76
Figura 51 – Propriedade de um ponto interior/exterior a uma hipérbole	77
Figura 52 – Propriedade refletora da hipérbole	78
Figura 53 – Propriedade refletora da hipérbole - demonstração	79
Figura 54 – Construção da hipérbole a partir de suas retas tangentes	80
Figura 55 – Elipse construída no plano cartesiano	81
Figura 56 – Parábola construída no plano cartesiano	83
Figura 57 – Equação da Parábola com Eixo de simetria na vertical e vértice na origem.	84
Figura 58 – Equação da Parábola com Eixo de simetria na horizontal e vértice na origem.	84
Figura 59 – Hipérbole construída no plano cartesiano	85
Figura 60 – Lei de reflexão aplicada a uma superfície elíptica	90
Figura 61 – Lei de reflexão aplicada a uma superfície parabólica	93
Figura 62 – Lei de reflexão aplicada a uma superfície hiperbólica	96
Figura 63 – Representação das seções cônicas	102
Figura 64 – Definição geométrica da elipse	102
Figura 65 – Definição geométrica das parábola	103
Figura 66 – Definição geométrica da hipérbole	104
Figura 67 – Representação da reflexão de feixes de luz sobre superfícies cônicas refletoras - propriedades refletoras das cônicas	104
Figura 68 – Determinação das cônicas através da inclinação de um plano que secciona um cone de duas folhas	106
Figura 69 – Experimentos com lanterna	107
Figura 70 – Construção da elipse com o auxílio de barbante	108
Figura 71 – Construção da parábola com o auxílio de barbante	108
Figura 72 – Construção da hipérbole com o auxílio de barbante	109
Figura 73 – Cônicas obtidas através de dobraduras	109
Figura 74 – Construção das cônicas através de dobraduras	110
Figura 75 – Experimento de reflexão numa superfície refletora elíptica	111
Figura 76 – Esquema de reflexão dos raios de luz no experimento da Figura 75	111
Figura 77 – Experimento de reflexão numa superfície refletora parabólica	112

Figura 78 – Experimento de reflexão numa superfície refletora hiperbólica	113
Figura 79 – Visita ao Espaço Ciência em Olinda - PE	113
Figura 80 – Representação do funcionamento de um orelhão parabólico	114
Figura 81 – Representação do funcionamento de um fogão solar parabólico	115

Sumário

	INTRODUÇÃO	23
1	SEÇÕES CÔNICAS	27
1.1	BREVE RELATO HISTÓRICO ACERCA DAS SEÇÕES CÔNICAS . .	27
1.2	AS CÔNICAS COMO L.G.	39
1.2.1	Conhecimentos prévios	39
1.2.2	Teorema de Dandelin	41
1.3	CONSTRUÇÃO E LOCALIZAÇÃO DOS ELEMENTOS DAS CÔNICAS	53
1.3.1	Elipse	53
1.3.2	Parábola	58
1.3.3	Hipérbole	63
1.4	PROPRIEDADE REFLETORA E AS RETAS TANGENTES	69
1.4.1	Elipse	70
1.4.2	Parábola	74
1.4.3	Hipérbole	77
1.5	EQUAÇÕES ANALÍTICAS DAS CÔNICAS	81
1.5.1	Elipse	81
1.5.2	Parábola	83
1.5.3	Hipérbole	85
1.5.4	Demais considerações	86
1.6	PROPRIEDADE REFLETORA DAS CÔNICAS - DEMONSTRAÇÃO UTILIZANDO GEOMETRIA ANALÍTICA	88
1.6.1	Elipse	89
1.6.2	Parábola	92
1.6.3	Hipérbole	95
2	DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTI- CAS	99
2.1	SEQUÊNCIA DIDÁTICA I - APLICAÇÃO DO MÉTODO TRADICI- ONAL	101
2.1.1	Primeiro momento: Estudo da elipse.	102
2.1.2	Segundo momento: Estudo da parábola.	103
2.1.3	Terceiro momento: Estudo da hipérbole.	103
2.1.4	Quarto momento: Apresentando as propriedades refletoras das cônicas. .	104
2.1.5	Quinto momento: Aplicação do Teste I.	104
2.2	SEQUÊNCIA DIDÁTICA II - APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES LÚ- DICAS	105
2.2.1	Atividade 1: Experimento com lanterna. (Duração: 1 aula)	106
2.2.2	Atividade 2: Construções das cônicas com barbante. (Duração: 3 aulas) .	107

2.2.3	Atividade 3: Construção das cônicas usando dobradura. (Duração: 2 aulas)	109
2.2.4	Atividade 4: Experimento de reflexão. (Duração: 2 aulas)	110
2.2.5	Atividade 5: Visita ao Museu Interativo de Ciência de Pernambuco – Espaço Ciência (Duração: 4 aulas)	113
2.2.6	Aplicação do Teste II	115
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	117
3.1	TESTE I	117
3.2	TESTE II	118
3.3	COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS DOS TESTES I E II	119
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	125
	REFERÊNCIAS	127
A	TESTE I	129
B	TESTE II	131
C	DEMONSTRAÇÕES REFERENTES À SEÇÃO 1.3	133

INTRODUÇÃO

As cônicas têm sido objetos de estudo há muitos séculos. Elas possuem propriedades de reflexão que instigaram a curiosidade de muitos matemáticos desde antes de Cristo até hoje.

Os três tipos de cônicas não degeneradas são: a elipse, a hipérbole e a parábola. Dentre estas, a última é a mais conhecida e ensinada nas aulas de matemática, embora tratada geralmente como a representação gráfica de uma função quadrática e não como um Lugar Geométrico (L.G.). Apesar disso, todas elas são obtidas através de seções de planos em um cone de duas folhas e todas são conteúdos programados para o Ensino Médio. Pensando nisso, uma reflexão que surgiu foi: como os professores de matemática poderiam abordar o estudo das cônicas em suas aulas, de maneira a atrair a atenção dos alunos para esse conteúdo?

Para ajudar a responder essa indagação, essa pesquisa de mestrado busca analisar os impactos do lúdico no ensino das cônicas nas aulas de matemática no Ensino Médio. Pretende-se neste trabalho realizar uma proposta de sequência didática baseada em atividades lúdicas acerca do estudo das cônicas e de suas propriedades refletoras apresentando como resultados a análise qualitativa de testes realizados pelos alunos ao final de cada etapa desse processo.

Muitas são as aplicabilidades das propriedades refletoras das cônicas na sociedade, entretanto pouco são exploradas em sala de aula. Além de estimular os alunos através de aulas lúdicas com experimentos práticos, elas são úteis para consolidar a ideia do conceito dessas cônicas e da localização de seus elementos.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio enfatiza que é necessário haver um ensino de maneira a integrar os campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas). Para isso, utilizam-se os pares de ideias. São eles: variação e constância; certeza e incerteza; movimento e posição; relações e inter-relações, encontrados em [MEC \(2018\)](#). Estudando as seções cônicas pode-se utilizar de muitos desses pares de ideias.

Quando, por exemplo, a partir do conceito dessas curvas como L.G. chega-se ao formato dessa cônica, está se utilizando, pelo menos, o par de ideia variação e constância que, segundo a BNCC, “envolve observar, imaginar, abstrair, discernir e reconhecer características comuns e diferentes ou o que mudou e o que permaneceu invariante, expressar e representar (ou descrever) padrões, generalizando-o” ([MEC, 2018](#), p. 520). Daí a relevância de se estudar não somente as cônicas, mas também suas propriedades que são muito usadas em várias áreas do conhecimento e revertido em benefícios para a nossa sociedade.

No ensino público estadual de Pernambuco, o conteúdo *GEOMETRIA ANALÍTICA: SEÇÕES CÔNICAS - Parábola. Elipse. Hipérbole.* é restrito para o currículo das escolas integrais, pois estas possuem uma carga horária maior em comparação com as regulares. As expectativas de aprendizagem são as seguintes:

Dominar a aplicação dos conhecimentos de geometria analítica na resolução de problemas. Encontrar as equações das cônicas (parábola, elipse e hipérbole). Resolver

sistemas de equações e inequações do segundo grau a duas variáveis, tanto algébrica quanto graficamente. (SEE, 2013, p. 23)

Para se atingir esse nível de abstração matemática que essas expectativas de aprendizagem propõem é necessário que haja antes uma forte compreensão das características do objeto matemático em estudo. Para facilitar esse aprendizado, o professor pode lançar mão de atividades lúdicas que reforcem essas características básicas das cônicas, como os seus formatos, e as propriedades de reflexão que trará significado e aguçará a curiosidade dos estudantes nesse processo de aprendizagem.

Durante a pesquisa acerca do tema, foram encontrados muitos trabalhos que tratam do estudo das propriedades refletoras das cônicas, a maior parte deles focando em demonstrações matemáticas, indicando suas aplicações na sociedade, alguns inclusive, indicaram sequências didáticas para serem aplicadas em sala de aula utilizando o programa GeoGebra como o de Louzada (2013) e o de Monteiro (2014), mas praticamente nada sobre a aplicação efetiva desse conteúdo no Ensino Médio. Ademais, muitas escolas não possuem materiais e condições necessários para a execução de aulas que demandem algum tipo de recurso tecnológico. Por isso, viu-se a necessidade de se formular uma sequência didática que contemple o conteúdo das cônicas, apresentando-o de maneira lúdica aos alunos utilizando recursos de fácil acesso e de baixo custo.

Essa pesquisa tem por objetivo geral sugerir uma proposta de sequência didática para auxiliar professores durante o processo de ensino-aprendizagem das cônicas para alunos do Ensino Básico. Os objetivos específicos são compreender a definição dos elementos determinantes das cônicas e indicá-los algébrica e geometricamente, construir modelos geométricos que representem as cônicas e suas propriedades refletoras, associar as propriedades refletoras das cônicas às suas utilizações na sociedade a fim de dar significado ao estudo desse objeto matemático.

Ressalta-se que apesar dessa pesquisa se tratar de um assunto presente na grade curricular do Ensino Médio e ter sido aplicada nesta etapa escolar, as atividades lúdicas propostas na Seção 2.2 são bastante simples e requerem pouco conhecimento matemático prévio. Muitos experimentos visam exercitar aspectos mais básicos acerca das cônicas como identificar seus formatos e compreender suas propriedades refletoras, sendo assim aplicáveis a quaisquer níveis da educação básica.

O trabalho foi dividido em três capítulos. O primeiro, trata de um estudo das cônicas, sendo este, subdividido em seis seções que tratam, respectivamente, de relato histórico acerca do surgimento do estudo das cônicas e seu desenvolvimento, a demonstração do Teorema de Dandelin que caracteriza as cônicas como L.G., a construção das cônicas a partir de seus focos e a identificação dos elementos das cônicas dado seu traço, a demonstração das propriedades refletoras numa abordagem geométrica, bem como a construção dessas curvas a partir de suas retas tangentes, demonstrações das equações cônicas de uma maneira analítica a partir da sua definição como L.G. e a demonstração das propriedades refletoras das cônicas utilizando a geometria analítica. Esse capítulo traz a demonstração de resultados que foram utilizados no capítulo 2.

Algumas atividades lúdicas propostas tiveram como foco aplicar as propriedades refletoras das cônicas, por isso no Capítulo 1 são mostradas duas formas de demonstrar as propriedades refletoras, a primeira se embasando fortemente na definição de cônicas como L.G., já a segunda, necessita, além disso, das equações analíticas de tais curvas. Foi pensando em construir uma trajetória de conhecimento

ascendente desde os primeiros estudos sobre cônicas até a demonstração de suas propriedades óticas que o Capítulo inicial foi escrito. No percurso escolhido, algumas vezes optou-se por apresentar provas de proposições cuja aplicação foi utilizada em algum experimento lúdico da sequência didática II, como a propriedade das retas tangentes que estão diretamente ligadas ao experimento com dobraduras, enquanto em outros momentos a escolha para o conteúdo exposto foi devido ao grau de interesse e curiosidade da autora. Um exemplo disso é a identificação dos elementos das cônicas a partir do seu traço, na qual a demonstração adotada nessa pesquisa (Apêndice 1.3) foi construída pela autora em parceria com sua orientadora professora Dra. Anete Soares Cavalcanti.

O Capítulo 2 descreve duas sequências didáticas para o ensino das cônicas e suas propriedades refletoras. Ele se subdivide em duas seções que representam os dois tipos de sequência didática aplicadas em uma turma de Ensino Médio no ano de 2018. A primeira é baseada em um modelo de ensino tradicional e a segunda em atividades lúdicas na qual o aluno constrói conhecimento através de experimentos práticos. Ao final de cada sequência foi aplicado um teste para fins comparativos.

O último capítulo apresenta os resultados do levantamento de dados das observações feitas pela professora durante a aplicação das sequências didáticas e a comparação dos testes realizados após cada uma delas. Também são registradas discussões acerca das possíveis causas desses resultados.

1 SEÇÕES CÔNICAS

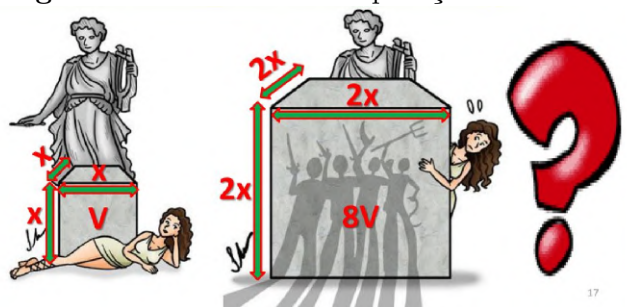
Nesse capítulo serão realizados um relato sucinto relativo ao estudo das seções cônicas ao longo da história, apresentação das cônicas não degeneradas, *elipse*, *parábola* e *hipérbole*, como interseções de um plano em um cone de duas folhas, bem como a identificação tanto geométrica quanto algébrica de seus elementos, além da demonstração das suas respectivas propriedades refletoras com base na lei de reflexão da física.

1.1 BREVE RELATO HISTÓRICO ACERCA DAS SEÇÕES CÔNICAS

Registros históricos apontam que as cônicas já eram estudadas desde o século IV a.C., sua origem não é completamente clara, mas acredita-se que ela está diretamente relacionada ao famoso problema da duplicação do cubo estudada por vários matemáticos dentre eles, Hipócrates de Chios (470 - 410 a.C.).

Segundo Mees (1999), o problema da duplicação do cubo surgiu em 428 a. C. a partir de uma lenda que relata a disseminação de uma epidemia que assolava as terras de um antiga civilização grega. Para apaziguar essa peste, um oráculo foi consultado e ele orientou a dobrar o volume do altar do deus Apolo, mantendo o seu formato cúbico. Pensou-se, inicialmente, que duplicando o tamanho de cada uma de suas arestas o problema estaria solucionado. Entretanto, o resultado foi um altar oito vezes maior. Daí nasceu o que ficaria conhecido como “problema deliano” que busca um valor para a nova aresta entre o tamanho da aresta original e o seu dobro que produziria um altar cúbico cujo tamanho fosse o dobro do inicial.

Figura 1 – Problema da duplicação do Cubo



Fonte – Schivani (2019)

Segundo Sousa (2001), acredita-se que Hipócrates inspirou-se na técnica da geometria plana do problema da duplicação do quadrado para reduzir o problema da duplicação do cubo. Assim, Hipócrates afirma que, seja um cubo de aresta a , determina-se dois segmentos x e y que são meias proporcionais entre a e b :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}. \quad (1.1)$$

A partir dessa dupla proporção, pode-se construir um novo cubo cuja aresta é x e volume estará na razão de $\frac{b}{a}$ em relação ao cubo original.

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{x^3} &= \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{x} \\ &= \frac{a}{x} \cdot \frac{y}{y} \cdot \frac{y}{b} \\ &= \frac{a}{b}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Daí, para duplicar o cubo, basta tomar $b = 2a$. Portanto a solução para esse problema se resumia a determinar dois meios proporcionais x e y entre a e $2a$. Substituindo b por $2a$ na Equação (1.2), tem-se:

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Logo, a proporção seria:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.\tag{1.3}$$

Assim, Hipócrates concluiu que a solução desse problema era dada pelas equações:

$$x^2 = ay.\tag{1.4}$$

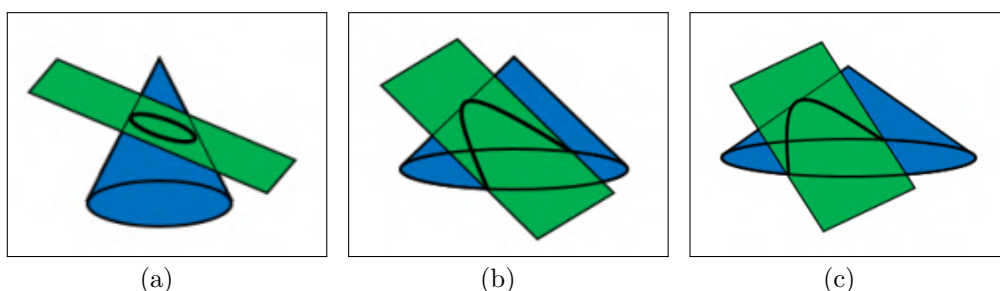
$$y^2 = 2ax.\tag{1.5}$$

$$xy = 2a^2.\tag{1.6}$$

Note que as Equações (1.4) e (1.5), representam o que hoje conhecemos como parábola e a Equação (1.6) como hipérbole. Entretanto, até a época de Hipócrates, elas não eram associadas às seções cônicas.

Mais tarde, segundo Lopes (2011, p.34 - 35), Menaechmus (380 - 320 a.C.) por volta de 360 a 350 a.C., estudando esse problema, descobriu como solução para as equações de Hipócrates as curvas parábola e hipérbole e, como consequência de seus estudos, a elipse. Menaechmus também definiu as cônicas estereometricamente através de seções de um plano perpendicular às geratrizes de três tipos de cones de revolução, por isso, Menaechmus é tido como o descobridor das cônicas. A Figura 2 mostra essa definição inicial das seções cônicas.

Figura 2 – Seções de um plano perpendicular à geratriz de um cone acutângulo, retângulo e obtusângulo



- CONE ACUTÂNGULO: Ângulo do vértice $< 90^\circ$

A Figura 3(a) mostra a seção de um plano perpendicular à geratriz de um cone acutângulo. O local geométrico destacado gerado pela intersecção desse plano com o referido cone é uma elipse.

- CONE RETÂNGULO: Ângulo do vértice $= 90^\circ$

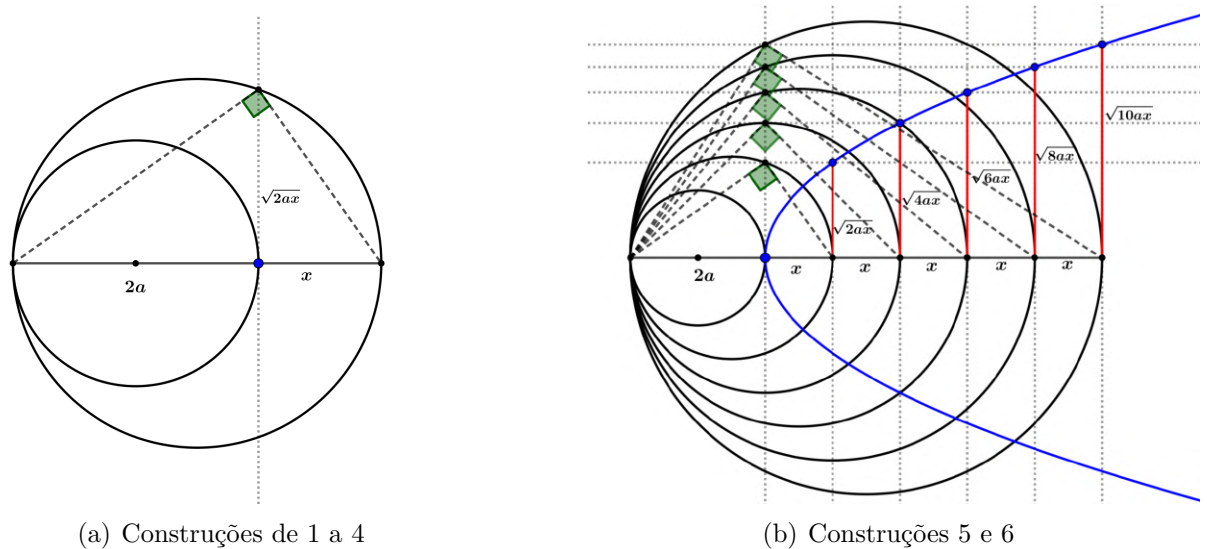
A Figura 3(b) mostra a seção de um plano perpendicular à geratriz de um cone retângulo. O local geométrico destacado gerado pela intersecção desse plano com o referido cone é uma parábola.

- CONE OBTUSÂNGULO: Ângulo do vértice $> 90^\circ$

O local geométrico gerado pela intersecção de um cone obtusângulo e um plano perpendicular à sua geratriz, conforme mostrado na Figura 3(c), é uma hipérbole.

Segundo Pierce (2008), Menaechmus encontrou pontos de solução para as equações de Hipócrates utilizando o procedimento mostrado na Figura 3. Assim, por exemplo, seja a Equação (1.5) é possível representar os pontos de solução da seguinte maneira:

Figura 3 – Construção dos pontos da parábola - Menaechmus



(a) Construções de 1 a 4

(b) Construções 5 e 6

Fonte – Elaborado pela autora

1. Construa uma circunferência de raio a ;
2. Prolongue um dos diâmetros dessa circunferência em um tamanho x e construa uma segunda circunferência de modo que o segmento construído seja o seu diâmetro, ou seja, $2a + x$;
3. Trace a reta perpendicular ao segmento criado de modo que ela passe pelo ponto do início do prolongamento x ;
4. Marque o ponto de intersecção entre essa reta e a segunda circunferência. Note que, pela relação métrica em um triângulo retângulo, a distância entre esse ponto e o segmento representa uma solução para a equação $y^2 = 2ax$, sendo $|y| = \sqrt{2ax}$;
5. Construa a reta paralela a construída no passo 3 que passa pelo final do prolongamento x e marque a projeção ortogonal do ponto construído no passo 4 sobre esta reta;

6. Repita o processo realizando novos prolongamentos de tamanho x a partir do fim do segmento anterior.

Perceba que os segmentos obtidos, destacados na Figura 3 na cor vermelha, correspondem a pontos de solução da Equação (1.5).

Tabela 1 – Pontos de solução da Equação $y^2 = 2aX$.

X	$0x$	$1x$	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$
$y^2 = 2aX$	0	$2ax$	$4ax$	$6ax$	$8ax$	$10ax$
y	0	$\sqrt{2ax}$	$\sqrt{4ax}$	$\sqrt{6ax}$	$\sqrt{8ax}$	$\sqrt{10ax}$

Fonte – Elaborado pela autora

Para associar essas soluções às seções cônicas, Menaechmus considerou que as circunferências construídas na Figura 3 não eram coplanares e as enxegava como curvas de níveis produzidas pelas “bases paralelas de cones delimitadas pela mesma superfície cônica” (PIERCE, 2008, p. 4).

No fim do século IV dois tratados bastante extensos sobre as cônicas já haviam sido escritos: “Cônicas” de Euclides de Alexandria (325 a.C. - 265 a.C.), um ilustre matemático grego considerado o “Pai da geometria”, e “Lugares Sólidos” de Aristeu (370 - 300 a.C.), conforme Lopes (2011).

Embora “Cônicas” tenha sido um importante trabalho de Euclides, sua obra mais conhecida é a intitulada “Os Elementos”.

Na época de Euclides, os gregos não resolviam problemas que envolviam equações do 2º grau (problemas de área) utilizando fórmulas como se aprende na escola atualmente, eles o faziam geometricamente comparando áreas. Normalmente, se um matemático grego queria saber se duas determinadas superfícies planas eram equivalentes uma a outra ou o quanto elas não eram, então “quadravam”, ou seja, construíam dois quadrados de áreas iguais a das superfícies, respectivamente, e os comparavam para concluir se as suas áreas eram “exatamente iguais” ou se a primeira “excedia” ou “excasseava” a segunda. Euclides demonstrou em “Os Elementos” como realizar a “quadratura” de qualquer figura poligonal.

Segundo Roque e Pitombeira (2012, p.126), em “*Os Elementos*”, Euclides já usava as nomenclaturas parábola, elipse e hipérbole, entretanto, nessa época, esses nomes estavam relacionados ao método euclidiano de aplicação de áreas e não às seções do cone definidas por Menaechmus.

O método euclidiano de aplicação de áreas foi uma ferramenta muito importante na Geometria grega, conforme Pitombeira (2004). Ele foi utilizado na resolução geométrica para problemas de Aplicação de Área. Os problemas de aplicação de área são questões que “consistem em construir [um paralelogramo de área igual] a [da] figura dada de tal maneira que [um determinado] segmento de reta seja um de seus lados. Em geral, é exigido que a figura construída, preencha algumas exigências” (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 123). Tais problemas, muito estudados também pelos pitagóricos, são divididos em três casos: “por falta”, “por excesso” e “exata”. Os gregos denominavam de “Aplicação elíptica”, “Aplicação hiperbólica” e “Aplicação parabólica”, respectivamente, esses tipos de problemas.

Mais tarde, Apolônio de Pérgamo (262 – 190 a.C.) publicou o trabalho mais famoso a esse

respeito, “As Cônicas” (Figura 4) [1], que lhe conferiu o título de o “Grande Geômetra”.

Figura 4 – As Cônicas – Obra de Apolônio de Pérgamo



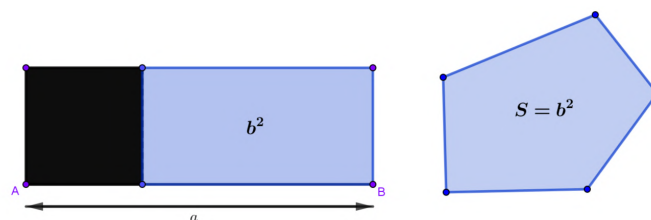
Fonte – Blog Hypatia Matemáticas.

Apolônio mostrou que, a partir de um único cone de duas folhas, não obrigatoriamente reto, seria possível gerar todas as cônicas variando o ângulo de inclinação do plano que o seccionaria. Este passo foi importante para apresentar as cônicas como uma família de curvas e para relacionar suas características e propriedades, afirma Lopes (2011, p.40). Apolônio estudou as cônicas como figuras planas, utilizando, por exemplo, a seção meridiana do cone de duas folhas. De acordo com Domingues (1998), Apolônio determinou a propriedade métrica característica de cada cônica que é equivalente às equações cartesianas em linguagem algébrica atual.

Segundo Roque e Pitombeira (2012) e Carvalho (2006), foi Apolônio quem relacionou cada uma das curvas com a nomenclatura já utilizada por Euclides, mostrando que as seções cônicas, parábola, elipse e hipérbole, se encaixam nas definições do método euclidiano de aplicação de áreas por exatidão, falta ou excesso, respectivamente. Os casos a seguir são bem simples, mas justificam a motivação de Apolônio na escolha dessas nomenclaturas para as seções cônicas.

Problema 1 (Problema de aplicação de área por falta ou aplicação elíptica). *Aplicar ao segmento AB um retângulo cuja área seja igual a de uma figura poligonal S de tal maneira que o que falta para termos um retângulo de mesma altura e cuja base (lado sobre AB) corresponda exatamente ao segmento AB, seja um quadrado. Veja a Figura 5.*

Figura 5 – Aplicação de área por falta ou aplicação elíptica

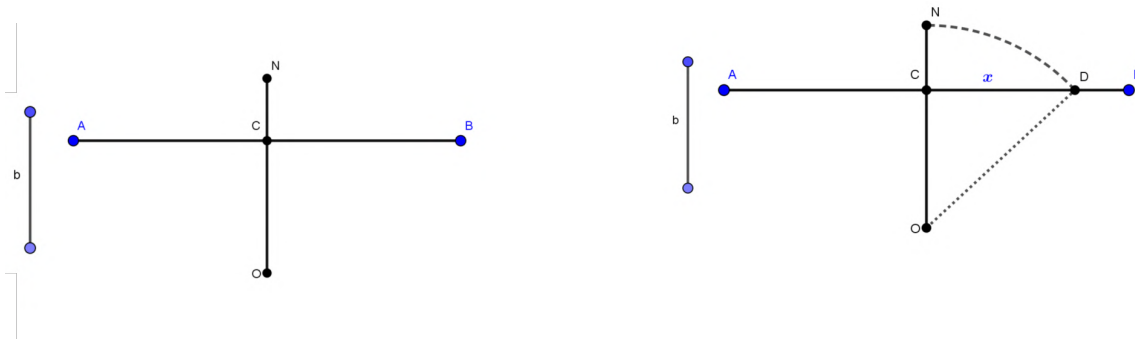


Fonte – Elaborado pela autora

Solução 1. *Considere que a área da Figura S corresponde a de um quadrado de lado b. Portanto, sendo o segmento dado AB de comprimento a e tomando um comprimento $b \leq \frac{a}{2}$, pode-se construir geometricamente o retângulo solicitado da seguinte maneira:*

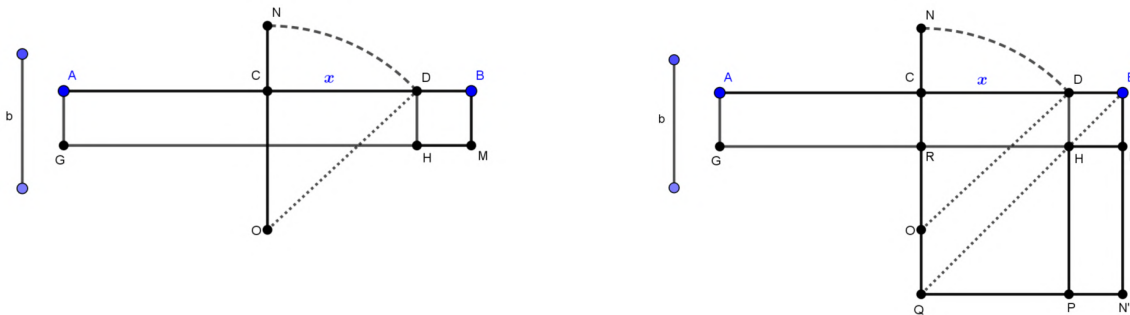
¹ Disponível em: <http://hypatiamatematicas.blogspot.com/2010/02/apolonio-de-perga.html>. Acesso em: jan. 2020

Figura 6 – Solução do problema de aplicação de área por falta ou elíptica



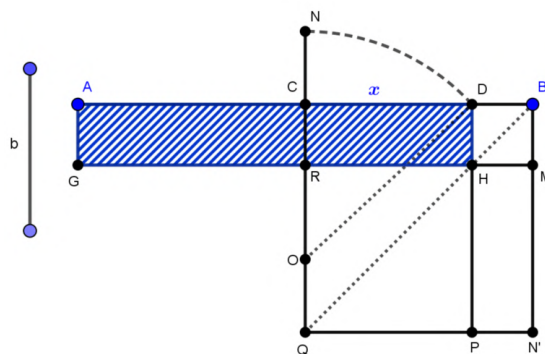
(a) Construa o segmento perpendicular a AB que passe pelo seu ponto médio C e cujo comprimento seja b . Em seguida, prolongue esse segmento (OC) de modo que $\overline{ON} = \overline{BC}$.

(b) Trace o arco de circunferência centrado em O e raio ON de modo que esse arco intersecte o segmento BC no ponto D . Note que $\overline{OD} = \frac{a}{2}$, $\overline{OC} = b$ e $\overline{CD} = x = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$.



(c) Construa o quadrado $BDHM$ sobre o lado BD . Prolongue o segmento HM e marque o ponto G sobre esse prolongamento de modo a construir o retângulo $HDAG$.

(d) Construa o quadrado $BCQN'$ sobre o lado BC e marque os pontos de interseção P e R entre os segmentos construídos, conforme a Figura 7(d).



(e) O retângulo $HDAG$ é solução para esse problema.

Fonte – Elaborado pela autora

Note que a área do retângulo $HDAG$ pode ser calculada pela área de retângulo $MBAG$ menos a área do quadrado $MBDH$. Assim:

$$\begin{aligned}
 A_{HDAG} &= A_{MBAG} - A_{MBDH} \\
 &= a \left(\frac{a}{2} - x \right) - \left(\frac{a}{2} - x \right)^2 \\
 &= \frac{a^2}{2} - ax - \frac{a^2}{4} + ax - x^2 \\
 &= \frac{a^2}{4} - x^2.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Como $x = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$, ou seja, $x^2 = \frac{a^2}{4} - b^2$, tem-se:

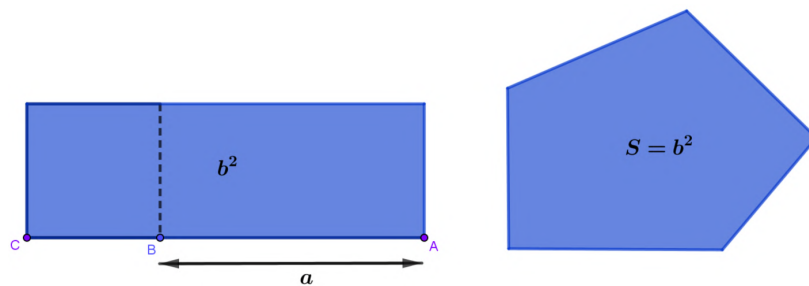
$$\begin{aligned}
 A_{HDAG} &= \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + b^2 \\
 A_{HDAG} &= b^2.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Perceba que a equação da área desse retângulo buscado corresponde a de uma elipse:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{a}{2} + x \right) \left(\frac{a}{2} - x \right) &= b^2 \\
 \frac{a^2}{4} - x^2 &= b^2 \\
 \frac{b^2}{\left(\frac{a}{2} \right)^2} + \frac{x^2}{\left(\frac{a}{2} \right)^2} &= 1.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Problema 2 (Problema de aplicação de área por excesso ou aplicação hiperbólica). *Aplicar ao segmento AB um retângulo cuja área seja igual a de uma figura poligonal S de tal maneira que ao compará-lo com um retângulo de mesma altura e cuja base (lado sobre AB) corresponda exatamente ao segmento AB, o primeiro excede exatamente a área de um quadrado em relação ao segundo. Veja a Figura 7.*

Figura 7 – Aplicação de área por excesso ou aplicação hiperbólica



Fonte – Elaborado pela autora

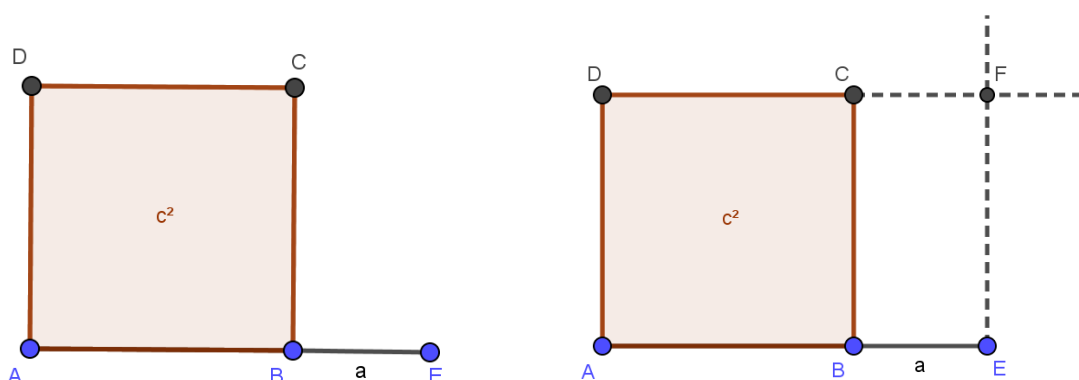
Solução 2. A solução desse problema é semelhante ao problema de aplicação de área por falta. A diferença é que agora o retângulo procurado irá exceder o retângulo de mesma altura e lado AB na quantidade correspondente a um quadrado. Essa solução será deixada como desafio ao leitor. Uma sugestão é consultar o trabalho de [Carvalho \(2006\)](#).

A área do retângulo encontrado corresponde a relação métrica de Apolônio para a hipérbole. Daí o nome para a curva.

Problema 3 (Problema de aplicação exata de área ou aplicação parabólica). *Aplicar uma figura poligonal de área c^2 sobre um segmento BE de tamanho a , a partir de B , ou seja, construir um retângulo sobre um segmento BE de tamanho a , a partir de B , cuja área seja igual a dessa figura e cuja base (lado sobre BE) corresponda exatamente ao segmento BE . Conforme mostrado na Figura 8.*

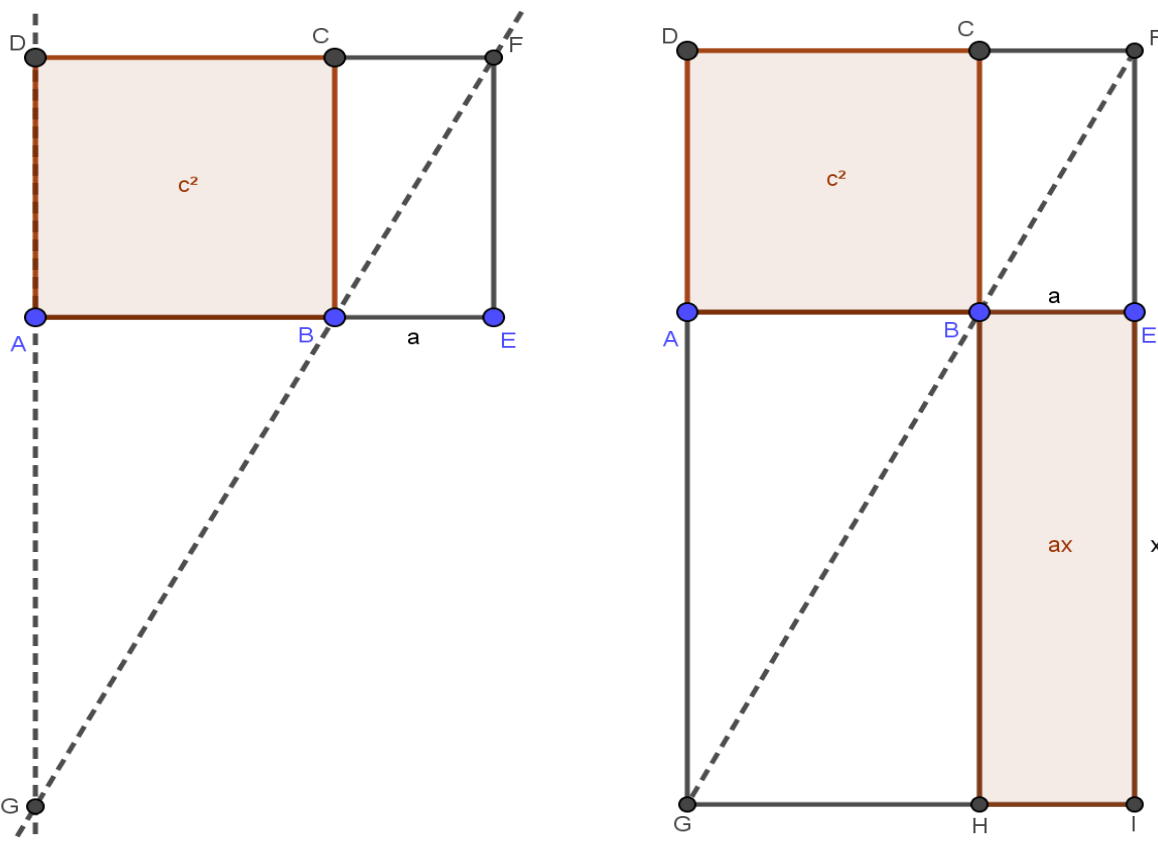
Solução 3. *Pode-se construir geometricamente o retângulo solicitado da seguinte maneira:*

Figura 8 – Aplicação exata de área ou aplicação parabólica



(a) Dado um quadrado $ABCD$ de área c^2 , prolongue o lado AB até o ponto E de modo que $BE = a$.

(b) Prolongue o lado CD e marque o ponto F em CD de maneira que $BEFC$ seja um retângulo.



(c) Construa a reta BF e marque o ponto G pertencente a essa reta e ao prolongamento de AD .

(d) Marque o ponto I de modo que $GIFD$ seja um retângulo.

Note que, pela construção, temos uma aplicação parabólica, ou seja, o retângulo de base a e altura x possui área igual a figura poligonal mencionada e cuja área é representada pelo quadrado de área c^2 . Sendo assim:

$$c^2 = ax.$$

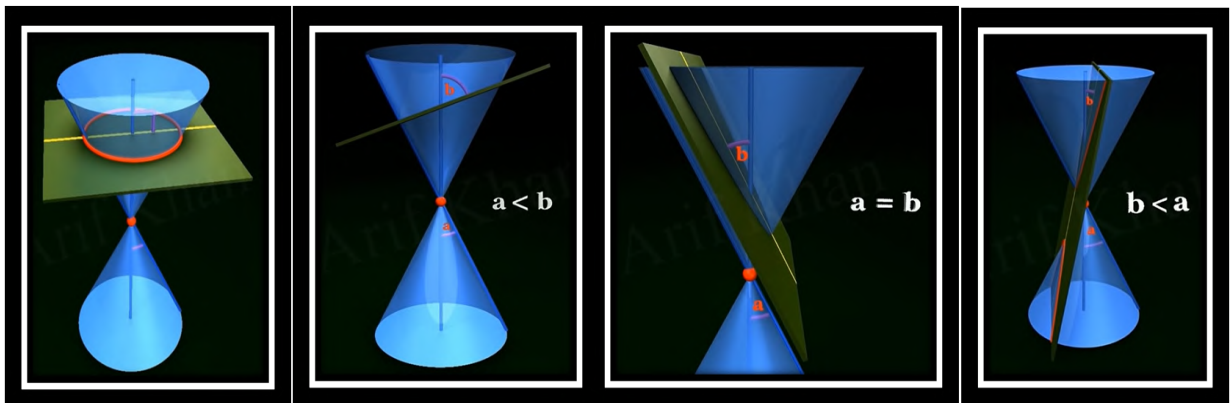
Portanto, a nomenclatura da curva *Parábola* veio desse tipo de problema de área na qual a aplicação da figura poligonal sobre um determinado segmento AB é completo, ou seja, o retângulo procurado corresponde exatamente ao segmento AB .

Apolônio também provou que as seções cônicas podem ser obtidas a partir de um cone de duas folhas qualquer, mas nesse trabalho será utilizada a ideia de um cone de duas folhas reto que é um sólido de revolução gerado a partir da rotação de uma reta em relação a um eixo dado, na qual a inclinação dessa reta com esse eixo é um ângulo a tal que $0^\circ < a < 90^\circ$. Dado um cone de duas folhas, um plano pode seccioná-lo de três formas: formando com o eixo de rotação um ângulo b maior que a , igual a a ou menor que a , como na Figura 9.

Se b for maior que a a interseção formada será uma elipse, um ponto (caso o plano seccione o cone no seu vértice) ou uma circunferência (caso b seja 90°). Se b for igual a a , a interseção será uma parábola ou uma reta (caso o plano contenha a geratriz do cone). Se b for menor que a , a interseção obtida será uma hipérbole ou um par de retas (caso o plano contenha o eixo do cone). Veja a Figura 9. Os casos da elipse, parábola e hipérbole serão demonstrados na Seção 1.2.

Os casos onde as interseções de um plano com um cone de duas folhas formam um ponto, uma circunferência, uma reta ou um par de retas são tratados por muitos autores como cônicas degeneradas. Já quando dessa interseção se obtém uma elipse, parábola ou hipérbole, elas são chamadas cônicas não degeneradas. Para este trabalho serão consideradas e estudadas apenas as cônicas não degeneradas conforme a definição supracitada.

Figura 9 – Determinação das cônicas através da inclinação de um plano que secciona um cone de duas folhas

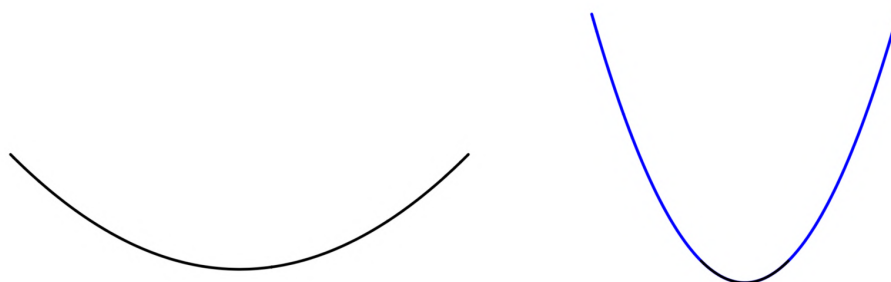


Fonte – Print Screen's retirados de [Learning](#) (2015)

“As Cônicas” de Apolônio foi uma coletânea composta por oito livros que traziam tanto trabalhos já bastante conhecidos na época, como algumas produções de Euclides, quanto proposições inéditas e originais, [Lopes](#) (2011, p. 39), discorre a esse respeito. Conforme [Alves Júnior](#) (2015), essa

obra é tão completa que praticamente exauriu todo estudo acerca das propriedades das cônicas, dentre elas, por exemplo, a semelhança entre duas parábolas quaisquer.

Figura 10 – Semelhança entre parábolas



Fonte – Elaborado pela autora

Um das características mais importantes das cônicas para a sua aplicação em situações reais, são as suas propriedades refletoras (demonstradas nas seções 1.4 e 1.5) que, segundo Lopes (2011), Apolônio já traz em seus quatro últimos livros da coletânea supracitada um estudo a respeito de retas tangentes e normais a essas curvas e unindo essas informações à Lei de reflexão da luz² pode-se demonstrar as propriedades refletoras das cônicas. Lopes (2011) cita o tratado *Sobre os espelhos flamejantes* escrito por Diocles contemporâneo de Apolônio para comprovar o conhecimento dessas propriedades já nessa época.

Lopes (2011) afirma que Apolônio, em seu Livro III de “As Cônicas”, também desenvolveu as definições das seções do cone como lugares geométricos a partir de pontos chamados focos, além de ter verificado as propriedades focais da elipse e hipérbole. Apolônio não trabalhou a propriedade foco-diretriz da parábola, entretanto “Diocles (240 - 180 a.C.), um contemporâneo de Apolônio, mostrou como construir uma parábola usando a propriedade foco-diretriz. Não há referências anteriores desta propriedade particular de uma parábola” (LOPES, 2011, p.49), por isso Lopes acredita que Apolônio houvesse discutido acerca desse assunto em uma outra obra que foi perdida.

As duas proposições do Livro III no qual Apolônio trata da elipse e hipérbole como L.G. são as de número 51 e 52.

“A proposição III-51 estabelece uma definição para a hipérbole, isto é, se traçar um segmento de reta de um ponto arbitrário para cada foco, “o maior dos segmentos de reta excede o menor em um valor constante e igual ao eixo dessa curva”. A proposição III-52 mostra que numa elipse, a soma destes dois segmentos de reta são iguais ao eixo maior. Em outras palavras, se P é um ponto da curva e D, E são os dois pontos do foco, então $|PD - PE| = 2a$ para a hipérbole e $PD + PE = 2a$ para a elipse.” (LOPES, 2011, p.49)

Conforme Santos e Trevisan (2004), Apolônio também propôs uma questão: *Determinar um círculo tangente a três outros círculos, podendo estes ser degenerados em retas (círculos de raio infinito) ou pontos (círculos de raio zero)*. Esse questionamento ficou conhecido como o “Problema de Apolônio”, problema esse que só é conhecido atualmente graças a Pappus, matemático que publicou

² A lei de reflexão da luz já era conhecida na época de Apolônio mesmo que o trabalho mais famoso nesse sentido foi o de Heron de Alexandria (séc. I d.C.).

um apanhado acerca de trabalhos geométricos importantes da época. Esse problema é estudado até hoje e possui várias soluções, dentre elas as que utilizam as seções cônicas.

Depois do tratado de Apolônio sobre as cônicas até o século XVI não se descobriu nada de novo acerca desse tema, segundo [Pitombeira \(2015\)](#).

Segundo [Alves Júnior \(2015\)](#), Galileu Galilei (1564 - 1642) contribuiu grandemente com o avanço da astronomia ao construir telescópios para a observação celeste utilizando as propriedades refletoras da hipérbole, além de descrever a trajetória de projéteis como parábolas. Johannes Kepler (1571 - 1630) utilizou, em 1609, as cônicas para construir a Leis de Kepler que estabelece, dentre outros resultados, a elipse como o formato da trajetória dos planetas ao redor do Sol, ele também introduziu pela primeira vez a palavra foco.

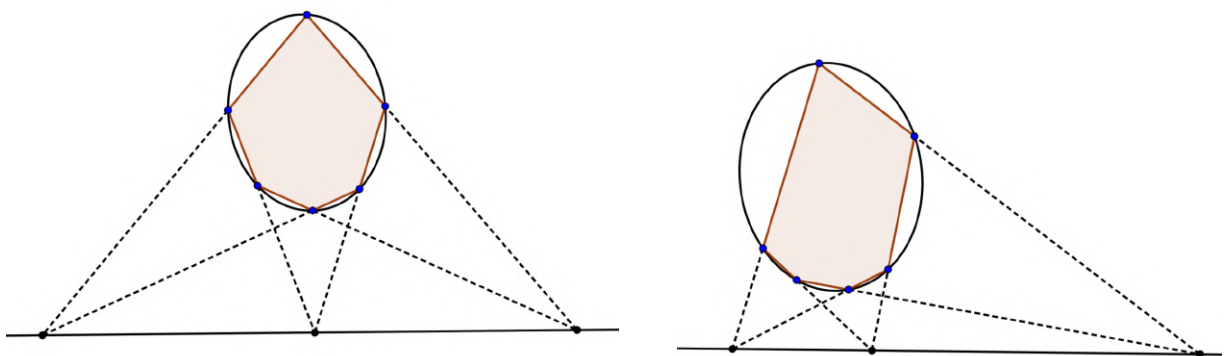
As informações históricas a partir de Desargues até Dandelin foram extraídas de [Pitombeira \(2015\)](#).

Somente em 1639, houve uma inovação no estudo das cônicas com Girard Desargues (1591 - 1661) que elaborou uma teoria unificada das cônicas, trabalhando com a geometria projetiva, na qual ele transpõe a cônica para um círculo, obtém propriedades e os resultados de tais estudos são reprojitados nas cônicas.

Mais tarde, Blaise Pascal (1623 - 1662), escreveu em 1639 um ensaio sobre as cônicas onde ele expõe o Teorema de Pascal que diz:

Teorema 1.1.1 (Teorema de Pascal). *Se um hexágono é inscrito em uma cônica, então os três pontos de interseção dos lados opostos são colineares.*

Figura 11 – Teorema de Pascal



Fonte – Elaborado pela autora

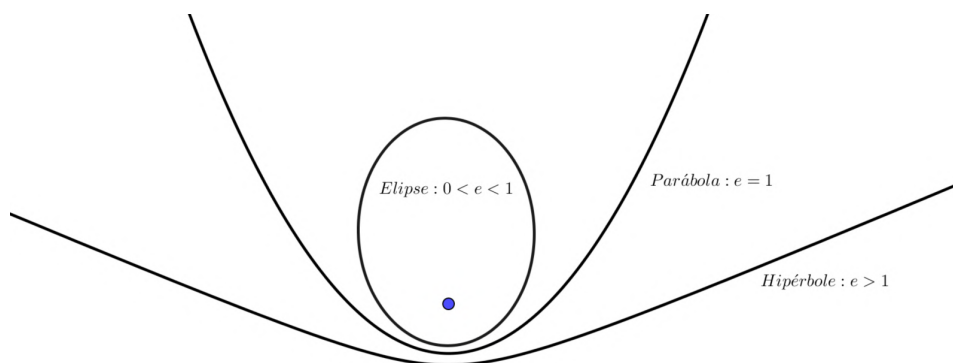
Pascal nomeou esses hexágonos inscritos em cônicas não degeneradas de “hexagramas místicos”. O trabalho de [Ribeiro \(2012\)](#) realiza a demonstração da versão projetiva do Teorema 1.1.1, além disso, segundo a autora, Joseph Bertrand afirmou que a partir desse teorema é possível extrair quatrocentos corolários.

Posteriormente, Phillippe de la Hire (1640 - 1718), em seu trabalho *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques*, escrito em 1673, traz o estudo das cônicas no plano usando a geometria analítica de René Descartes e estabelecendo as definições focais

das cônicas. Daí, surgem as equações analíticas das cônicas apresentadas com o formato algébrico como é conhecido atualmente.

Em 1754, Ruggero Giuseppe Boscovich (1711 - 1787), matemático croata, publicou um trabalho que unificou o estudo das cônicas usando a excentricidade. Nele, Boscovich mostrou que dependendo apenas da variação da excentricidade de uma cônica, ela pode ser classificada como elipse, parábola ou hipérbole. A Figura 12 mostra essa relação.

Figura 12 – Classificação das cônicas através da excentricidade



Fonte – Elaborado pela autora

Anos mais tarde, Jean Victor Poncelet (1788 - 1867) desenvolveu um estudo bem global acerca das cônicas, no qual demonstrava resultados importantes como, por exemplo, dadas duas cônicas quaisquer em um plano, em quantos pontos elas se encontram. Um de seus resultados foi o Teorema de Poncelet cuja demonstração pode ser encontrada em Chung (2013):

Teorema 1.1.2 (Teorema de Poncelet). *Dada uma parábola S , cujo foco é o ponto F e seja P um ponto pertencente à mesma, as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas \overleftrightarrow{FP} e pela perpendicular à diretriz d que passa por P são as retas tangente e normal a parábola em T .*

Um corolário imediato do Teorema 1.1.2 é a propriedade refletora da parábola já que a lei da reflexão dos raios em espelhos planos de Snell-Descartes já era amplamente conhecida e divulgada.

Posteriormente, segundo Monteiro (2014) e Pitombeira (2015), o matemático belga Germinal Pierre Dandelin (1794 - 1847) utilizando das definições de cônicas como seção em um cone de duas folhas, desenvolveu a ideia das Esferas de Dandelin e através delas conseguiu apresentar definições equivalentes para as cônicas, elipse e hipérbole. Em relação à parábola, Pierce Morton foi o responsável por desenvolvê-la, entretanto, como as ideias seguiam a mesma linha de raciocínio que a das demais, os três processos juntos deram embasamento para a proposição conhecida como Teorema de Dandelin (1822).

Grande parte desse trabalho é estruturado a partir da definição das cônicas como L.G., por isso, na Seção 1.2 será apresentada tal definição através da demonstração do Teorema de Dandelin por se utilizar de técnicas matemáticas elementares e de fácil visualização.

Dos tempos de Hipócrates até os dias atuais, o estudo das cônicas vem avançando, e a partir disso, novas tecnologias foram e vem sendo desenvolvidas. Suas propriedades de reflexão foram aplicadas em áreas diversas como na engenharia civil, na astronomia e na medicina.

Atualmente, o estudo das cônicas é um conteúdo programado para ser trabalhado no último ano do Ensino Médio, mas muitas vezes os estudantes completam esse ciclo escolar sem saberem do poder das aplicações das propriedades refletoras das cônicas na sociedade.

1.2 AS CÔNICAS COMO L.G.

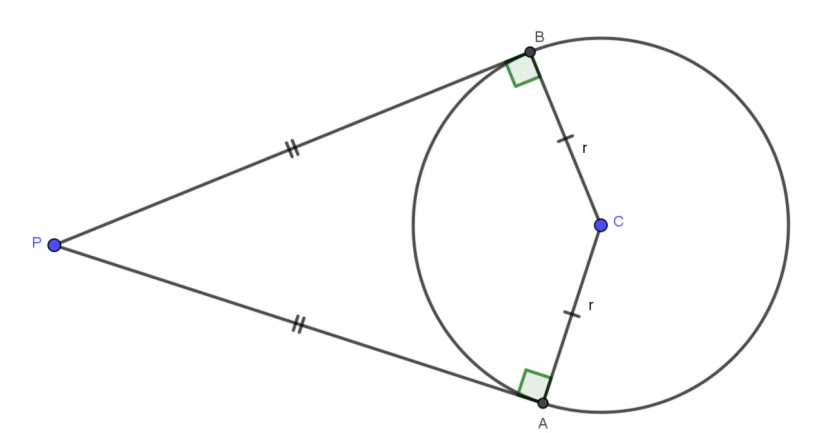
Tanto Apolônio como Dandelin, conforme visto na Seção 1.1, apresentaram as cônicas como seções de um plano em um cone de duas folhas, bem como as propriedades focais de cada uma. Dandelin apresentou os entes geométricos das cônicas e motivou as suas definições como L.G. Por isso, nessa seção, será demonstrado o Teorema de Dandelin, em seguida serão formalizadas as definições das cônicas como L.G.

1.2.1 Conhecimentos prévios

Algumas definições e propriedades serão necessárias no processo de demonstração do Teorema de Dandelin. A primeira delas é a chamada “Propriedade das retas tangentes a uma circunferência”. Essa propriedade afirma que:

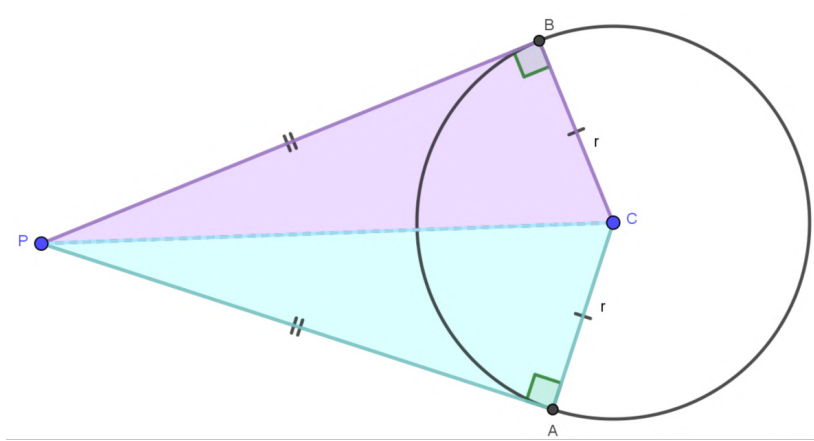
Proposição 1.2.1 (Propriedade das retas tangentes a uma circunferência). *Se um ponto P é exterior a uma circunferência τ e sejam as retas s e t são tangentes à τ nos pontos A e B , respectivamente. Se P pertence à r e s , então os segmentos \overline{PA} e \overline{PB} são congruentes.*

Figura 13 – Propriedade das retas tangentes a uma circunferência - 1



Fonte – Elaborado pela autora

Demonstração. Considere uma circunferência τ de centro C e os pontos A , B e P conforme a hipótese da proposição. Traçando o segmento \overline{PC} , obtém-se dois triângulos retângulos: \widehat{PAC} e \widehat{PBC} .

Figura 14 – Propriedade das retas tangentes a uma circunferência - 2

Fonte – Elaborado pela autora

Note que, em relação aos triângulos APC e BPC , os lados \overline{AC} e \overline{BC} são raios r da circunferência τ , o lado \overline{PC} é comum, além de serem ambos retângulos em A e B , respectivamente. Logo, eles são congruentes. Então:

$$\overline{AP} = \overline{BP}.$$

□

Além das Propriedades das retas tangente à uma circunferência serão estabelecidas as definições de excentricidade e reta diretriz de uma cônica das seguintes maneiras:

Definição 1.2.1 (Excentricidade de uma seção cônica). *Seja α o ângulo de abertura de um cone (formado por qualquer geratriz do cone e seu eixo) e β o ângulo que o eixo forma com o plano que secciona o cone, conforme ilustra a Figura 17. Denomina-se excentricidade (e) da seção cônica a razão:*

$$\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} = e.$$

Dado um cone de duas folhas, pode-se observar a relação entre a inclinação β de um plano que o intersecta e o seu ângulo de abertura α é dada de três formas: $\beta < \alpha$, $\beta = \alpha$ e $\beta > \alpha$, conforme ilustrado na Figura 9.

Considerando que $0^\circ < \beta, \alpha < 90^\circ$, note que a excentricidade de uma cônica pode ser classificada em três casos:

1. Se $\alpha < \beta \Rightarrow 0 < \cos(\beta) < \cos(\alpha) \Rightarrow 0 < e < 1$;
2. Se $\alpha = \beta \Rightarrow \cos(\beta) = \cos(\alpha) \Rightarrow e = 1$;
3. Se $\alpha > \beta \Rightarrow \cos(\beta) > \cos(\alpha) \Rightarrow e > 1$.

Ao longo dessa seção, cada um desses casos será associado a um tipo de curva cônica.

Definição 1.2.2 (Reta diretriz de uma cônica). *Seja P um ponto pertencente à uma cônica, diretriz é a reta que satisfaz a seguinte relação: para cada foco F dessa cônica existe uma reta d de modo que, independente da posição de P ,*

$$\frac{\text{dist}(P, F)}{\text{dist}(P, d)} = e.$$

1.2.2 Teorema de Dandelin

Conforme visto na Seção 1.1, Apolônio já havia determinado a propriedade métrica característica de cada cônica séculos antes de Dandelin nascer. Entretanto, o Teorema de Dandelin apresenta uma maneira mais orgânica de demonstrar a equivalência entre as definições das cônicas como seções em um cone de duas folhas e como L.G., pois sua demonstração não se desvincula dos objetos envolvidos (cone e o plano), permanecendo no espaço, diferentemente da prova de Apolônio que planificava as seções. Além disso, Dandelin traz novas definições como a das Esferas de Dandelin.

Figura 15 – Germinal Pierre Dandelin (1794 - 1847)



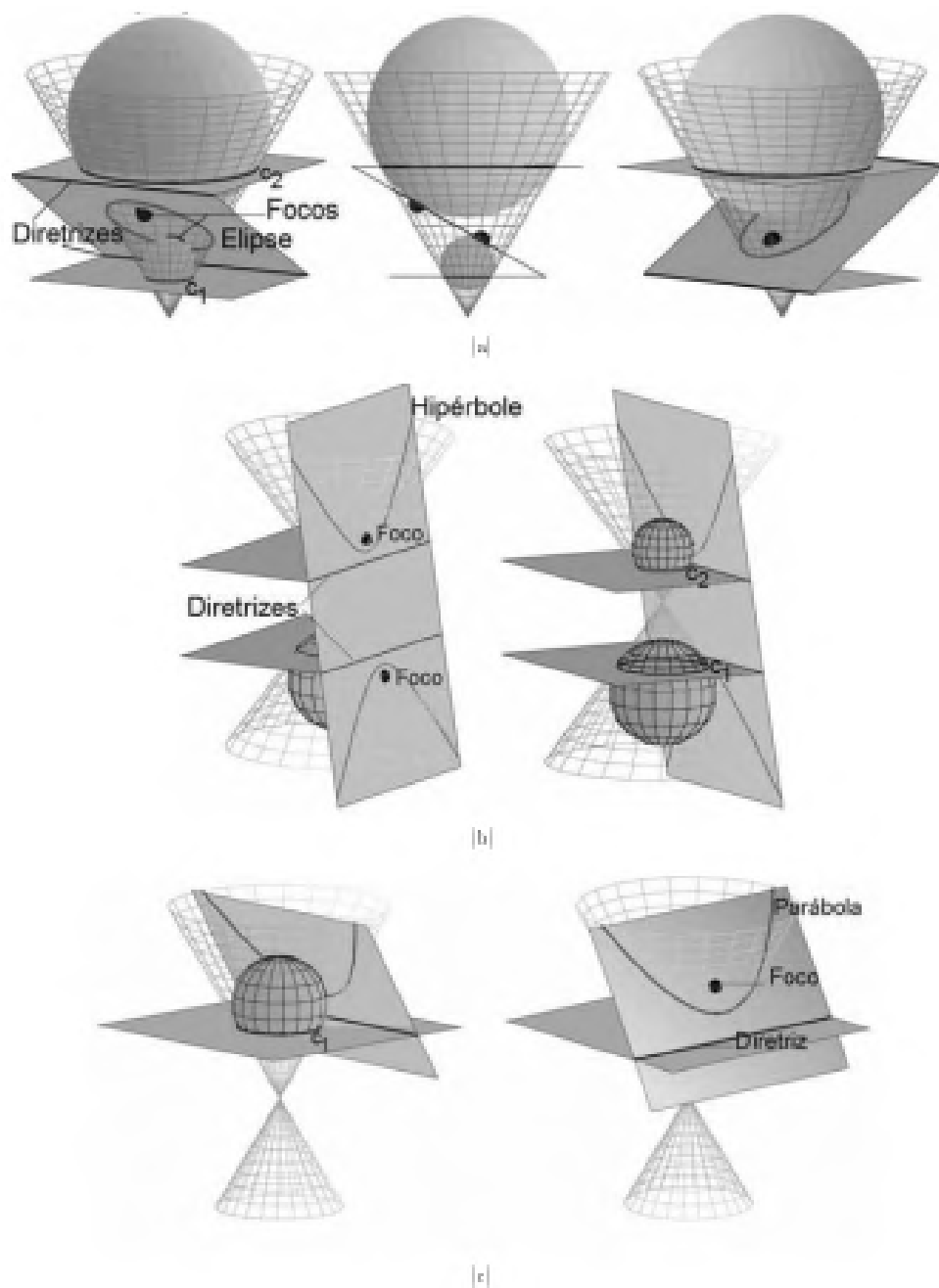
Fonte – [Brisola \(2016\)](#)

Nessa Subseção será realizada a demonstração do Teorema de Dandelin pressupondo os conhecimentos prévios de excentricidade e reta diretriz apresentados nas Definições 1.2.1 e 1.2.2, respectivamente. Em seguida, serão formalizadas as definições como L.G. de cada de tipo de cônica (caracterizada pela excentricidade), definições estas que servirão como fundamento para propriedades posteriores expostas ao longo do Capítulo 1.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Dandelin). *A interseção de um cone de duas folhas S e um plano π que o secciona fora do vértice é denominada cônica e os pontos de tangência das esferas tangentes simultaneamente ao cone e a π , chamadas Esferas de Dandelin, são os focos dessa cônica bem como, se c_1 e c_2 são as circunferências geradas pela interseção das esferas com o cone, a reta gerada da interseção do plano de corte com o plano que contém c_1 ou c_2 é uma diretriz dessa cônica. Essas cônicas são bem definidas através da excentricidade e e cada tipo possui uma propriedade métrica que permite sua definição como L.G.*

A Figura 16 ilustra o Teorema de Dandelin.

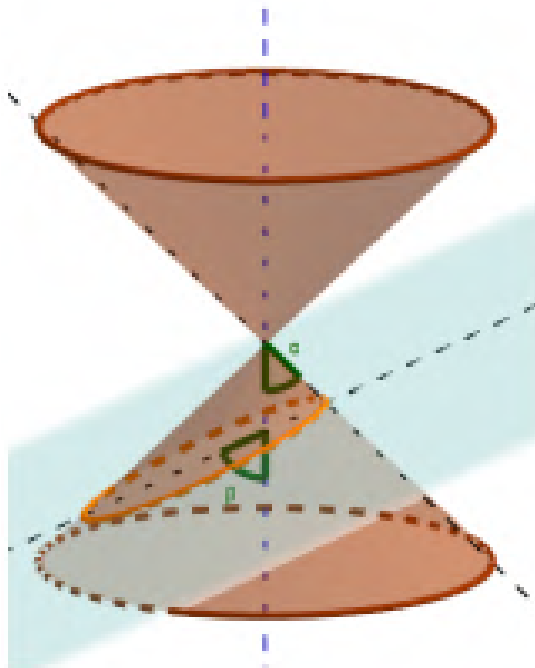
Figura 16 – Esferas de Dandelin e as cônicas



Fonte – Lopes (2011, p. 116)

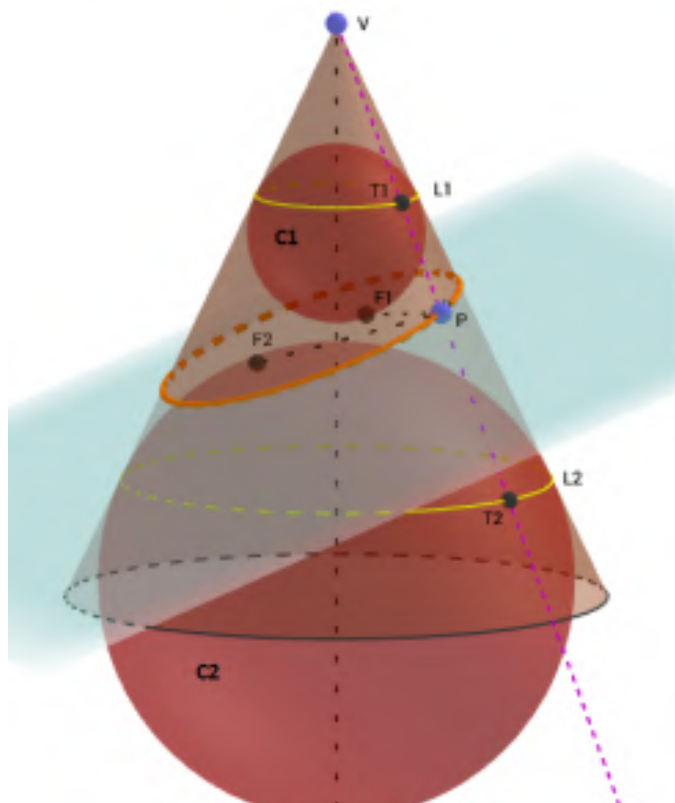
Para demonstrar o Teorema de Dandelin será necessário três Lemas: o da elipse, o da hipérbole e o da parábola. Demonstrados os três Lemas, o Teorema de Dandelin fica completamente provado.

Lema 1 (Teorema de Dandelin para elipse). *Se a excentricidade é um valor no intervalo $0 < e < 1$, ou seja, $\alpha < \beta$ conforme a Figura 17, então o plano π secciona todas as geratrizes do cone em uma única folha. Assim, existem duas Esferas de Dandelin C_1 e C_2 , ambas de um mesmo lado do vértice, que tangenciam simultaneamente o plano nos pontos F_1 e F_2 (focos) e o cone nas circunferências L_1 e L_2 , respectivamente. Essa cônica é denominada Elipse (\mathbf{E}) e possui sua própria propriedade métrica. Além disso, nesse caso, como existem duas Esferas de Dandelin, e conseqüentemente duas circunferências L_1 e L_2 , então \mathbf{E} possui duas retas diretrizes d_1 e d_2 (definidas no Teorema 1.2.1).*

Figura 17 – Inclinação do plano que secciona o cone de duas folhas - Elipse

Fonte – Munoz (2018, p. 8)

Demonstração. Considere um cone de duas folhas S como o da Figura 18 e duas esferas C_1 e C_2 que quando inseridas neste cone, tangenciam o plano de secção π e todas as geratrizes de S . Além disso, considere P um ponto sobre E . A interseção entre S e as esferas C_1 e C_2 são as circunferências L_1 e L_2 , respectivamente.

Figura 18 – Teorema de Dandelin - Elipse

Fonte – Munoz (2018, p. 11)

Sejam T_1 e T_2 as interseções da geratriz do cone que passa por P com as circunferências L_1 e L_2 , respectivamente. Cada geratriz do cone irá formar segmentos de mesmo comprimento entre L_1 e L_2 .

Como os pontos T_1 e F_1 pertencem a esfera de sorte que o plano T_1PF_1 secciona C_1 de modo que o corte gera uma circunferência τ que passa pelos pontos T_1 e F_1 e cujas retas $\overleftrightarrow{PT_1}$ e $\overleftrightarrow{PF_1}$ são tangentes a τ . Logo, pela Proposição 1.2.1, tem-se as seguintes relações:

$$\overline{PF_1} = \overline{PT_1}.$$

Analogamente,

$$\overline{PF_2} = \overline{PT_2}.$$

Então,

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PT_1} + \overline{PT_2} = \overline{T_1T_2},$$

e esta soma será sempre constante, não importa onde o ponto P sobre \mathbf{E} . Em particular, se o ponto da curva escolhido é A_1 ou A_2 , no qual o segmento A_1A_2 equivale a maior distância entre dois pontos dessa curva, tem-se:

$$\overline{A_1F_1} + \overline{A_1F_2} = \overline{T_1T_2}.$$

Como $\overline{A_1F_2} = \overline{A_1F_1} + \overline{F_1F_2}$, temos:

$$2\overline{A_1F_1} + \overline{F_1F_2} = \overline{T_1T_2}. \quad (1.10)$$

Analogamente,

$$2\overline{A_2F_2} + \overline{F_1F_2} = \overline{T_1T_2}. \quad (1.11)$$

Pelas Equações (1.10) e (1.11), $\overline{A_1F_1} = \overline{A_2F_2}$.

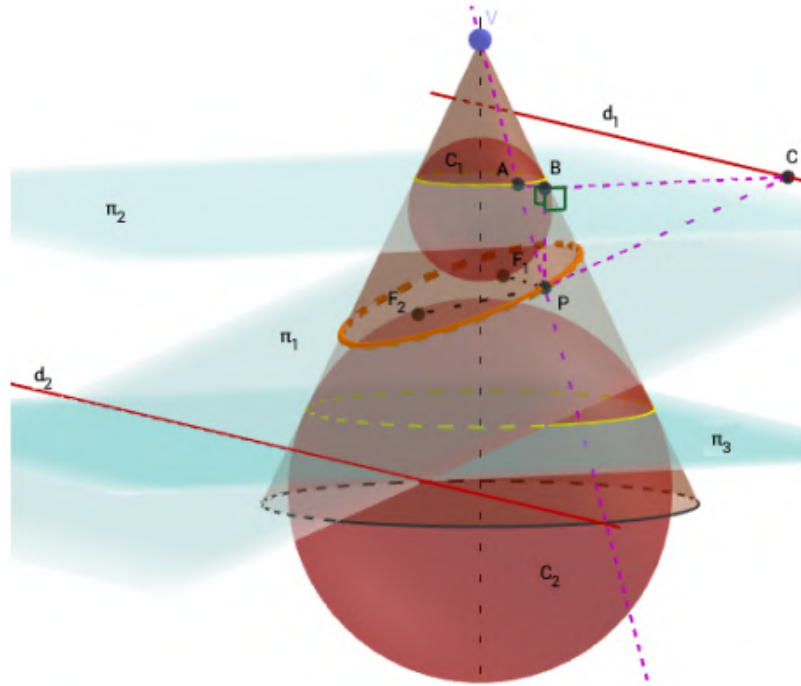
$$\begin{aligned} \overline{A_1F_1} + \overline{A_1F_2} &= \overline{T_1T_2} \\ \overline{A_1F_1} + \overline{F_1F_2} + \overline{A_2F_2} &= \overline{T_1T_2} \\ \overline{A_1A_2} &= \overline{T_1T_2}. \end{aligned}$$

Concluimos que seja P um ponto sobre \mathbf{E} , tem-se a seguinte relação:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{A_1A_2}. \quad (1.12)$$

Resta provar que existem somente as duas retas fixas, d_1 e d_2 , que são diretrizes da elipse.

Figura 19 – Retas diretrizes de uma Elipse



Fonte – Munoz (2018, p. 12)

Considere os pontos B e C como as projeções ortogonais de P sobre o plano π_2 (plano que contém L_1) e a reta d_1 , definida no Lema 1.

Tomando os triângulos \widehat{ABP} e \widehat{CBP} , tem-se:

$$\overline{PB} = \overline{PA} \cdot \cos(\alpha) \quad (1.13)$$

$$\overline{PB} = \overline{PC} \cdot \cos(\beta). \quad (1.14)$$

Igualando as Equações (1.13) e (1.14), chega-se a relação:

$$\overline{PA} \cdot \cos(\alpha) = \overline{PC} \cdot \cos(\beta) \Rightarrow \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} \quad (1.15)$$

Como A e F_1 são pontos de tangência na esfera C_1 em relação às retas \overleftrightarrow{PA} e $\overleftrightarrow{PF_1}$, então pela Proposição 1.2.1:

$$\overline{PA} = \overline{PF_1} \quad (1.16)$$

Substituindo a Equação (1.16) em (1.15), e considerando que $\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} = e$, na qual e corresponde à excentricidade dessa elipse, então:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PF_1}}{\overline{PC}} &= e \\ \frac{\text{dist}(P, F_1)}{\text{dist}(P, d_1)} &= e. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Analogamente, comprova-se que:

$$\frac{\text{dist}(P, F_2)}{\text{dist}(P, d_2)} = e \quad (1.18)$$

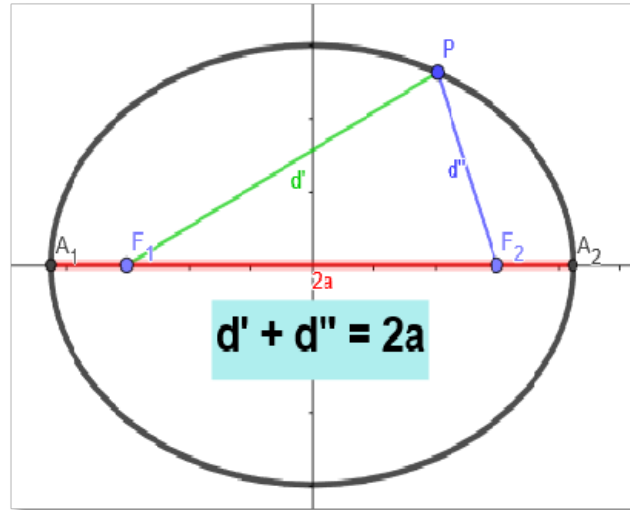
As Equações (1.17) e (1.18) correspondem à definição de retas diretrizes de uma cônica. Portanto, d_1 e d_2 são as diretrizes de \mathbf{E} .

□

Fica estabelecida, então, a equivalência entre a curva \mathbf{E} obtida pela interseção em um cone de duas folhas nas condições pré estabelecidas no Lema 1 chamada por Apolônio de Elipse e o conjunto de pontos P que obedece a relação da Equação (1.12). Assim, pode-se tomar a seguinte definição para Elipse:

Definição 1.2.3 (Elipse como L.G.). *Elipse é o conjunto de todos os pontos em um plano pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, denominados focos (F_1 e F_2), é constante e igual a distância entre A_1 e A_2 , no qual $\overline{A_1A_2}$ é a maior distância entre dois pontos da elipse e de maneira que $\overline{A_1A_2}$ seja maior que a distância focal $\overline{F_1F_2}$.*

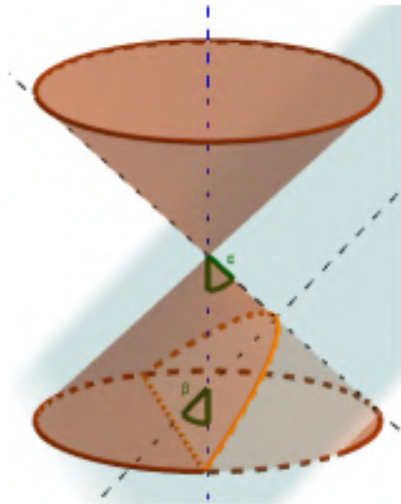
Figura 20 – Elipse como L.G.



Fonte – Elaborado pela autora

Apesar de receber o nome de Dandelin, o Lema 2 não foi provado por Dandelin e sim por Pierce Morton.

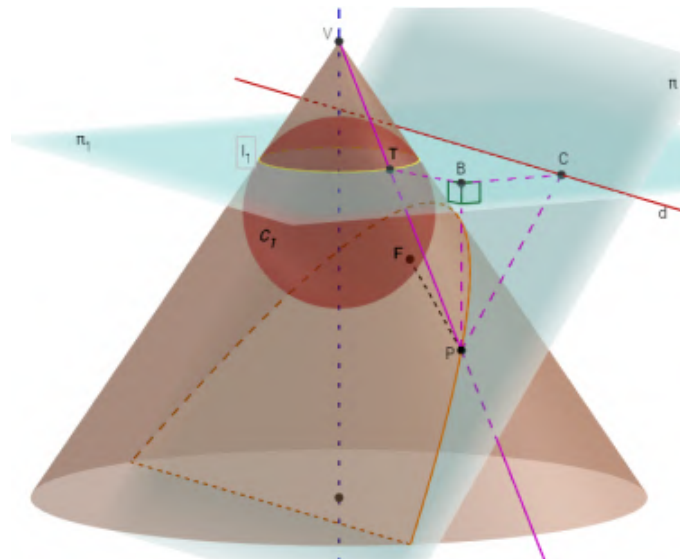
Lema 2 (Teorema de Dandelin para parábola). *Se a excentricidade é igual a um $e = 1$, ou seja, $\alpha = \beta$ conforme a Figura 21, então o plano π secciona perpendicularmente uma das geratrizes do cone em uma única folha, logo, existe uma Esfera de Dandelin que tangencia simultaneamente o plano e o cone em um ponto F (foco). Essa cônica é denominada Parábola (\mathbf{p}) e possui sua própria propriedade métrica. Além disso, nesse caso, como existe uma Esfera de Dandelin, e conseqüentemente uma circunferência c_1 e c_2 (definidas no Teorema 1.2.1), então \mathbf{p} possui uma reta diretriz d .*

Figura 21 – Inclinação do plano que secciona o cone de duas folhas - Parábola

Fonte – Munoz (2018, p. 8)

Demonstração. Considere um cone de duas folhas S e uma esfera C_1 que quando inserida neste cone, tangencia o plano de interseção π no ponto F e o cone S . Além disso, considere P um ponto qualquer sobre \mathbf{p} . A interseção entre S e a esfera C_1 é a circunferência l_1 contida no plano π_1 .

Sejam d a reta que resulta da interseção entre π e π_1 , os pontos B e C as projeções ortogonais de P sobre o plano π_1 e a reta d , respectivamente, e T o ponto de interseção da circunferência l_1 com uma geratriz do cone \overrightarrow{VP} .

Figura 22 – Teorema de Dandelin - Parábola

Fonte – Munoz (2018, p. 48)

Note que o ângulo \widehat{BPT} é alterno interno com o ângulo de abertura do cone, ou seja, ele mede α . Perceba também que o ângulo \widehat{BPC} é correspondente ao ângulo que o plano π faz com o eixo do cone, portanto ele mede β .

Considerando os triângulos BPT e BPC , temos uma congruência de triângulos pelo caso *Ângulo-Lado-Ângulo* (ALA), pois o lado BP é comum e como $\alpha = \beta \Rightarrow \widehat{BPT} = \widehat{BPC}$. Além de

ambos serem retângulos em B . Assim:

$$\overline{PT} = \overline{PC}. \quad (1.19)$$

Como os pontos T e F pertencem a esfera C_1 de sorte que \overleftrightarrow{PT} e \overleftrightarrow{PF} são tangentes a ela, então o plano PTF secciona C_1 de modo que o corte gera uma circunferência τ que passa pelos pontos T e F e cujas retas \overleftrightarrow{PT} e \overleftrightarrow{PF} são tangentes a τ . Logo, pela Proposição 1.2.1, tem-se que:

$$\overline{PF} = \overline{PT}. \quad (1.20)$$

Pelas Equações (1.19) e (1.20), concluir-se que:

$$\overline{PF} = \overline{PC}. \quad (1.21)$$

Logo a distância entre o ponto P , pertencente a \mathbf{p} , e o ponto F é a mesma que a de P e a reta d .

Note também que:

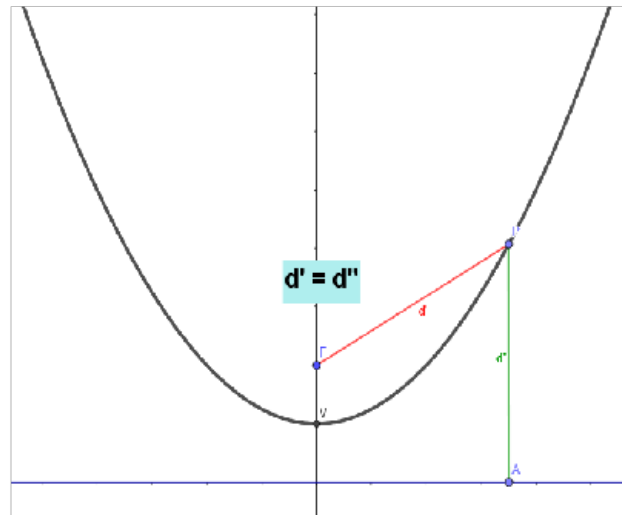
$$\begin{aligned} \frac{\overline{PF}}{\overline{PC}} &= 1 \\ \frac{\text{dist}(P, F)}{\text{dist}(P, d)} &= 1 \\ \frac{\text{dist}(P, F)}{\text{dist}(P, d)} &= \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} \\ \frac{\text{dist}(P, F)}{\text{dist}(P, d)} &= e. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Portanto, d é a reta diretriz da parábola.

□

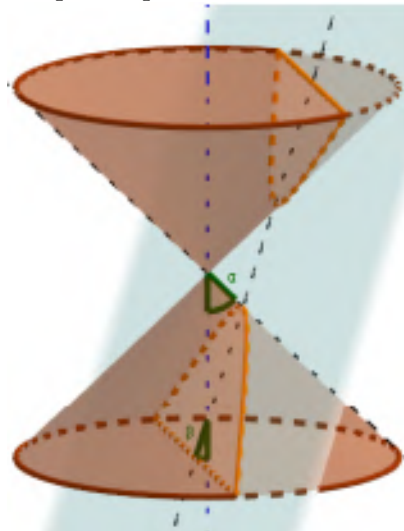
Fica estabelecida, então, a equivalência entre a curva \mathbf{p} obtida pela interseção em um cone de duas nas condições pré estabelecidas no Lema 2 chamada por Apolônio de Parábola e o conjunto de pontos P que obedece a relação da Equação (1.22). Assim, pode-se tomar a seguinte definição para a Parábola:

Definição 1.2.4 (Parábola como L.G.). *Parábola é o conjunto de todos os pontos em um plano cuja distância a um ponto fixo F é sempre igual à distância a uma reta dada.*

Figura 23 – Parábola como L.G.

Fonte – Elaborado pela autora

Lema 3 (Teorema de Dandelin para hipérbole). *Se a excentricidade é um valor maior que 1 $e > 1$, ou seja, $\alpha > \beta$ conforme a Figura 24, então o plano π secciona as duas folhas do cone, permitindo a existência de duas Esferas de Dandelin C_1 e C_2 que tangenciam simultaneamente o plano π nos pontos distintos F_1 e F_2 e o cone nas circunferências L_1 e L_2 , respectivamente. Essa cônica é denominada Hipérbole (\mathbf{H}) e possui sua própria propriedade métrica. Além disso, nesse caso, como existem duas Esferas de Dandelin, e conseqüentemente duas circunferências L_1 e L_2 , então \mathbf{H} possui duas retas diretrizes d_1 e d_2 (definidas no Teorema 1.2.1).*

Figura 24 – Inclinação do plano que secciona o cone de duas folhas - Hipérbole

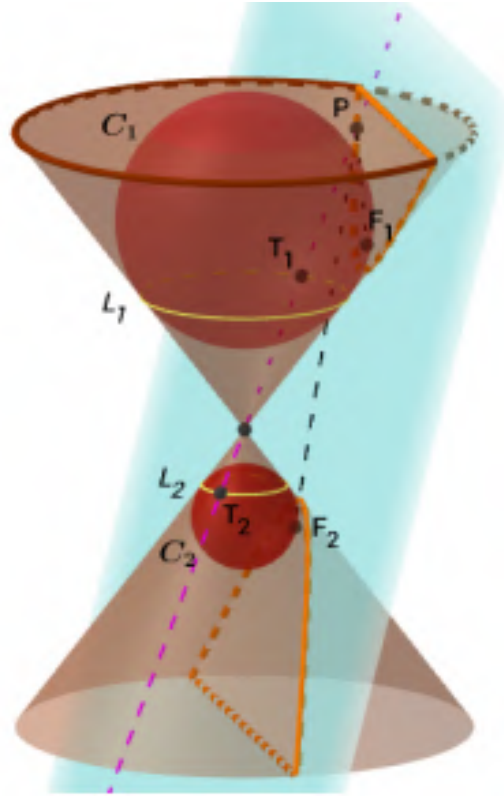
Fonte – Munoz (2018, p. 8)

Demonstração. Considere um cone de duas folhas S conforme a Figura 25 e duas esferas C_1 e C_2 que quando inseridas neste cone, tangenciam o plano de secção π nos pontos F_1 e F_2 e o cone S nas circunferências L_1 e L_2 , respectivamente. Além disso, considere P um ponto qualquer sobre \mathbf{H} , interseção de S com o plano π , e o ponto V como o vértice do cone.

Traça-se a geratriz do cone que passa por P de modo que os pontos T_1 e T_2 pertençam a essa geratriz e às circunferências L_1 e L_2 , respectivamente. Portanto, $\overline{T_1T_2}$ é o comprimento do segmento

entre L_1 e L_2 que passa por V .

Figura 25 – Teorema de Dandelin - Hipérbole



Fonte – Munoz (2018, p. 29)

Como os pontos T_1 e F_1 pertencem a esfera de sorte que $\overleftrightarrow{PT_1}$ e $\overleftrightarrow{PF_1}$ são tangentes à esfera C_1 , então o plano T_1PF_1 secciona C_1 de modo que o corte gera uma circunferência τ que passa pelos pontos T_1 e F_1 e cujas retas $\overleftrightarrow{PT_1}$ e $\overleftrightarrow{PF_1}$ são tangentes a τ . Logo, pela Proposição 1.2.1, tem-se as seguintes relações:

$$\overline{PF_1} = \overline{PT_1}.$$

Analogamente,

$$\overline{PF_2} = \overline{PT_2}.$$

Então,

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = |\overline{PT_1} - \overline{PT_2}| = \overline{T_1T_2},$$

e esta diferença será sempre constante, não importa onde o ponto P sobre a interseção do plano com o cone é escolhido. Em particular, se o ponto da curva é escolhido for A_1 ou A_2 , no qual o segmento $\overline{A_1A_2}$ é a menor distância entre dois pontos de \mathbf{H} estando A_1 e A_2 em ramos opostos, tem-se:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1F_1} - \overline{A_1F_2}| &= |\overline{A_1T_1} - \overline{A_1T_2}| \\ |\overline{A_1F_1} - \overline{A_1A_2} - \overline{A_2F_2}| &= |\overline{A_1T_1} - \overline{A_1T_2}|. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Analogamente,

$$\left| \overline{A_2 F_2} - \overline{A_1 A_2} - \overline{A_1 F_1} \right| = \left| \overline{A_1 T_1} - \overline{A_1 T_2} \right|. \quad (1.24)$$

Pelas Equações (1.23) e (1.24), $\overline{A_1 F_1} = \overline{A_2 F_2}$. Logo,

$$\begin{aligned} \left| \overline{A_1 F_1} - \overline{A_1 A_2} - \overline{A_2 F_2} \right| &= \left| \overline{T_1 T_2} \right| \\ \left| \overline{A_1 F_1} - \overline{A_1 A_2} - \overline{A_1 F_1} \right| &= \overline{T_1 T_2} \\ \overline{A_1 A_2} &= \overline{T_1 T_2}. \end{aligned}$$

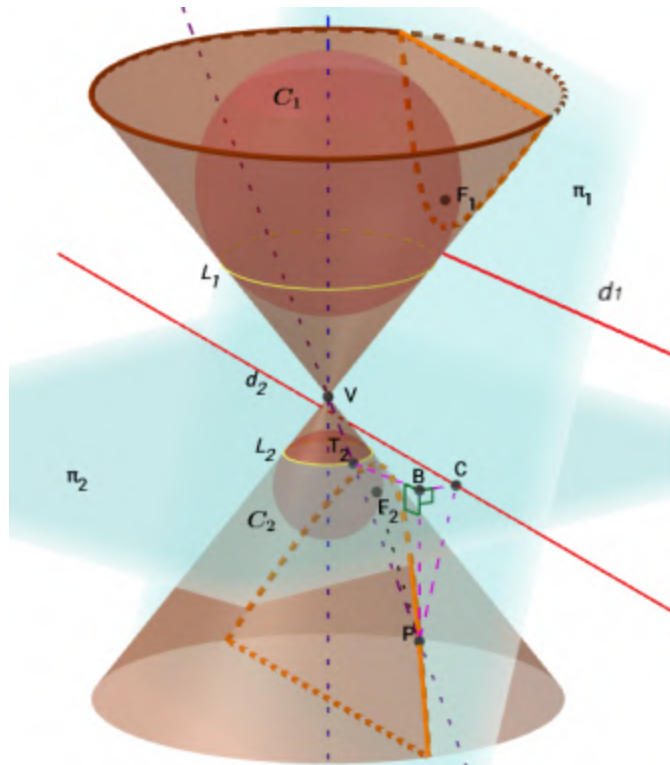
Concluimos que seja P um ponto qualquer sobre \mathbf{H} , tem-se a seguinte relação:

$$\left| \overline{P F_1} - \overline{P F_2} \right| = \overline{A_1 A_2}. \quad (1.25)$$

Ou seja, dado um ponto P qualquer sobre \mathbf{H} e F_1 e F_2 os pontos de tangência das Esferas de Dandelin no plano π , então a Equação (1.25) sempre é satisfeita.

Resta provar que existem somente as duas retas fixas, d_1 e d_2 , que são diretrizes da hipérbole.

Figura 26 – Retas diretrizes de uma Hipérbole



Fonte – Munoz (2018, p. 30)

Considere os pontos B e C como as projeções ortogonais de P sobre o plano π_2 (plano que contém L_2) e a reta d_2 , definida no Lema 3 e ilustrada na Figura 26. Além disso, note que o ângulo $\widehat{T_2 P B}$ é alterno interno com o ângulo que a geratriz do cone $T_2 P$ faz com seu eixo, logo ele mede α . Assim como o ângulo $\widehat{C P B}$ corresponde ao ângulo (β) formado entre o plano π e o eixo do cone, pois $\overline{P C} \subset \pi$ e $\overline{P B}$ é paralelo ao eixo.

Tomando os triângulos T_2BP e CBP , tem-se:

$$\overline{PB} = \overline{PT_2} \cdot \cos(\alpha) \quad (1.26)$$

$$\overline{PB} = \overline{PC} \cdot \cos(\beta). \quad (1.27)$$

Igualando as Equações (1.26) e (1.27), chega-se a relação:

$$\overline{PT_2} \cdot \cos(\alpha) = \overline{PC} \cdot \cos(\beta) \Rightarrow \frac{\overline{PT_2}}{\overline{PC}} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}. \quad (1.28)$$

Como T_2 e F_2 são pontos de tangência na esfera C_1 em relação às retas $\overleftrightarrow{PT_2}$ e $\overleftrightarrow{PF_2}$, então pela Proposição 1.2.1:

$$\overline{PT_2} = \overline{PF_2}. \quad (1.29)$$

Substituindo a Equação (1.29) em (1.28), e considerando que $\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} = \mathbf{e}$, na qual \mathbf{e} corresponde à excentricidade dessa hipérbole, então:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PF_2}}{\overline{PC}} &= \mathbf{e} \\ \frac{\text{dist}(P, F_2)}{\text{dist}(P, d_2)} &= \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Analogamente, comprova-se que:

$$\frac{\text{dist}(P, F_1)}{\text{dist}(P, d_1)} = \mathbf{e}. \quad (1.31)$$

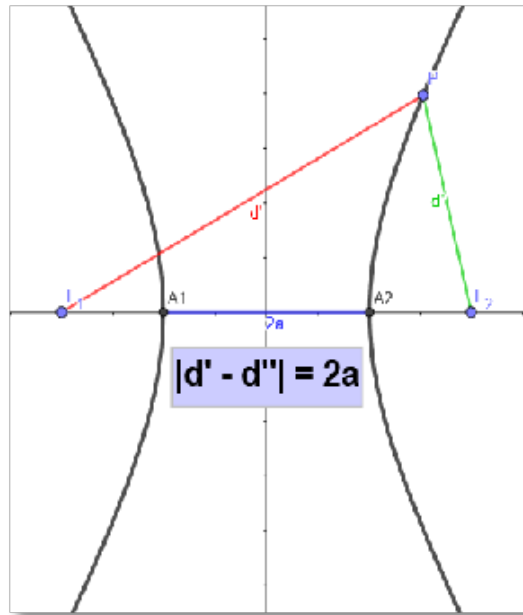
As Equações (1.30) e (1.31) correspondem à definição de retas diretrizes de uma cônica. Portanto, d_1 e d_2 são as diretrizes de \mathbf{H} .

□

Fica estabelecida, então, a equivalência entre a curva \mathbf{H} obtida pela interseção em um cone de duas folhas nas condições pré definidas no Lema 3 chamada por Apolônio de Hipérbole e o conjunto de pontos P que obedece a relação da Equação (1.25). Assim, pode-se tomar a seguinte definição para Hipérbole:

Definição 1.2.5 (Hipérbole como L.G.). *Hipérbole é o conjunto de todos os pontos coplanares para os quais a diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (chamados de focos), em módulo, é constante e igual a distância entre os pontos da hipérbole A_1 e A_2 mais próximos, sendo estes localizados em ramos opostos.*

Figura 27 – Hipérbole como L.G.



Fonte – Elaborado pela autora

Pelos Lemas 1, 2 e 3 o Teorema 1.2.1 está totalmente demonstrado.

1.3 CONSTRUÇÃO E LOCALIZAÇÃO DOS ELEMENTOS DAS CÔNICAS

Nessa seção, serão expostos os gráficos das cônicas não degeneradas (elipse, parábola e hipérbole) com seus respectivos elementos no plano cartesiano a fim de mostrar ao leitor como as cônicas são apresentadas aos alunos atualmente. Posteriormente, será apresentada as construções das cônicas com o auxílio de barbante, bem como a demonstração de que tal construção é compatível com a definição das cônicas como L.G. formalizadas da Seção 1.2.

Pode-se encontrar as animações relativas a essas construções nos links:

- Elipse (<<https://www.geogebra.org/m/dbver82d>>);
- Parábola (<<https://www.geogebra.org/m/hdpp9dx6>>);
- Hipérbole (<<https://www.geogebra.org/m/bbbdabvv>>).

Para finalizar, será mostrado como localizar geometricamente os elementos de uma curva cônica a partir do seu traço. No caso da elipse serão localizados seus focos, no da parábola seu foco e diretriz e no da hipérbole seus focos e suas assíntotas.

1.3.1 Elipse

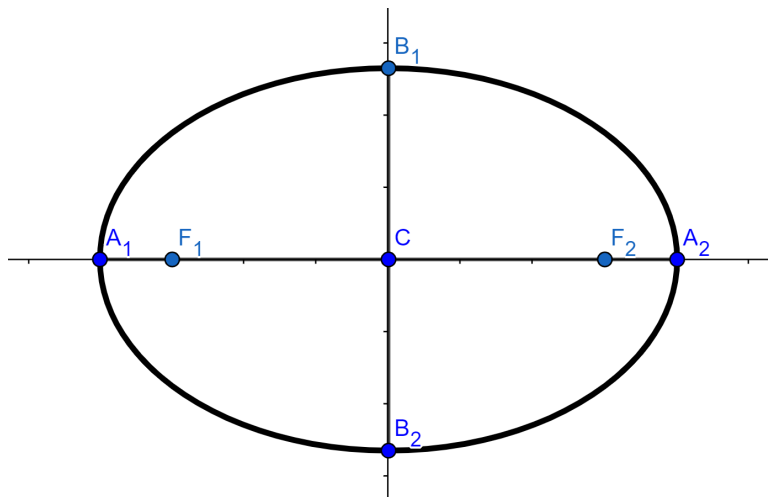
Uma elipse qualquer possui dois eixos de simetria. O segmento entre os seus dois pontos mais afastados é chamado Eixo Maior, já o Eixo Menor pertence a reta mediatriz do Eixo Maior. A

interseção desses eixos é o *centro da elipse* e as interseções desses eixos com a elipse são denominados vértices, conforme mostra a Figura 28.

Considerando a Definição 1.2.3, tem-se que, dada uma elipse, podemos, sem perda de generalidade, posicionar, convenientemente no plano cartesiano, os pontos A_1 e A_2 sobre o eixo das abscissas. Fazendo isso obtêm-se os seguintes elementos:

Figura 28 – Elementos da elipse

- Focos: F_1 e F_2 ;
- Vértices: A_1 , A_2 , B_1 e B_2 ;
- Centro: C , ponto médio de $\overline{A_1A_2}$;
- Eixo maior: $\overline{A_1A_2} = 2a$, $a \in \mathbb{R}_+^*$;
- Eixo menor: $\overline{B_1B_2} = 2b$, $b \in \mathbb{R}_+^*$;
- Distância focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$, $c \in \mathbb{R}_+^*$ e $2a > 2c$;
- Excentricidade: corresponde ao número e , com $0 < e < 1$.



Fonte – Elaborado pela autora

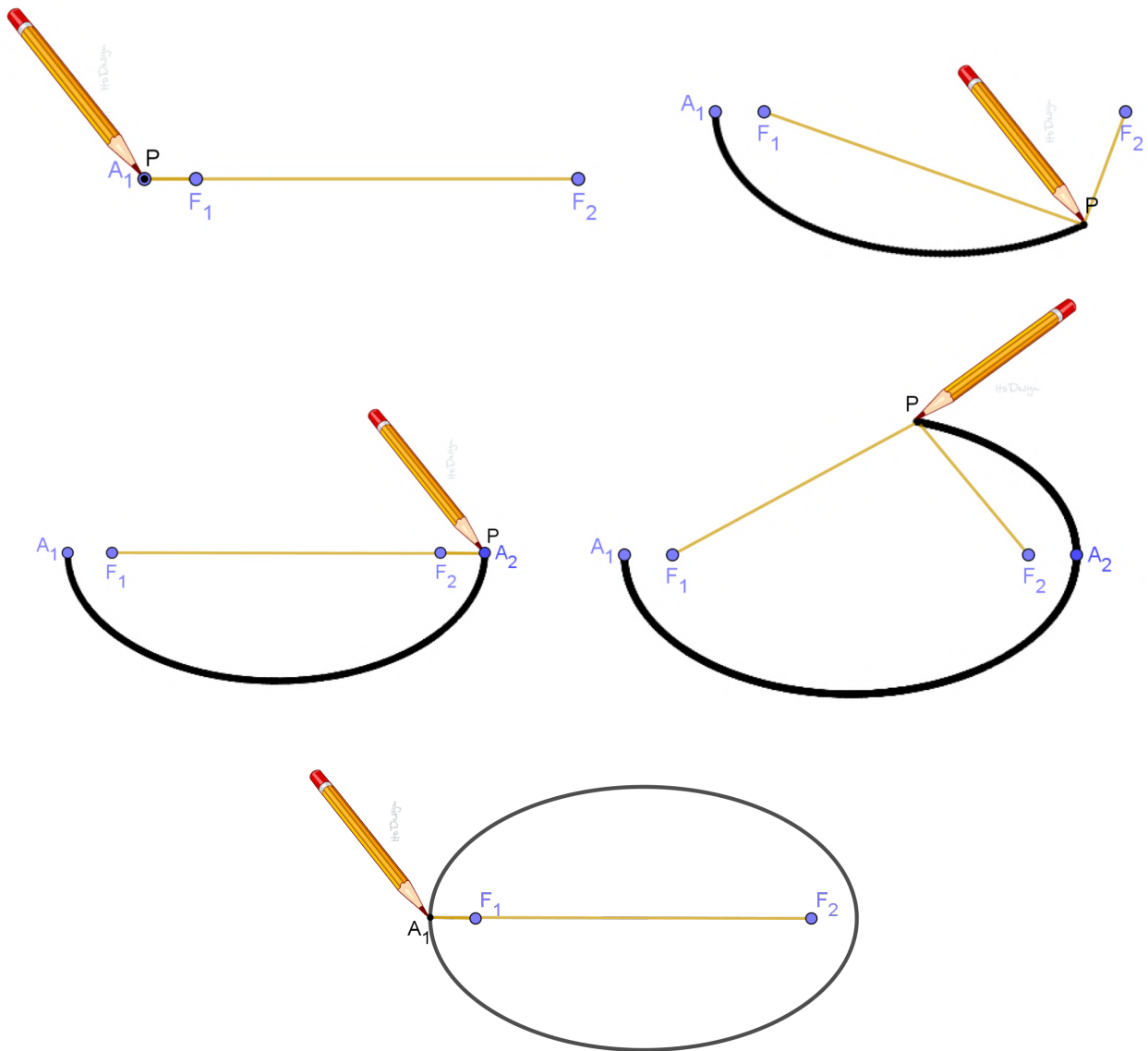
Será apresentada uma das formas de construção de uma elipse que é a ilustrada no livro didático # Contato Matemática, 3ºano, de Souza e Garcia (2016). Tal construção foi realizada nas sequências didáticas retratadas no Capítulo 2.

Utilizando um pedaço de barbante e duas tachinhas pode-se construir uma elipse através dos passos (ver Figura 29):

- Tome um pedaço de barbante de tamanho $2a$;
- Em seguida, marque dois pontos fixos F_1 e F_2 na cartolina de modo que a distância entre eles seja menor que $2a$;
- Com o auxílio das tachinhas, fixe as extremidades do barbante em F_1 e F_2 ;
- Encoste o lápis no barbante e estique-o;
- Faça o lápis deslizar pelo barbante esticado traçando na cartolina essa trajetória.

Afirmção 1.3.1. *A construção da Figura 29 gera uma curva cujos pontos satisfazem a condição de L.G. apresentada na Definição 1.2.3, ou seja, a curva obtida é uma elipse.*

Figura 29 – Construção com barbante de uma elipse



Fonte – Elaborado pela autora

Demonstração. Considere um ponto P arbitrário sobre a curva. Sendo o barbante de tamanho $2a$, tem-se que, se P pertence à curva traçada, então:

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a. \quad (1.32)$$

Além disso, se P coincide com uma das extremidades da curva contidas na reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$, A_1 ou A_2 , pode-se chegar a relação:

$$\begin{aligned} \text{dist}(A_1, F_1) + \text{dist}(A_1, F_2) &= 2a \\ \text{dist}(A_1, F_1) + (\text{dist}(A_1, F_1) + \text{dist}(F_1, F_2)) &= 2a \\ 2\text{dist}(A_1, F_1) + \text{dist}(F_1, F_2) &= 2a \\ 2\text{dist}(A_1, F_1) &= 2a - \text{dist}(F_1, F_2). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Do mesmo modo,

$$2\text{dist}(A_2, F_2) = 2a - \text{dist}(F_1, F_2). \quad (1.34)$$

Igualando as Equações (1.33) e (1.34), concluímos que $\text{dist}(A_1, F_1) = \text{dist}(A_2, F_2)$.

Assim a distância do eixo maior dessa curva mede:

$$\begin{aligned} \text{dist}(A_1, A_2) &= \text{dist}(A_1, F_1) + \text{dist}(F_1, F_2) + \text{dist}(A_2, F_2) \\ &= 2\text{dist}(A_1, F_1) + \text{dist}(F_1, F_2) \\ &= 2a. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Comparando as Equações (1.32) e (1.35), chega-se a definição geométrica dos pontos dessa curva:

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = \text{dist}(A_1, A_2). \quad (1.36)$$

Logo, a curva foi construída de forma que, para qualquer ponto a ela pertencente, a soma das suas distâncias aos focos é constante e igual ao tamanho do eixo maior ($2a$), ou seja, esse L.G. é uma elipse como na Definição 1.2.3.

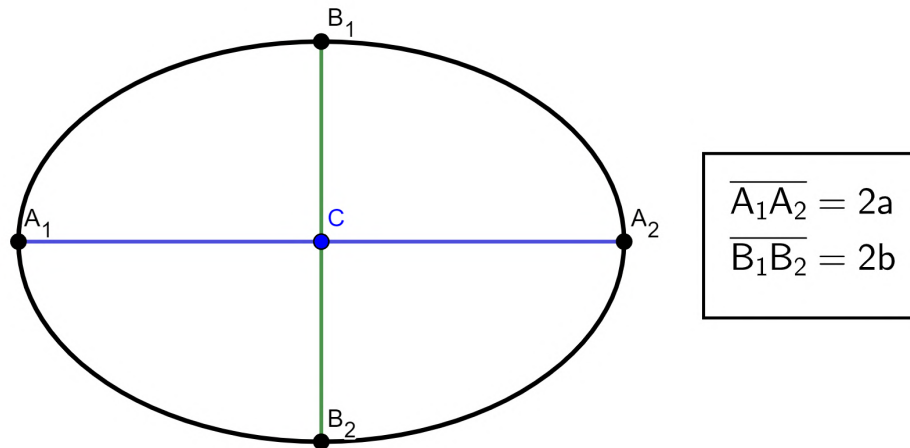
□

Conforme visto na Seção 1.2, a definição de elipse, proposta por Apolônio, como uma seção em um cone de duas folhas é equivalente a definição gerada a partir do Lema 1. Assim sendo, dado o traço de uma elipse (que pode ser obtido simplesmente pela interseção de um plano com uma determinada inclinação e um cone de duas folhas (ver Figura 17), ou seja, sem necessariamente conhecer seus focos) sempre existem dois pontos fixos F_1 e F_2 que validam essa elipse como L.G. apresentado na Definição 1.2.3. Observe como localizar tais pontos.

- Identificar os focos F_1 e F_2 de uma elipse

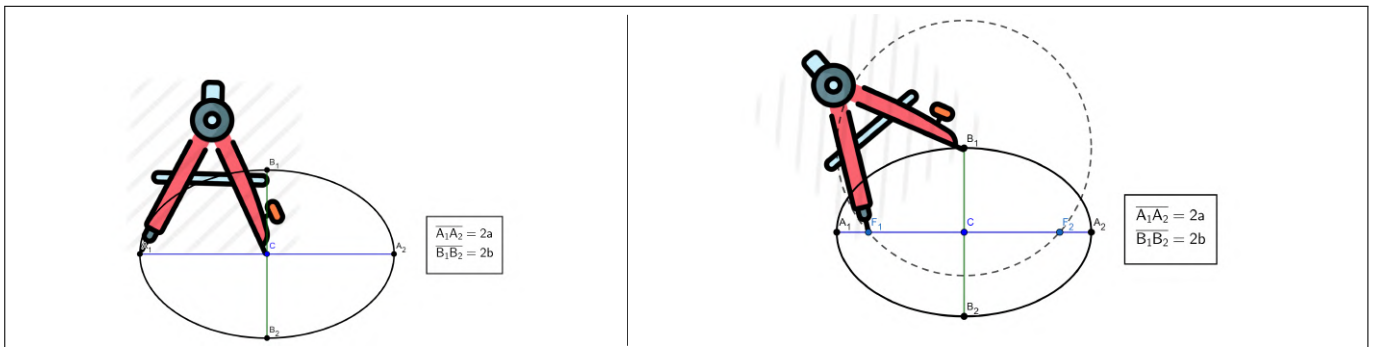
Assim como é pode-se construir uma elipse a partir de seus focos, também é possível fazer o processo inverso: dado o traço de uma elipse, localizar os seus pontos focais. Será mostrado como determiná-los a seguir.

Em consonância com a Figura 28, a distância entre seus vértices opostos mais afastados mede $2a$ e a dos outros dois é de $2b$, com a e $b \in \mathbb{R}_+^*$ conforme ilustrado na Figura 30.

Figura 30 – Eixos maior e menor de uma elipse

Fonte – Elaborado pela autora

Para determinar o local de seus focos com um compasso, basta abrir o compasso até que suas pontas coincidam com os pontos A_1 e C , em seguida, colocar a ponta seca em B_1 e, mantendo a mesma abertura, tracar uma circunferência. Os dois pontos de interseção, F_1 e F_2 , entre o eixo maior e a circunferência são os focos da elipse. Esse processo geométrico é ilustrado pela Figura 31.

Figura 31 – Indicação dos focos de uma elipse através de uma abordagem geométrica

Fonte – Elaborado pela autora

Tomando como referência as notações adotadas na Figura 28, a demonstração dessa construção é quase imediata visto que se traçados os eixos da elipse, toma-se um dos vértices da elipse pertencente ao seu eixo menor, o vértice B_1 , por exemplo. Como a circunferência centrada em B_1 construída possui raio igual a $\overline{A_1C} = a$, então, por construção, B_1 é equidistante de F_1 e F_2 , ou seja, $\overline{F_1B_1} = \overline{B_1F_2} = a$. Assim, $\overline{F_1B_1} + \overline{B_1F_2} = 2a$. Como os focos de uma elipse são os únicos pontos no segmento focal que satisfazem essas propriedades métricas, pode-se concluir que os pontos F_1 e F_2 marcados na construção são os focos da elipse.

Além disso, tomando o triângulo retângulo B_1CF_1 (ver Figura 31), pode-se concluir também que toda elipse obedece a relação de Pitágoras:

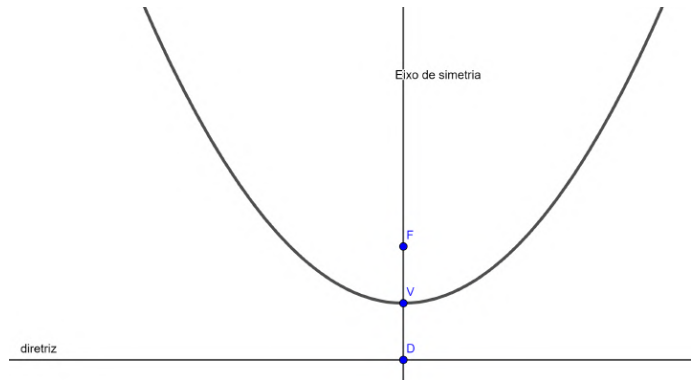
$$b^2 + c^2 = a^2. \quad (1.37)$$

1.3.2 Parábola

Dada uma parábola, podemos, sem perda de generalidade, posicionar, convenientemente no plano cartesiano, seu vértice na origem dos eixos cartesianos, sua diretriz paralela ao eixo das abscissas e seu eixo de simetria sobre o eixo das ordenadas. Assim teremos os seguintes elementos:

Figura 32 – Elementos da parábola

- Foco: F ;
- Reta diretriz: d ;
- Vértice: V ;
- Eixo de simetria ou Eixo focal: \overleftrightarrow{FV} ;
- Interseção do eixo de simetria e da diretriz: D
- Parâmetro: $p = 2\overline{FV} = 2\overline{VD} = \overline{FD}$;
- Excentricidade: corresponde ao número e , com $e = 1$.



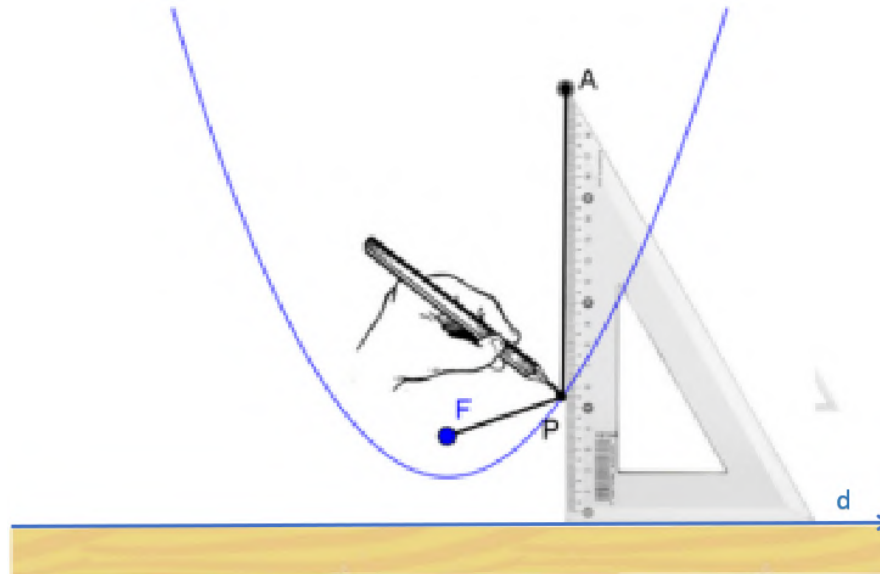
Fonte – Elaborado pela autora

Será apresentada uma das formas de construção de uma parábola³ que é a ilustrada no livro didático # Contato Matemática, 3º ano, de Souza e Garcia (2016). Tal construção foi realizada nas sequências didáticas retratadas no Capítulo 2.

Utilizando um pedaço de barbante, um esquadro, uma régua e uma tachinha pode-se construir uma parábola através dos passos:

- Tome um pedaço de barbante cujo comprimento seja igual ao maior cateto de um esquadro escaleno (ver Figura 33);
- Trace uma reta r qualquer na cartolina e fixe uma régua sobre ela durante o processo de desenho;
- Apoie o lado menor do esquadro sobre a régua fixada e amarre uma das extremidades do barbante na ponta do esquadro que mede 60° ;
- Marque um ponto F na cartolina de modo que a distância entre ele e a reta r seja positiva e menor que o tamanho do cateto maior do esquadro;
- Com o auxílio de uma tachinha, fixe a outra extremidade do barbante no ponto F ;
- Desloque o esquadro sobre a régua e, simultaneamente, desenhe a parábola mantendo, com o auxílio de um lápis, o barbante esticado e encostado no esquadro.

³ Há uma infinidade de pontos que compõem uma parábola, logo é impossível representá-la completamente de forma física. Portanto, a construção referida à parábola nessa Seção corresponde apenas a uma pequena parte dos seus pontos mais próximos ao seu foco e diretriz, mas suficientes para inferir o comportamento dos demais.

Figura 33 – Construção com barbante de uma parábola

Fonte – Moreira (2017, p. 84)

Afirmção 1.3.2. A construção da Figura 33 gera uma curva cujos pontos satisfazem a condição de L.G. apresentada na Definição 1.2.4, ou seja, a curva obtida é uma parábola.

Demonstração. Sejam os pontos A e F pontos definidos conforme a Figura 33, t o comprimento do cateto do esquadro que não estará apoiado na régua, s o comprimento do barbante, sendo $s = t$, d a reta representada pela régua fixada e P um ponto qualquer sobre a curva traçada.

Pode-se estabelecer as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
 s &= t \\
 \text{dist}(A, P) + \text{dist}(P, F) &= \text{dist}(A, d) \\
 \text{dist}(A, P) + \text{dist}(P, F) &= \text{dist}(A, P) + \text{dist}(P, d) \\
 \cancel{\text{dist}(A, P)} + \text{dist}(P, F) &= \cancel{\text{dist}(A, P)} + \text{dist}(P, d) \\
 \text{dist}(P, F) &= \text{dist}(P, d).
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Portanto, a curva foi construída de forma que, para qualquer ponto P a ela pertencente, a distância desse ponto ao foco é igual a distância desse ponto à uma reta dada exterior à curva e perpendicular ao seu eixo de simetria, então, esse L.G. é uma parábola de acordo com a Definição 1.2.4.

□

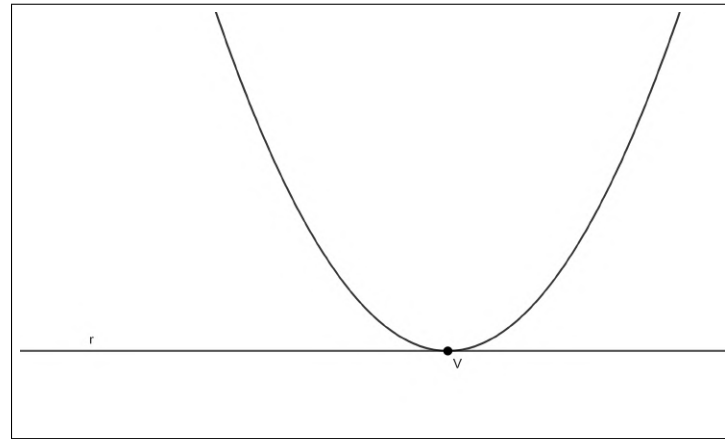
Conforme visto na Seção 1.2, a definição de parábola proposta por Apolônio como uma seção em um cone de duas folhas é equivalente a definição gerada a partir do Lema 2. Assim sendo, dado o traço de uma parábola (que pode ser obtido simplesmente pela interseção de um plano com uma determinada inclinação e um cone de duas folhas (ver Figura 21), ou seja, sem necessariamente conhecer seu foco e diretriz) sempre existem uma reta e um ponto fixo F fora dela que validam essa parábola como L.G. apresentado na Definição 1.2.4. Observe como localizá-los.

- Identificar o foco F e a reta diretriz de uma parábola.

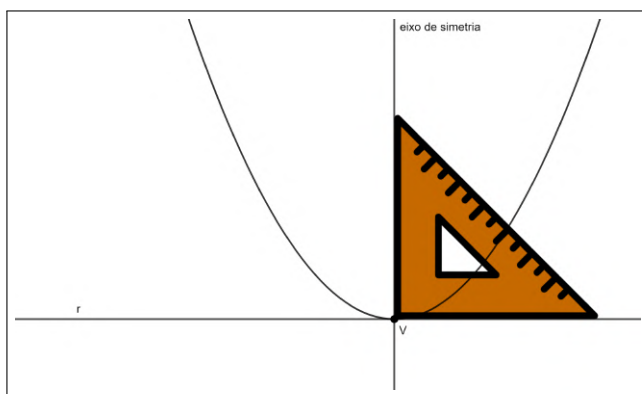
Será apresentado um algoritmo para determinação do foco e reta diretriz de uma parábola utilizando régua e compasso, parte da demonstração dessa construção foi deslocada para o APÊNDICE (C) por razões de organização e estética.

Sem perda de generalidade, considere uma parábola de concavidade para cima e vértice V . Para indicar geometricamente a localização do foco e da reta diretriz desta parábola deve-se seguir os seguintes passos:

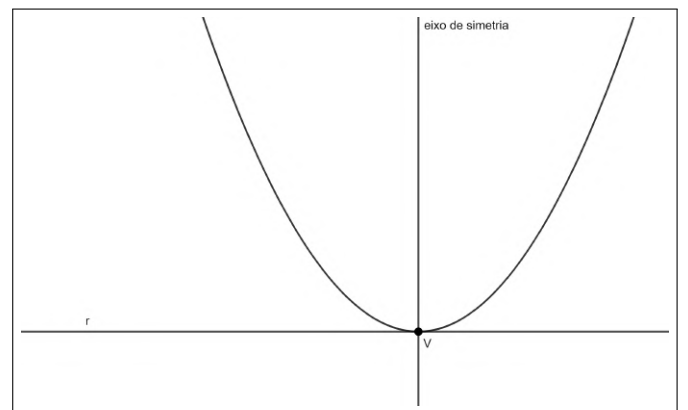
- ▷ PASSO 1: Trace a reta r tangente à parábola em V ;
- ▷ PASSO 2: Com o auxílio de um esquadro, trace o eixo de simetria da parábola que é a reta perpendicular a r que passa por V ;
- ▷ PASSO 3: Marque dois pontos P_1 e P_2 quaisquer sobre a parábola que estejam do mesmo lado em relação ao eixo de simetria de modo que a distância entre P_1 e P_2 seja menor que a soma de suas ordenadas;
- ▷ PASSO 4: Trace duas circunferências centradas em P_1 e P_2 que sejam tangentes a reta r ;
- ▷ PASSO 5: Marque os pontos de interseção A e B das duas circunferências e trace a reta s que contenha \overline{AB} .
- ▷ PASSO 6: Marque o ponto C de interseção da reta s e o eixo de simetria da parábola;
- ▷ PASSO 7: Com o auxílio de um compasso, desenhe a circunferência centrada em C que passa por V ;
- ▷ PASSO 8: Da mesma forma, construa a circunferência centrada em V que passa por C ;
- ▷ PASSO 9: Marque os pontos D e E de interseção das duas circunferências criadas nos passos 7 e 8;
- ▷ PASSO 10: Trace a reta t que passa pelos pontos D e E e marque o ponto F , interseção da reta t com o eixo de simetria;
- ▷ PASSO 11: Construa a circunferência centrada em V que passa por F e marque o outro ponto de interseção P dessa circunferência com o eixo de simetria;
- ▷ PASSO 12: Trace a reta d paralela a r e que passa por P ;
- ▷ PASSO 13: O ponto F é o foco e a reta d é a diretriz dessa parábola.

Figura 34 – Identificação geométrica do foco e da reta diretriz de uma parábola – Parte 1

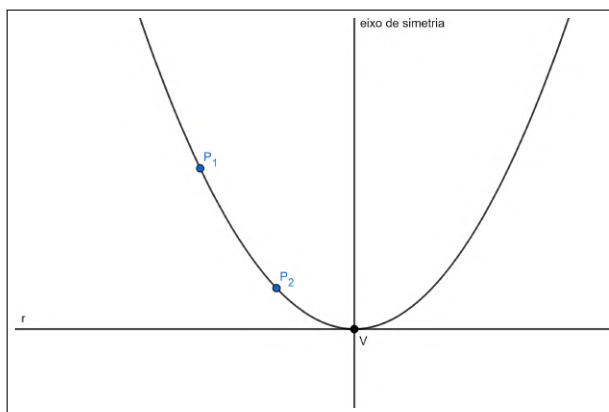
(a) PASSO 1



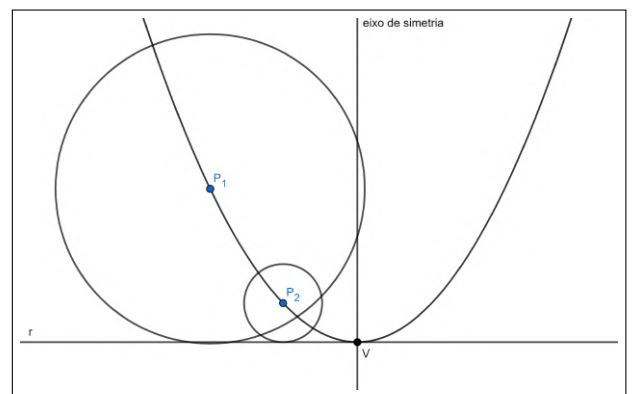
(b) PASSO 2



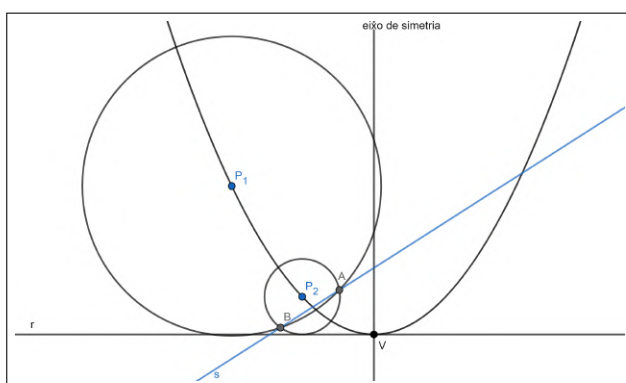
(c) PASSO 2



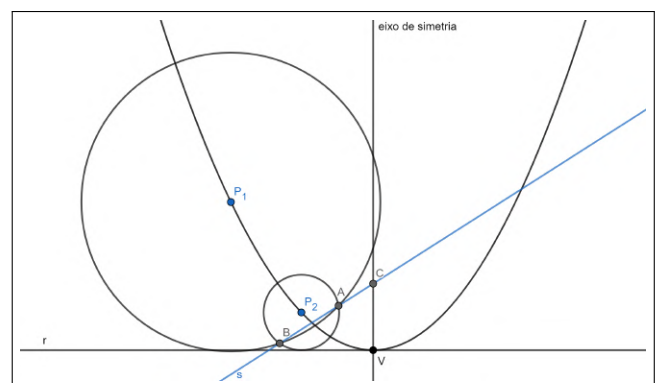
(d) PASSO 3



(e) PASSO 4

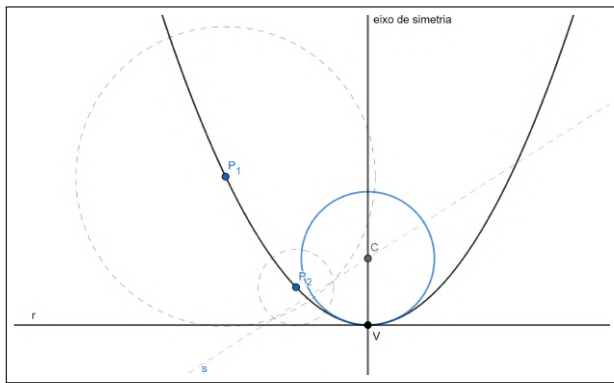


(f) PASSO 5

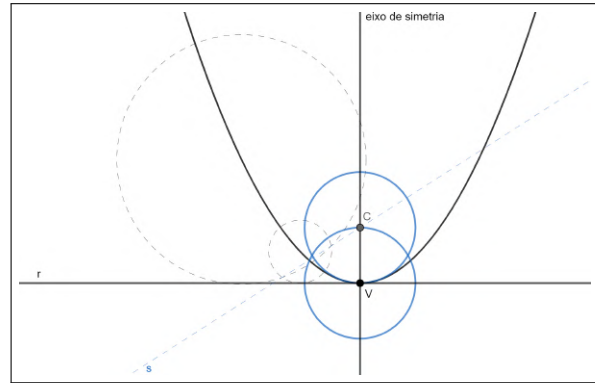


(g) PASSO 6

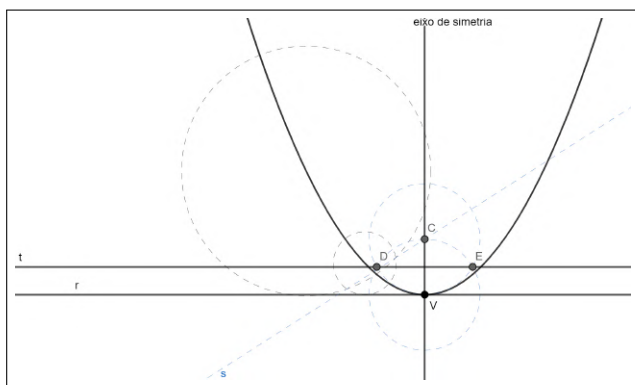
Fonte – Elaborado pela autora

Figura 35 – Identificação geométrica do foco e da reta diretriz de uma parábola – Parte 2

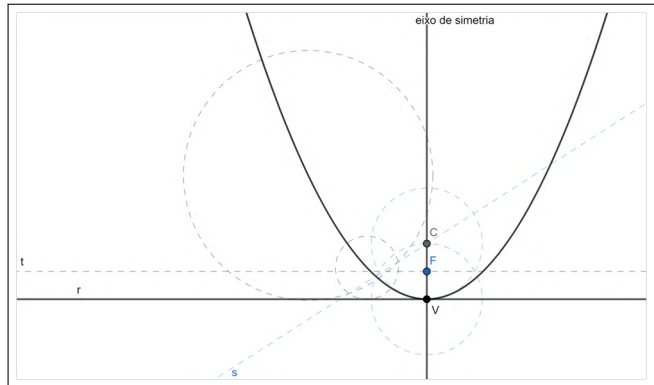
(a) PASSO 7



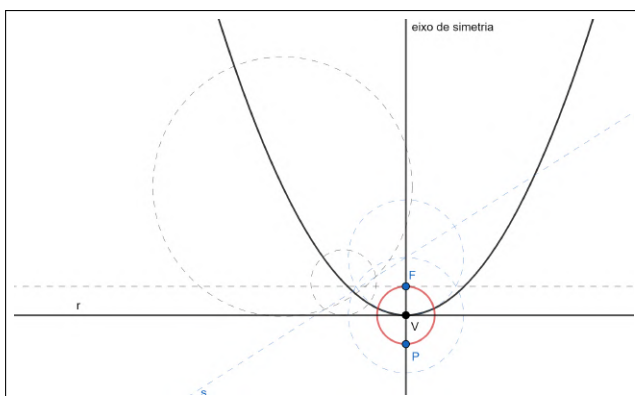
(b) PASSO 8



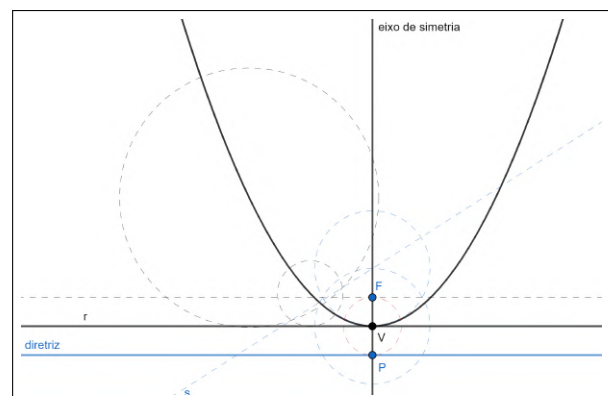
(c) PASSO 9



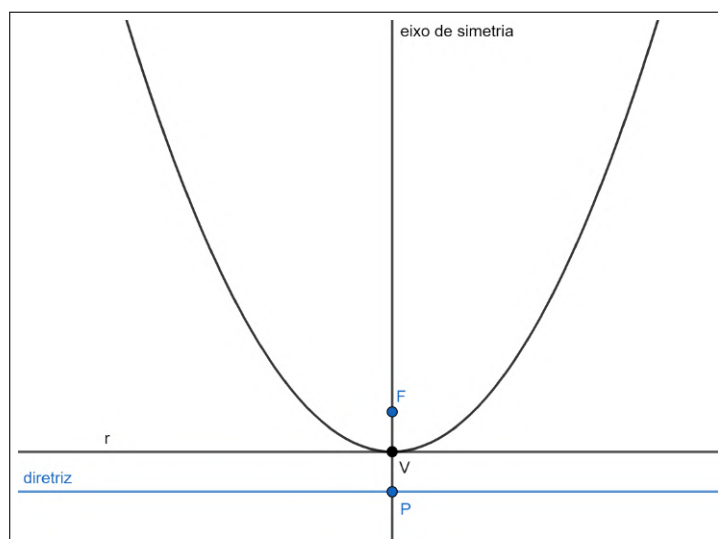
(d) PASSO 10



(e) PASSO 11



(f) PASSO 12



(g) PASSO 13

Fonte – Elaborado pela autora

Dessa forma é possível localizar o foco e a reta diretriz de uma parábola de uma maneira exclusivamente geométrica, independente se ela está ou não sobre um plano direcionado.

1.3.3 Hipérbole

Conforme a Definição 1.2.5, os pontos F_1 , F_2 , A_1 e A_2 estão bem determinados dada uma hipérbole. Será denominado como *Eixo real ou transverso* o segmento $\overline{A_1A_2}$ cujo ponto médio C corresponde ao *centro* dessa hipérbole.

Uma hipérbole possui quatro vértices: A_1 , A_2 , B_1 e B_2 , no qual os pontos B_1 e B_2 pertencem à reta perpendicular ao Eixo real que passa por C e satisfazem a relação:

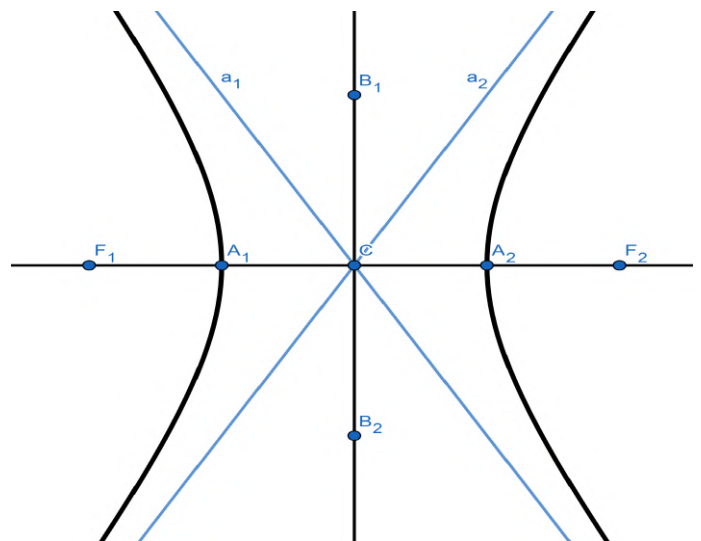
$$\overline{B_1C}^2 = \overline{B_2C}^2 = \overline{F_1C}^2 - \overline{A_1C}^2.$$

Chama-se de *Eixo de imaginário ou não transverso* o segmento $\overline{B_1B_2}$ e de *assíntotas* as retas que passam por C e contêm as diagonais do retângulo de lados $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$.

Dada uma hipérbole, podemos, sem perda de generalidade, posicionar, convenientemente no plano cartesiano, seu centro na origem dos eixos cartesianos, seu eixo real sobre o eixo das abscissas e seu eixo imaginário sobre o eixo das ordenadas. Assim teremos os seguintes elementos:

Figura 36 – Elementos da hipérbole

- Focos: F_1 e F_2 ;
- Distância focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$;
- Centro: C ;
- Vértices: A_1 , A_2 , B_1 e B_2 ;
- Eixo real ou transverso: $\overline{A_1A_2} = 2a$;
- Eixo imaginário ou não transverso: $\overline{B_1B_2} = 2b$;
- Excentricidade: corresponde ao número e , com $e > 1$;
- Assíntotas: As retas $a_1 : y = -\frac{b}{a}x$ e $a_2 : y = \frac{b}{a}x$.



Fonte – Elaborado pela autora

Será apresentada uma das formas de construção de uma hipérbole⁴ que é a ilustrada no livro didático # Contato Matemática, 3º ano, de Souza e Garcia (2016). Tal construção foi realizada nas sequências didáticas retratadas no Capítulo 2. Utilizando um pedaço de barbante e uma régua pode-se construir uma hipérbole através dos passos:

- Marque na cartolina dois pontos, F_1 e F_2 ;

⁴ Há uma infinidade de pontos que compõem uma hipérbole, logo é impossível representar fisicamente uma hipérbole completa. Portanto, a construção referida à hipérbole nessa Seção corresponde apenas a uma pequena parte do seu traço mais próximos aos seus focos, mas suficientes para inferir o comportamento dos demais.

- Corte um pedaço de barbante de maneira que o seu comprimento não ultrapasse o tamanho da régua;
- Prenda uma das extremidades do barbante na régua;
- Fixe a extremidade livre do barbante no ponto F_1 e coloque a extremidade oposta da régua no outro ponto F_2 ;
- Mantenha o lápis encostado na régua e o fio esticado e gire a régua em torno do ponto F_2 , desenhando esse percurso;
- Depois faça o mesmo invertendo a posição da régua.

Afirmção 1.3.3. *A construção supracitada, ilustrada nas Figuras 37 e 38, gera uma curva cujos pontos satisfazem a condição de L.G. apresentada na Definição 1.2.5, ou seja, a curva obtida é uma hipérbole.*

Demonstração. Tomando y como o tamanho da régua e x como o tamanho do barbante, determina-se os pontos de vértices A_1 e A_2 conforme a Figura 37.

Figura 37 – Determinação dos vértices A_1 e A_2 de uma hipérbole utilizando régua e barbante



Fonte – Elaborada pela autora

Tomando os segmentos que compõem o comprimento da régua na Figura 37, chega-se a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \overline{DF_1} + \overline{A_1F_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2F_2} &= y & \Rightarrow & & \overline{DF_1} &= \overline{D'F_2}. & (1.39) \\ \overline{D'F_2} + \overline{A_1F_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2F_2} &= y \end{aligned}$$

De igual forma, tomando os segmentos que compõem o comprimento do barbante que na Figura 37 é representado pelos segmentos em vermelho $\overline{DA_1} + \overline{A_1F_1}$ na figura da esquerda e $\overline{D'A_2} + \overline{A_2F_2}$ na figura da direita. Temos, então, as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \overline{DA_1} + \overline{A_1F_1} &= \overline{D'A_2} + \overline{A_2F_2} \\ \overline{DF_1} + \overline{F_1A_1} + \overline{A_1F_1} &= \overline{D'F_2} + \overline{F_2A_2} + \overline{A_2F_2} \\ \overline{DF_1} + 2\overline{A_1F_1} &= \overline{D'F_2} + 2\overline{A_2F_2}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

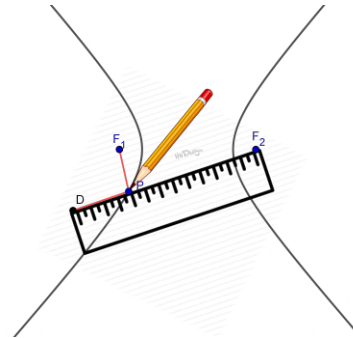
Pela Equação (1.39), tem-se a seguinte conclusão:

$$\begin{aligned}\overline{DF_1} + 2\overline{A_1F_1} &= \overline{DF_2} + 2\overline{A_2F_2} \\ \overline{A_1F_1} &= \overline{A_2F_2}.\end{aligned}\tag{1.41}$$

Utilizando as Equações (1.39) e (1.41), pode-se estabelecer uma relação entre o tamanho da régua (y) e o do barbante (x).

$$\begin{aligned}y - x &= \overline{DF_1} + 2\overline{A_1F_1} + \overline{A_1A_2} - \overline{DF_1} - 2\overline{A_1F_1} \\ &= \overline{A_1A_2}.\end{aligned}\tag{1.42}$$

Figura 38 – Determinação de um ponto P pertencente a hipérbole utilizando régua e barbante



Fonte – Elaborado pela autora

Como pode-se ver na Figura 38, tem-se:

$$\overline{DP} + \overline{PF_1} = x\tag{1.43}$$

$$\overline{DP} + \overline{PF_2} = y.\tag{1.44}$$

Subtraindo membro a membro, em módulo, as Equações (1.43) e (1.44), obtém-se:

$$\begin{aligned}|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| &= |x - y| \\ &= \overline{A_1A_2}.\end{aligned}\tag{1.45}$$

Portanto, esse procedimento determina os pontos de uma hipérbole, pois gera pontos que satisfazem a Definição 1.2.5 de hipérbole como L.G. \square

Conforme visto na Seção 1.2, a definição de hipérbole, proposta por Apolônio, como uma seção em um cone de duas folhas é equivalente a definição gerada a partir do Lema 3. Assim sendo, dado o traço de uma hipérbole (que pode ser obtido simplesmente pela interseção de um plano com uma determinada inclinação e um cone de duas folhas (ver Figura 24), ou seja, sem necessariamente

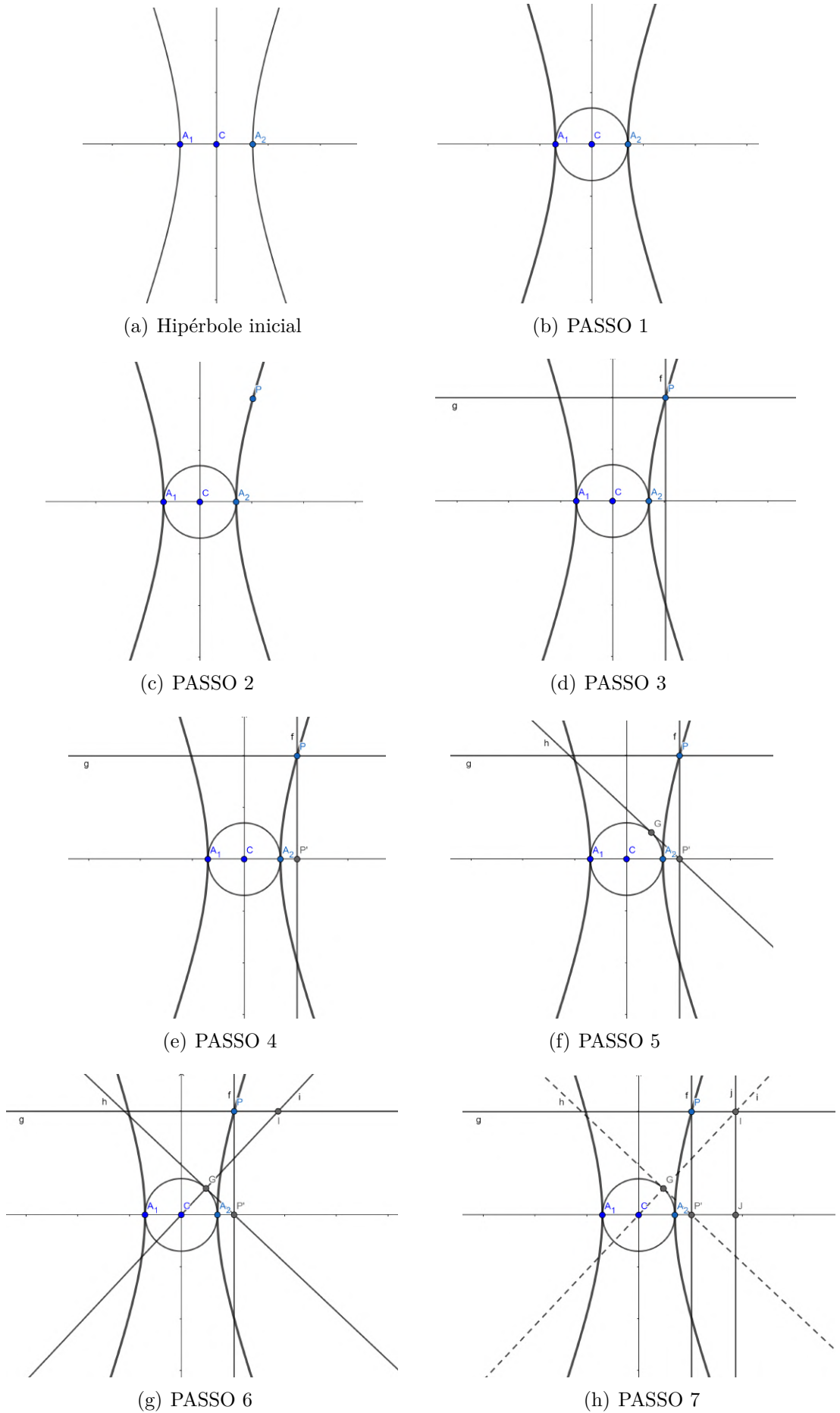
conhecer seus focos, eixo imaginário ou assíntotas) sempre existem dois pontos fixos F_1 e F_2 que validam essa hipérbole como L.G. apresentado na Definição 1.2.5. Observe como localizá-los, bem como as suas assíntotas e eixo imaginário.

- Identificar os focos F_1 e F_2 e as assíntotas de uma hipérbole

Considerando uma determinada hipérbole de vértices A_1 e A_2 e centro C , determina-se seus focos, eixo imaginário e assíntotas, utilizando régua e compasso, da seguinte maneira:

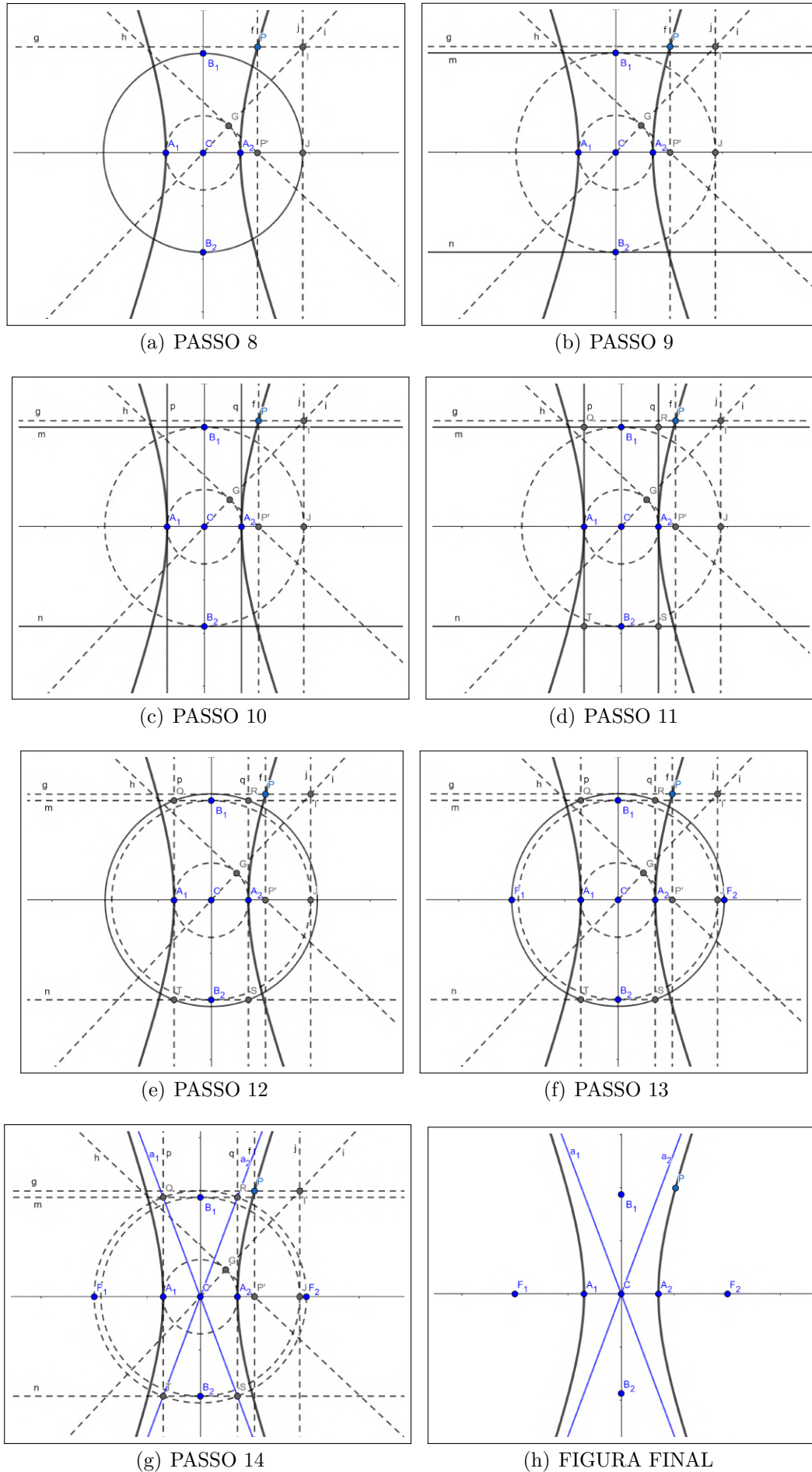
- ▷ PASSO 1: Com o auxílio de um compasso, construa a circunferência centrada em C que passa por A_1 e A_2 ;
- ▷ PASSO 2: Marque um ponto P qualquer sobre a hipérbole;
- ▷ PASSO 3: Trace as retas f e g que passam por P , sendo g paralela à reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ e perpendicular a f ;
- ▷ PASSO 4: Marque o ponto P' (projeção ortogonal de P na reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$);
- ▷ PASSO 5: Trace a reta h , tangente à circunferência do passo 1 no ponto G e que passa por P' ;
- ▷ PASSO 6: Construa a reta i que contém o segmento \overline{CG} e marque o ponto I de interseção entre as retas g e i ;
- ▷ PASSO 7: Marque o ponto J (projeção ortogonal de I na reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$);
- ▷ PASSO 8: Construa a circunferência centrada em C que passa por J e marque os pontos B_1 e B_2 de interseção entre ela e a mediatriz de $\overline{A_1A_2}$;
- ▷ PASSO 9: Trace as retas m e n que são paralelas à reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ e passam, respectivamente, por B_1 e B_2 ;
- ▷ PASSO 10: Trace as retas p e q que são perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ e passam, respectivamente, por A_1 e A_2 ;
- ▷ PASSO 11: Marque os pontos Q , R , S e T , interseções das retas m , n , p e q ;
- ▷ PASSO 12: Construa a circunferência centrada em C que passa pelos pontos Q , R , S e T ;
- ▷ PASSO 13: Marque os pontos F_1 e F_2 de interseção da circunferência do passo 12 com a reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$;
- ▷ PASSO 14: Construa as retas $a_1 = \overleftrightarrow{QS}$ e $a_2 = \overleftrightarrow{RT}$.
- ▷ RESULTADO FINAL: Os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ são os eixos real e imaginário das hipérbole, respectivamente, os pontos F_1 e F_2 são seus focos e as retas a_1 e a_2 são suas assíntotas.

Figura 39 – Identificação geométrica dos focos e das assíntotas de uma hipérbole - Parte 1



Fonte – Elaborado pela autora

Figura 40 – Identificação geométrica dos focos e das assíntotas de uma hipérbole - Parte 2



Fonte – Elaborado pela autora

Assim como na parábola, parte da demonstração do algoritmo de determinação dos focos, eixo imaginário e assíntotas de uma hipérbole apresentada nessa Seção foi deslocada para o APÊNDICE (C).

Observação 1.3.1. Note que no PASSO 13 (41(f)) o ponto R está posicionado de modo que o triângulo OA_2R é retângulo em A_2 e seus lados $\overline{OA_2}$, $\overline{A_2R}$ e \overline{RO} medem, respectivamente, a , b e c . Daí, pode-se concluir a seguinte relação:

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1.46)$$

1.4 PROPRIEDADE REFLETORA E AS RETAS TANGENTES

Agora que as cônicas como L.G. e os seus elementos foram bem definidos nas Seções anteriores, pode-se avançar no estudo desses objetos matemáticos para além de seus pontos.

Nessa seção será apresentada a demonstração das propriedades óticas (refletoras) das cônicas, bem como será mostrada a construção de cada cônica a partir do conjunto de retas tangentes a elas, para isso, nos casos da elipse e hipérbole, serão demonstradas as propriedades de um ponto interior ou exterior às cônicas.

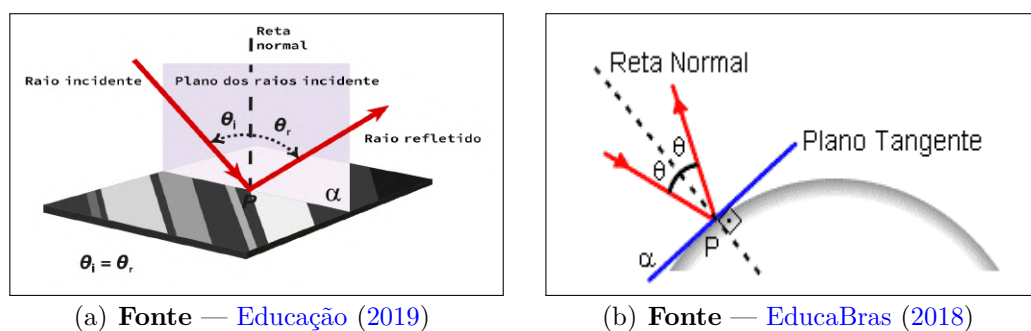
As cônicas possuem propriedades de reflexão que podem ser aplicadas a diversas áreas da ciência e tecnologia, um exemplo é sua aplicação na medicina através do uso do aparelho Litotritor que “emite certos tipos de raios direcionados para a região de interesse através de uma lente elíptica para o tratamento de cálculos renais” (BARBIERI et al., 2018, p. 81).

Para total compreensão das propriedades refletoras de cada cônica, será necessário relembrar as duas leis fundamentais da reflexão da luz segundo a Física.

LEIS DE REFLEXÃO DA LUZ

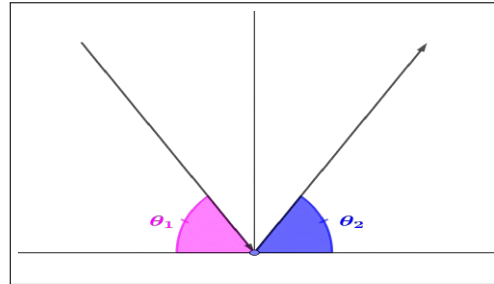
- 1ª lei: Existe um plano que contém as retas normal, de incidência e de reflexão de um raio em relação a um plano;
- 2ª lei: O ângulo de incidência de um raio de luz é igual ao de reflexão.

Figura 41 – Lei de reflexão da luz em superfícies planas e curvas



Uma outra maneira de descrever a 2ª lei de reflexão é dizendo que o complementar do ângulo de incidência é igual ao complementar do ângulo de reflexão, conforme a Figura 42.

Figura 42 – Consequência da lei de reflexão da luz



Fonte – Elaborado pela autora

Cada uma das cônicas possui uma determinada propriedade ótica que justifica a grande versatilidade e utilidade da sua aplicação prática que perpassa por áreas como a acústica (conchas acústicas, por exemplo), a automobilística (faróis de carros) e a odontologia (espelhos elípticos usados por dentistas). Tais propriedades são demonstradas a seguir, bem como a construção dessas cônicas a partir de suas retas tangentes.

Considere a Definição 1.4.1 como base para as demonstrações posteriores.

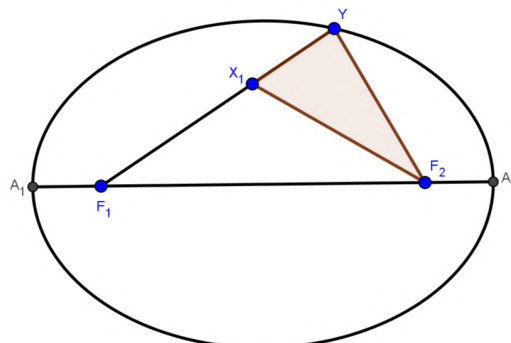
Definição 1.4.1 (Região interior/exterior à uma cônica). *Define-se como Região Interior à uma cônica, a(s) área(s) limitadas por elas que contém pelo menos um de seu(s) foco(s) e Exterior a que não contém nenhum.*

1.4.1 Elipse

Para a demonstração da propriedade refletora da Elipse será necessário usar a propriedade de um ponto fora dessa curva. Tal propriedade é demonstrada na Proposição 1.4.1.

Proposição 1.4.1 (Propriedade do ponto interior ou exterior a uma elipse). *A soma das distâncias de um ponto P , interior (respectivamente, exterior) à uma elipse, aos focos F_1 e F_2 é menor (respectivamente, maior) que o eixo maior, $2a$, da elipse.*

Figura 43 – Propriedade do ponto interior ou exterior a uma elipse



Fonte – Elaborado pela autora

Demonstração. Considere um ponto X_1 no interior da elipse e o ponto Y como ponto de interseção da elipse com a reta $\overleftrightarrow{X_1F_1}$, conforme a Figura 43. Tomando o triângulo X_1F_2Y , note que, pela desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} X_1F_2 &< X_1Y + YF_2 \\ X_1F_2 + X_1F_1 &< \underbrace{X_1F_1 + X_1Y}_{YF_1} + YF_2 \\ X_1F_2 + X_1F_1 &< YF_1 + YF_2. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Pela Definição 1.2.3, sabe-se que:

$$YF_1 + YF_2 = 2a$$

Logo,

$$X_1F_2 + X_1F_1 < 2a$$

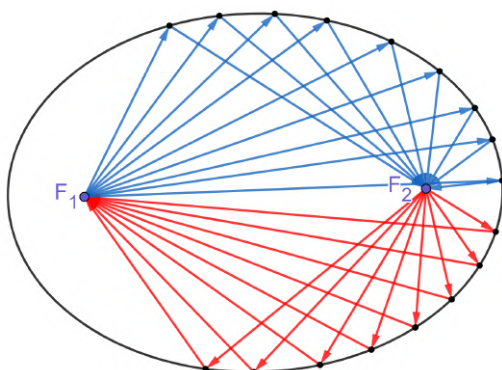
Ou seja, dado um ponto X_1 arbitrário no interior de uma elipse, a soma das distâncias desse ponto aos focos é menor que $2a$.

□

A demonstração para o caso em que o ponto é exterior à elipse é análogo e será deixado como exercício para o leitor.

Teorema 1.4.1 (Propriedade refletora da elipse). *Dada uma superfície côncava elíptica e espelhada e uma fonte de luz, se os raios de luz partirem de um dos focos da elipse na direção dessa superfície, então os raios serão refletidos para o outro foco. Essa propriedade é ilustrada pela Figura 44.*

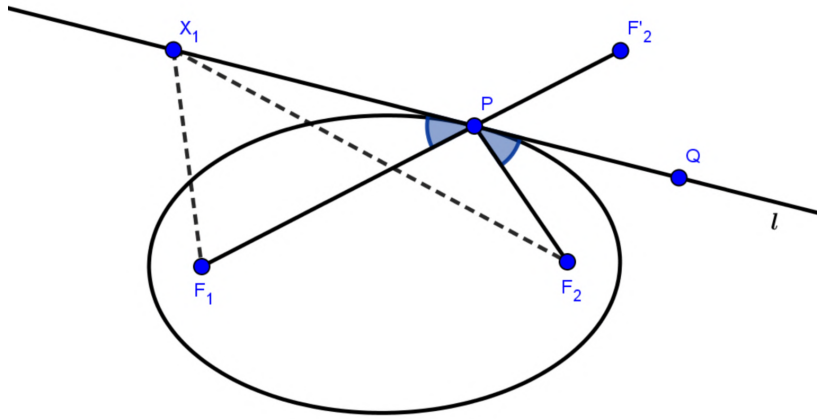
Figura 44 – Propriedade refletora da elipse



Legenda:	
\rightarrow (azul)	= Feixe de luz partindo de F_1 em direção a elipse e sendo refletido em direção a F_2 .
\rightarrow (vermelho)	= Feixe de luz partindo de F_2 em direção a elipse e sendo refletido em direção a F_1 .

Demonstração. Iremos provar que se o raio for emanado de um dos focos da elipse, então ele será refletido diretamente para o outro foco. Para isso, basta mostra que os ângulos $\widehat{X_1PF_1}$ e $\widehat{QPF_2}$, ilustrados na Figura 45, são congruentes.

Figura 45 – Propriedade refletora da elipse - demonstração



Fonte – Elaborado pela autora

Construa uma reta tangente à elipse, marque o ponto P de tangência e os pontos X_1 e Q pertencentes a essa reta, tal que eles se posicionem em lados opostos em relação a P .

Como X_1 é exterior à elipse, pela Proposição 1.4.1, pode-se dizer que $X_1F_1 + X_1F_2 > PF_1 + PF_2$.

Refletindo o ponto F_2 em relação à reta tangente, obtém-se o ponto F'_2 sobre a reta $\overleftrightarrow{PF_1}$ de modo que:

$$\widehat{QPF_2} \equiv \widehat{QPF'_2}. \quad (1.48)$$

Mas,

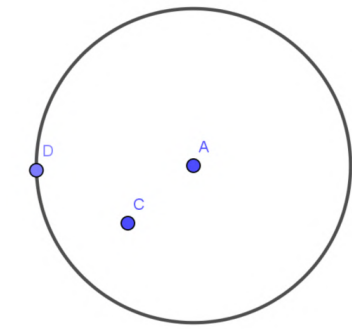
$$\widehat{QPF'_2} \equiv \widehat{X_1PF_1}, \quad (1.49)$$

pois são ângulos opostos pelo vértice. Então, pelas Equações (1.48) e (1.49), conclui-se que:

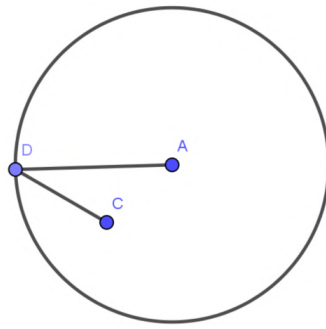
$$\widehat{X_1PF_1} \equiv \widehat{QPF_2}. \quad \square$$

Note que, assim como a reta l foi traçada a partir do ponto de tangência P , é possível realizar o caminho inverso ao se traçar primeiramente a reta tangente l e a partir dela, determinar o respectivo ponto de tangência. Assim, pode-se construir uma elipse a partir de suas retas tangentes. A seguir são mostrados os procedimentos dessa construção (ver Figura 46) juntamente com a demonstração da sua validade que é baseada no Teorema 1.4.1. Essa é a justificativa matemática presente na atividade 3 da segunda sequência didática apresentada no Capítulo 2 que traz as construção da elipse através de dobraduras.

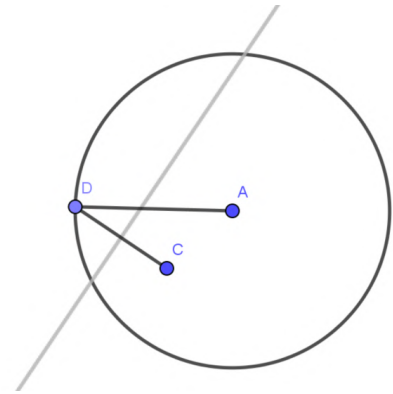
Figura 46 – Construção da elipse a partir de suas retas tangentes



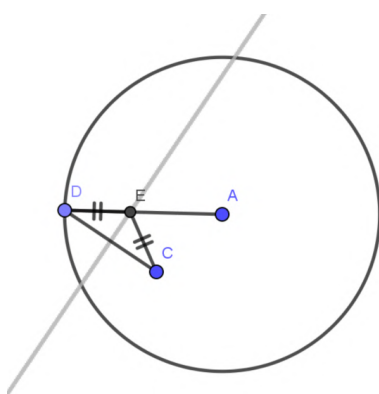
(a) PASSO 1 - Construa uma circunferência de centro A e marque um ponto interior, C , e um sobre ela, D .



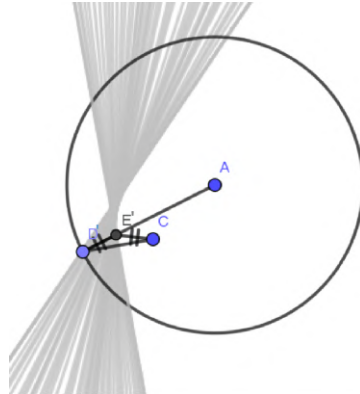
(b) PASSO 2 - Construa os segmentos \overline{AD} e \overline{CD} .



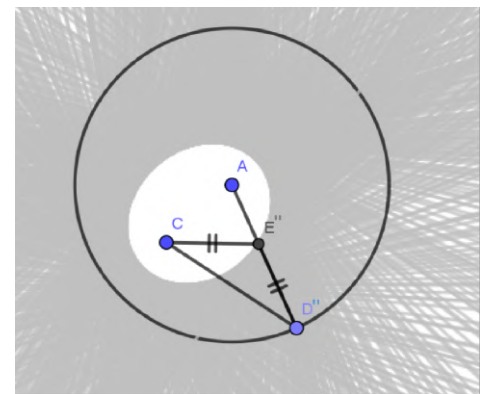
(c) PASSO 3 - Trace a mediatriz do segmento \overline{CD} .



(d) PASSO 4 - Marque o ponto de interseção E dessa mediatriz com o segmento \overline{AD} . Note que, como o ponto E pertence à mediatriz de CD , então $\overline{EC} \equiv \overline{ED}$. Assim, $\overline{EA} + \overline{ED} = \overline{EA} + \overline{EC} = \overline{AD}$.



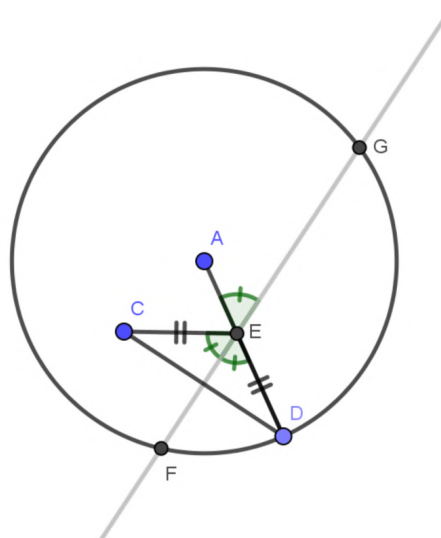
(e) PASSO 5 - Tome outros pontos sobre a circunferência no lugar de D e repita o processo anterior. Observe que, o conjunto de pontos “E” possui a propriedade descrita na Definição 1.2.3.



(f) PASSO 6 - Logo, ele compõe uma elipse cujos focos são os pontos A e C e eixo maior corresponde ao raio da circunferência.

Fonte – Elaborado pela autora

Figura 47 – Retas tangentes à Elipse



Fonte – Elaborado pela autora

Note que, como o triângulo CED é isósceles, então a mediatriz do segmento CD também é bissetriz do ângulo \widehat{CED} . Além disso, marcando os pontos de interseção F e G da reta mediatriz de CD com a circunferência, conforme mostra a Figura 47, tem-se que:

$$\begin{aligned}\widehat{CEF} &\equiv \widehat{FED} \\ \widehat{GEF} &\equiv \widehat{GEA}.\end{aligned}\tag{1.50}$$

E pelo Teorema 1.4.1, se E é um ponto na Elipse e $\widehat{CEF} \equiv \widehat{GEA}$, na qual os pontos A e C são os focos, então a reta mediatriz do segmento CD é tangente à Elipse no ponto E .

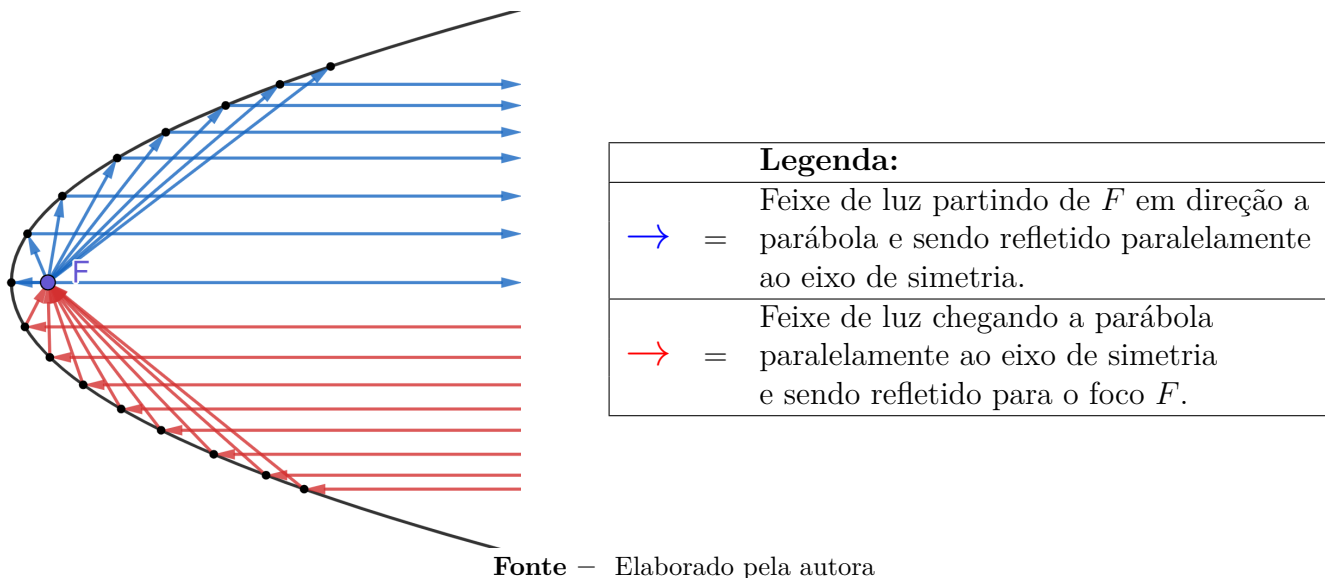
Pode-se encontrar a animação relativa a essa construção no link:

▷ Elipse <<https://www.geogebra.org/m/xtr4mt4m>>.

1.4.2 Parábola

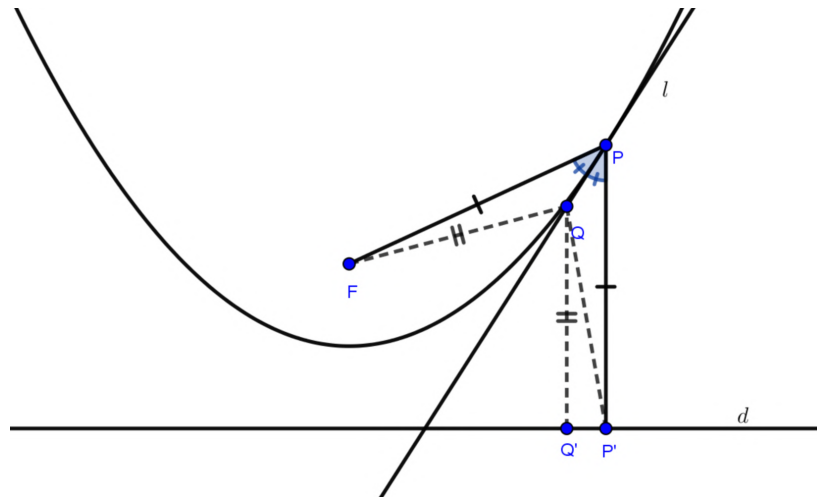
Teorema 1.4.2 (Propriedade refletora da parábola). *Dada uma superfície côncava refletora parabólica e uma fonte de luz tem-se a seguinte propriedade: se a fonte estiver posicionada no foco da parábola, os raios que chegam essa superfície são refletidos paralelamente ao seu eixo de simetria. Essa propriedade também ocorre no caminho inverso, ou seja, se os raios de luz chegarem a essa superfície paralelamente ao seu eixo de simetria, eles serão refletidos na direção do foco. Essa propriedade está representada na Figura 48.*

Figura 48 – Propriedade refletora da parábola



Demonstração. Para a demonstração do Teorema 1.4.2, pela Lei de reflexão da Luz, é suficiente mostrar que, em relação a Figura 49, a bissetriz do ângulo $\widehat{FPP'}$ é a reta tangente à parábola em P .

Sejam P um ponto sobre uma parábola cujo foco é o ponto F , P' a projeção ortogonal de P sobre a diretriz, e l a reta bissetriz do ângulo $\widehat{FPP'}$, conforme ilustrado na Figura 49.

Figura 49 – Propriedade refletora da parábola - demonstração

Fonte – Elaborado pela autora

Suponha que l seja secante à parábola, então a interseção de l com a parábola são os pontos P e Q .

Assim sendo, ao comparar os triângulos Δ_{FPQ} e $\Delta_{P'PQ}$, conclui-se que eles são congruentes pelo caso L.A.L., pois:

- $\widehat{FPQ} \equiv \widehat{P'PQ}$, por l ser bissetriz de $\widehat{FPP'}$;
- $PF = PP'$, pois P pertence à parábola e utilizando a definição de parábola como L.G.;
- lado PQ é compartilhado.

Portanto,

$$\Delta_{FPQ} \equiv \Delta_{P'PQ} \Rightarrow FQ = P'Q, \quad (1.51)$$

e sabendo que Q pertence à parábola, então

$$FQ = Q'Q. \quad (1.52)$$

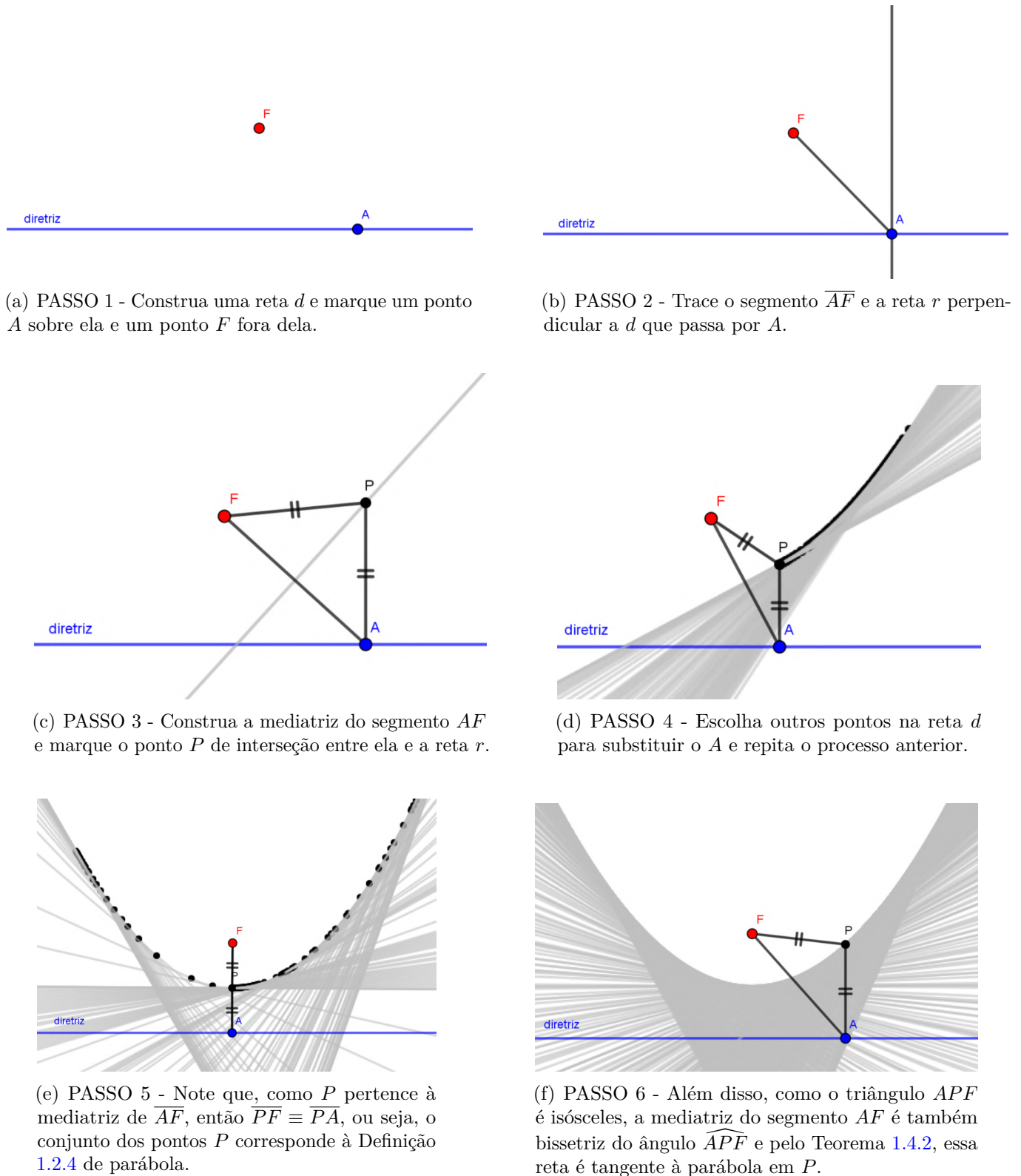
Logo, $P'Q = Q'Q$. Mas isso é um absurdo, pois o triângulo $\Delta_{P'QQ'}$ é retângulo já que Q' é projeção ortogonal de Q sobre a reta $P'Q'$ e a hipotenusa $P'Q$ não pode ser igual a um de seus catetos QQ' . Tal contradição veio de supor que l é secante à parábola. Assim conclui-se que l é a reta tangente à parábola do ponto P .

□

Perceba que, assim como a reta l foi traçada a partir do ponto de tangência P , é possível realizar o caminho inverso ao se traçar primeiramente a reta tangente l e a partir dela, determinar o respectivo ponto de tangência. Assim, pode-se construir uma parábola a partir de suas retas tangentes. A Figura 50, descreve o processo dessa construção, bem como a demonstração de sua validade que é

baseada no Teorema 1.4.2. A atividade 3 da segunda sequência didática apresentada no Capítulo 2 que traz a construção da parábola através de dobraduras é fundamentada nessa demonstração.

Figura 50 – Construção da parábola a partir de suas retas tangentes



Fonte – Elaborado pela autora

Pode-se encontrar a animação relativa a essa construção no link:

▷ Parábola <<https://www.geogebra.org/m/j2n4e7uy>>.

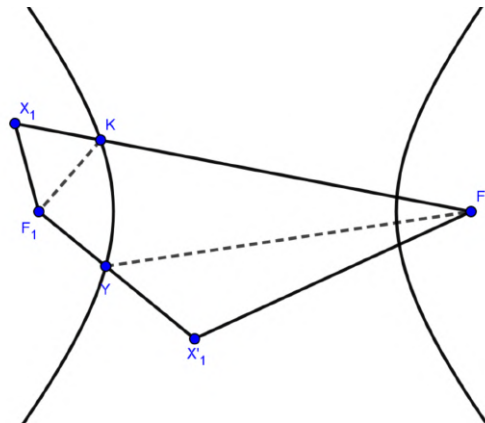
1.4.3 Hipérbole

Para a demonstração da propriedade refletora da Hipérbole será necessário usar a propriedade de um ponto fora dessa curva. Tal propriedade é demonstrada na Proposição 1.4.2.

Proposição 1.4.2 (Propriedade do ponto interior ou exterior a uma hipérbole). *O módulo da diferença das distância de um ponto interior (respectivamente, exterior) a uma hipérbole aos seus focos é maior (respectivamente, menor) que o valor absoluto da diferença das distâncias de qualquer ponto da hipérbole aos seus focos.*

Demonstração. Considere o ponto X'_1 exterior a uma hipérbole e Y o ponto de interseção entre a hipérbole e o segmento X'_1F_1 , conforme ilustra a Figura 51.

Figura 51 – Propriedade de um ponto interior/exterior a uma hipérbole



Fonte – Elaborado pela autora

Considerando o triângulo $\Delta X'_1YF_2$, pela desigualdade triangular, tem-se que:

$$YF_2 + YX'_1 > X'_1F_2. \quad (1.53)$$

Subtraindo em ambos os membros da Inequação (1.53) o termo X'_1F_1 :

$$\begin{aligned} YF_2 - X'_1F_1 + YX'_1 &> X'_1F_2 - X'_1F_1 \\ YF_2 - \underbrace{(X'_1F_1 - YX'_1)}_{YF_1} &> X'_1F_2 - X'_1F_1 \\ YF_2 - YF_1 &> X'_1F_2 - X'_1F_1. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Note que, como Y é um ponto do ramo da hipérbole correspondente ao foco F_1 , então $YF_2 - YF_1 = 2a$, logo,

$$|X'_1F_2 - X'_1F_1| < 2a. \quad (1.55)$$

De modo análogo, seja X_1 um ponto no interior ao ramo correspondente ao foco F_1 da hipérbole, K a interseção entre essa hipérbole e o segmento X_1F_2 e considerando o triângulo ΔX_1KF_1 , tem-se:

$$KF_1 + KX_1 > X_1F_1. \quad (1.56)$$

Subtraindo em ambos os membros da Inequação (1.56) o termo X_1F_2 :

$$\begin{aligned} KF_1 - X_1F_2 + KX_1 &> X_1F_1 - X_1F_2 \\ KF_1 - \underbrace{(X_1F_2 - KX_1)}_{KF_2} &> X_1F_1 - X_1F_2 \\ KF_1 - KF_2 &> X_1F_1 - X_1F_2. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Note que, como K é um ponto do ramo da hipérbole correspondente ao foco F_1 , então $KF_1 - KF_2 = -2a$, logo,

$$\begin{aligned} X_1F_1 - X_1F_2 &< -2a \\ X_1F_2 - X_1F_1 &> 2a \end{aligned} \quad (1.58)$$

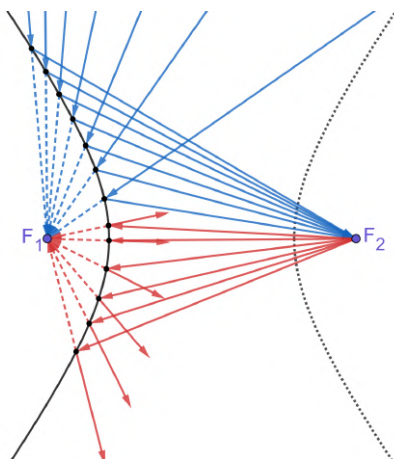
Como os pontos X'_1 e X_1 foram tomados arbitrariamente, pode-se afirmar que:

$$|X'_1F_1 - X'_1F_2| < 2a \quad \text{e} \quad |X_1F_1 - X_1F_2| > 2a.$$

□

Teorema 1.4.3 (Propriedade refletora da hipérbole). *Dada uma superfície hiperbólica espelhada e uma fonte de luz, se essa fonte de luz é apontada na direção e sentido de um dos focos dessa hipérbole e tocam na superfície espelhada antes de alcançá-lo, então os raios de luz serão refletidos na direção e sentido do outro foco. Do mesmo modo, se a fonte de luz está posicionada em um dos focos e lança raios sobre o ramo da hipérbole espelhado, então esses raios de luz serão refletidos na direção do outro foco, mas em sentido oposto. A Figura 52 ilustra essa propriedade.*

Figura 52 – Propriedade refletora da hipérbole

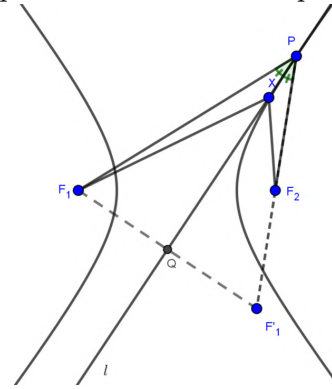


Legenda:

\rightarrow (azul)	= Feixe de luz chegando a hipérbole na direção e sentido do foco F_1 e sendo refletido na direção do foco F_2 .
\rightarrow (vermelho)	= Feixe de luz partindo do foco F_2 colidindo com a superfície hiperbólica e sendo refletido na direção do foco F_1 no sentido oposto.

Demonstração. Mostrando que, conforme a Figura 53, a bissetriz de $\widehat{F_1PF_2}$ (reta l), sendo F_1 e F_2 os focos de uma hipérbole, é a reta tangente à hipérbole no ponto P , pela Lei de reflexão da Luz, o Teorema 1.4.3 fica demonstrado.

Figura 53 – Propriedade refletora da hipérbole - demonstração



Fonte – Elaborado pela autora

Tome um ponto X distinto de P sobre a bissetriz de $\widehat{F_1PF_2}$. Refletindo F_1 em relação a reta l determina-se o ponto F'_1 . Então, por construção, além de bissetriz do ângulo $\widehat{F_1PF_2}$, l é também a mediatriz do segmento $F_1F'_1$, sendo Q seu ponto médio. Assim, tem-se:

$$\begin{cases} \widehat{F_1PQ} \equiv \widehat{QPF_2} \\ \widehat{F_1PQ} \equiv \widehat{QPF'_1} \end{cases} \Rightarrow \overline{PF_2} \subset \overline{PF'_1} \text{ e } P, F_2 \text{ e } F'_1 \text{ são colineares. Portanto:}$$

$$PF'_1 - PF_2 = F'_1F_2. \quad (1.59)$$

Note também que, como as retas l e $\overleftrightarrow{PF_2}$ são concorrentes em P , e sendo $X \in l$ um ponto distinto de P , então é possível construir o triângulo $\Delta F'_1XF_2$ e pela desigualdade triangular:

$$F'_1F_2 > XF'_1 - XF_2. \quad (1.60)$$

Comparando as Equações (1.59) e (1.60), pode-se concluir que:

$$PF'_1 - PF_2 > XF'_1 - XF_2, \quad (1.61)$$

mas, $PF'_1 \equiv PF_1$ e $XF'_1 \equiv XF_1$, então:

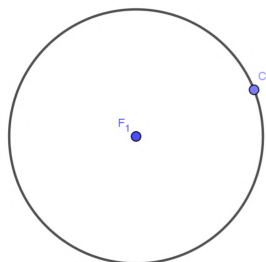
$$PF_1 - PF_2 > XF_1 - XF_2, \quad (1.62)$$

e pela Proposição 1.4.2, o ponto X é exterior à hipérbole. Como X foi tomado de modo arbitrário, conclui-se que P é o único ponto de l que pertence à hipérbole, ou seja, l é a reta tangente à hipérbole em P . \square

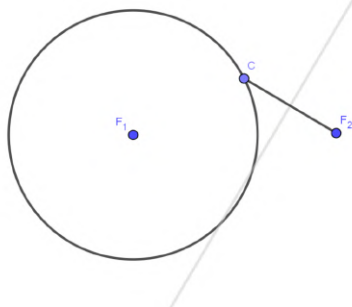
Perceba que, assim como a reta l foi traçada a partir do ponto de tangência P , é possível realizar o caminho inverso ao se traçar primeiramente a reta tangente l e a partir dela, determinar o respectivo ponto de tangência. Assim, pode-se construir uma hipérbole a partir de suas retas tangentes.

A Figura 54 retrata o algoritmo dessa construção juntamente com a demonstração da sua validade que é baseada no Teorema 1.4.3. Essa é a justificativa matemática da construção da hipérbole através de dobraduras, apresentada no Capítulo 2, na atividade 3 da segunda sequência didática.

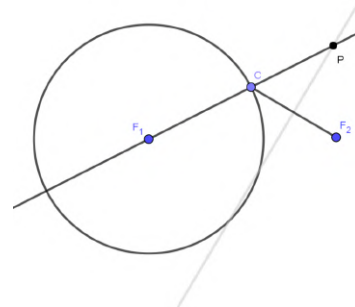
Figura 54 – Construção da hipérbole a partir de suas retas tangentes



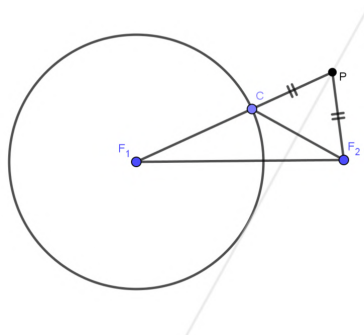
(a) PASSO 1 - Construa uma circunferência de centro F_1 e marque um ponto C sobre ela e um ponto F_2 externo a ela.



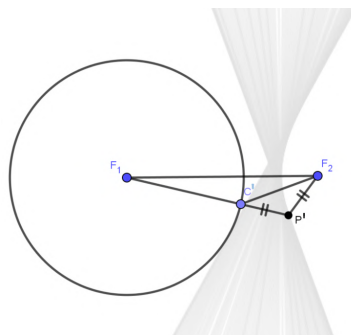
(b) PASSO 2 - Trace o segmento $\overline{CF_2}$ e a sua reta mediatriz.



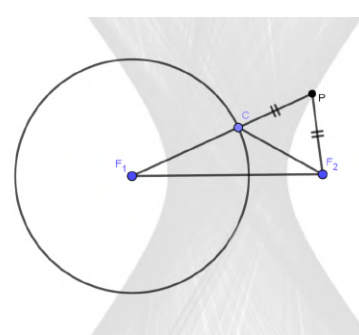
(c) PASSO 3 - Trace a reta $\overleftrightarrow{F_1C}$ e marque o ponto P de interseção entre ela e a mediatriz do segmento $\overline{CF_2}$.



(d) PASSO 4 - Trace o segmento $\overline{F_1F_2}$ e note que, como P pertence à mediatriz do segmento $\overline{CF_2}$, então $\overline{PC} \equiv \overline{PF_2}$.



(e) PASSO 5 - Escolha outros pontos da circunferência para substituir o C e repita o processo anterior. Observe que $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{PF_1} - \overline{PC} = \overline{CF_1}$ e como o segmento $\overline{CF_1}$ é fixo, pois é o raio da circunferência.



(f) PASSO 6 - Note que, segundo a Definição 1.2.5, o conjunto dos pontos P corresponde a uma hipérbole de focos F_1 e F_2 .

Fonte – Elaborado pela autora

Observação 1.4.1. Dado um ponto P' distinto de P sobre a mediatriz de $\overline{CF_2}$, tem-se que $\overline{F_1P'} = \overline{CP'}$. Considerando o triângulo $\Delta_{F_1CP'}$, pela desigualdade triangular, $|\overline{F_1P'} - \overline{F_2P'}| = |\overline{F_1P'} - \overline{CP'}| < \overline{F_1C}$, ou seja, $|\overline{F_1P'} - \overline{F_2P'}| < |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}|$ e pela Proposição 1.4.2, P' é exterior à hipérbole. Portanto, as mediatrizes construídas intersectam a hipérbole em apenas um ponto, logo, são tangentes à hipérbole.

Pode-se encontrar a animação relativa a essa construção no link:

▷ Hipérbole <<https://www.geogebra.org/m/zezhy52a>>.

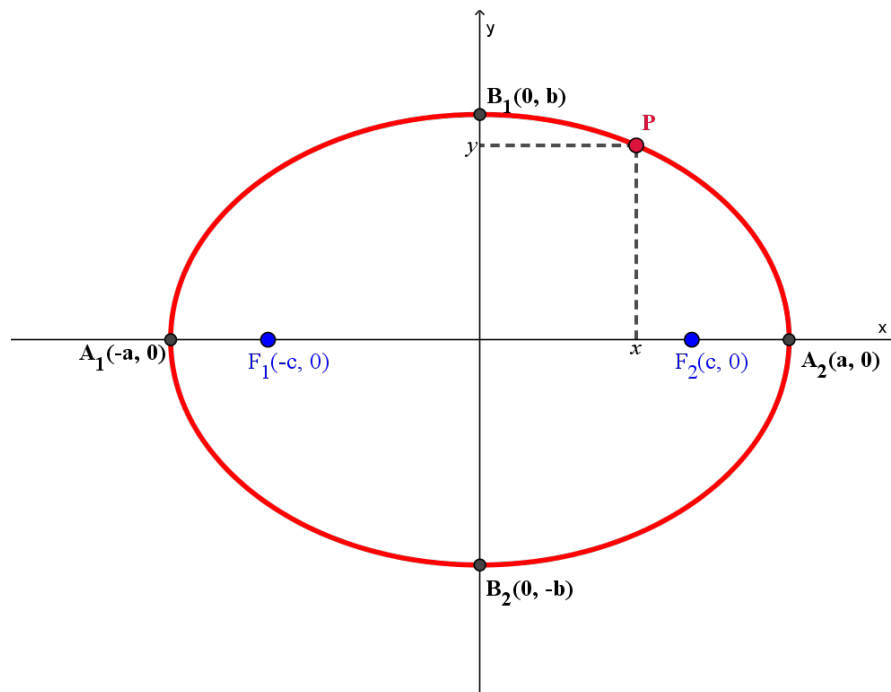
1.5 EQUAÇÕES ANALÍTICAS DAS CÔNICAS

Segundo Santos e Trevisan (2004), com o surgimento da Geometria Analítica, em 1637 marcado pela publicação dos trabalhos do matemático francês René Descartes (1596 - 1650), percebeu-se que ao introduzir as cônicas em um sistema de coordenadas, elas podem ser descritas por equações do segundo grau de duas variáveis.

Nesta seção, através da definição das cônicas como L.G., apresentada na Seção 1.2, serão demonstradas as equações analíticas da elipse, parábola e hipérbole que é a apresentação das cônicas mais comuns nos livros didáticos.

1.5.1 Elipse

Figura 55 – Elipse construída no plano cartesiano



Fonte – Elaborado pela autora

Tomando um ponto P qualquer, sobre a elipse da Figura 55, de coordenadas (x, y) as distâncias de P aos focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ dessa elipse são:

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(P, F_1) &= \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} \\
 &= \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} \\
 &= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}.
 \end{aligned} \tag{1.63}$$

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(P, F_2) &= \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} \\
 &= \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}.
 \end{aligned} \tag{1.64}$$

Aplicando a definição da elipse como L.G., tem-se que $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a$. Além disso, pode-se destacar a relação pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$.

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) &= 2a \\ \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \\ \left(\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a - \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, realizando algumas manipulações e lembrando que $a, b, c > 0$ por definição, chega-se a equação:

$$\begin{aligned} xc - a^2 &= -a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \\ (xc - a^2)^2 &= \left(-a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Realizando o mesmo processo anterior para que a raiz quadrada seja cancelada, tem-se:

$$\begin{aligned} x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 &= a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\ -x^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ x^2(a^2 - c^2) + y^2(a^2) &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por $a^2(a^2 - c^2)$, sendo $a > c$ por definição, obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{x^2(\cancel{a^2 - c^2})}{a^2(\cancel{a^2 - c^2})} + \frac{y^2(\cancel{a^2})}{\cancel{a^2}(a^2 - c^2)} &= \frac{\cancel{a^2}(\cancel{a^2 - c^2})}{\cancel{a^2}(\cancel{a^2 - c^2})} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Pela relação estabelecida na Equação (1.37), sabe-se que $b^2 = a^2 - c^2$. Substituindo essa relação em (1.65), conclui-se que:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.66}$$

Portanto a Equação (1.66) representa a elipse apresentada.

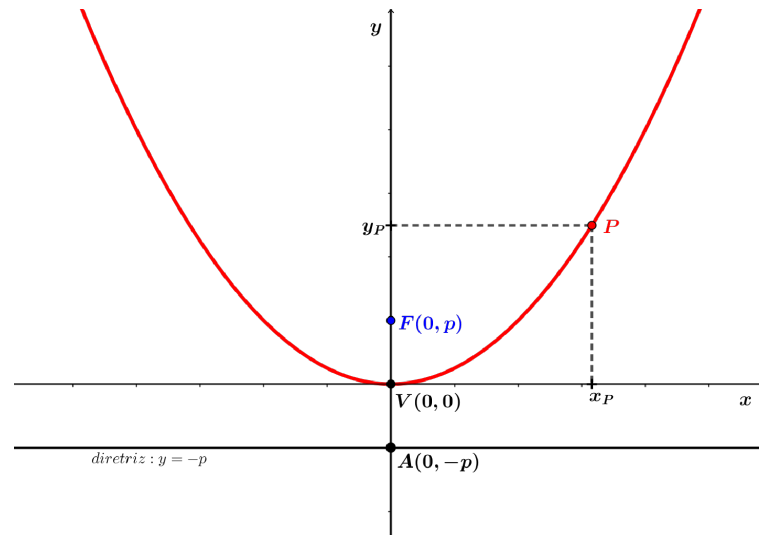
O caso em que o eixo maior localiza-se no eixo das ordenadas, o menor no das abscissas e o centro permanece na origem é análogo, a única diferença é que será encontrada a seguinte equação

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

1.5.2 Parábola

Tomando um ponto P qualquer, sobre a parábola da Figura 56, de coordenadas (x, y) as distâncias de P ao foco $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ e $A\left(x, -\frac{p}{2}\right)$ (projeção ortogonal do ponto P sobre a diretriz) dessa parábola são:

Figura 56 – Parábola construída no plano cartesiano



Fonte – Elaborado pela autora

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(P, F) &= \sqrt{(x - 0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{x^2 + y^2 - 2\frac{p}{2}y + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}}.
 \end{aligned} \tag{1.67}$$

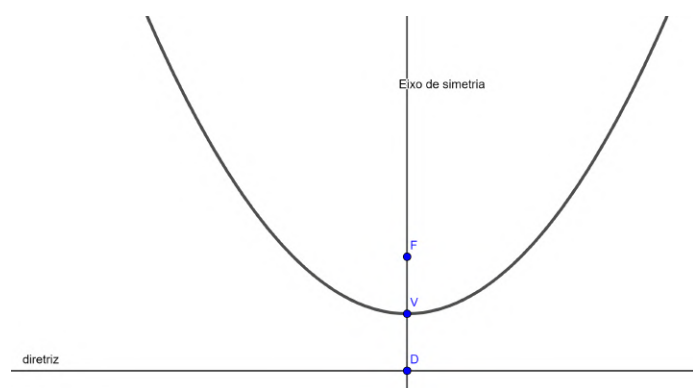
$$\begin{aligned}
 \text{dist}(P, A) &= \sqrt{(x - x)^2 + \left[y - \left(-\frac{p}{2}\right)\right]^2} \\
 &= \sqrt{0^2 + \left[y + \frac{p}{2}\right]^2} \\
 &= \sqrt{0 + y^2 + 2\frac{p}{2}y + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{y^2 + py + \frac{p^2}{4}}.
 \end{aligned} \tag{1.68}$$

Aplicando a definição da parábola como L.G., tem-se que $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d)$. Além disso, note que $\text{dist}(P, d) = \text{dist}(P, A)$.

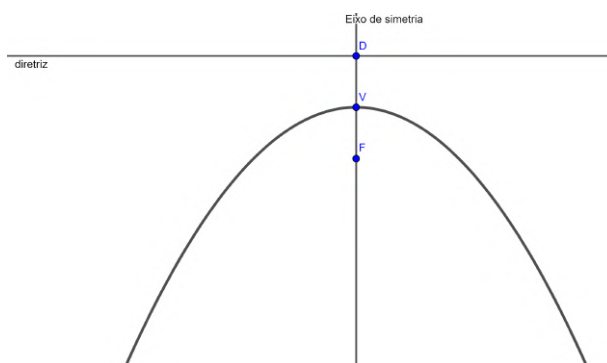
$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}} &= \sqrt{y^2 + py + \frac{p^2}{4}} \\
 \left(\sqrt{x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}}\right)^2 &= \left(\sqrt{y^2 + py + \frac{p^2}{4}}\right)^2 \\
 x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} &= y^2 + py + \frac{p^2}{4} \\
 x^2 &= 2py.
 \end{aligned}
 \tag{1.69}$$

Portanto a Expressão (1.69) representa a equação da parábola apresentada. Os casos em que a concavidade da parábola é voltada para baixo, para a direita e para a esquerda, mantendo o vértice na origem dos eixos cartesianos, são análogos, obtendo pouca diferença na equação analítica. Assim os quatro casos descritos terão as seguintes equações:

Figura 57 – Equação da Parábola com Eixo de simetria na vertical e vértice na origem.



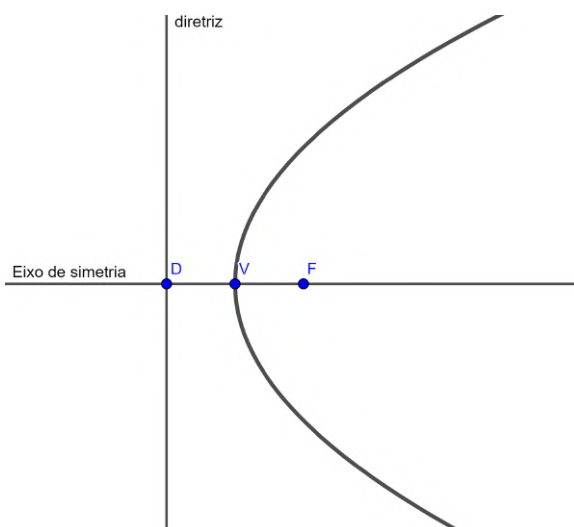
(a) Equação da Parábola com concavidade voltada para cima: $x^2 = 2py$.



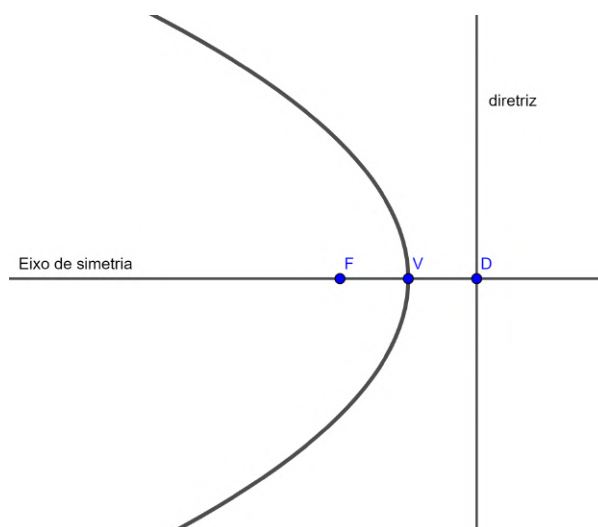
(b) Equação da Parábola com concavidade voltada para baixo: $x^2 = -2py$.

Fonte – Elaborado pela autora

Figura 58 – Equação da Parábola com Eixo de simetria na horizontal e vértice na origem.



(a) Equação da Parábola com concavidade voltada para direita: $y^2 = 2px$.

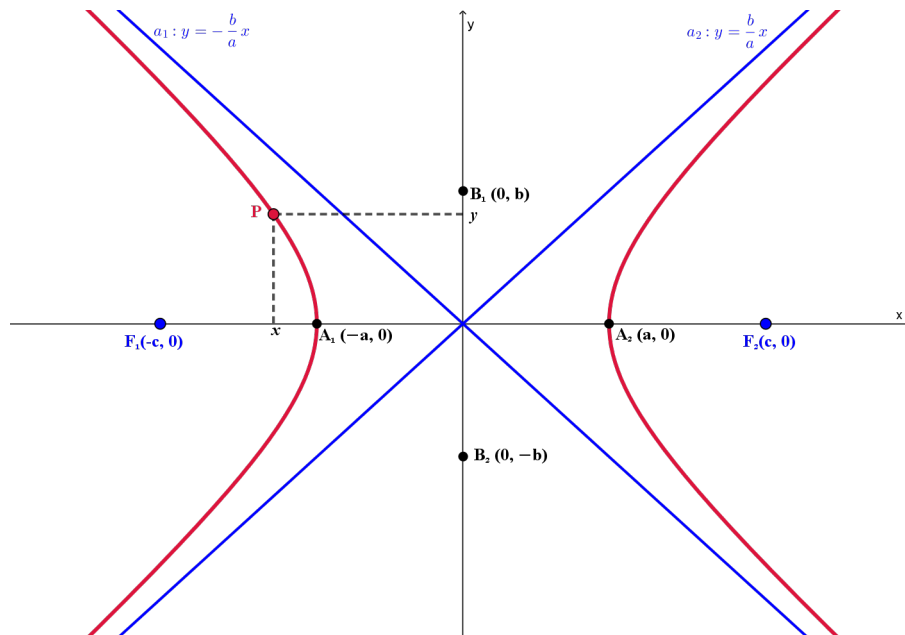


(b) Equação da Parábola com concavidade voltada para esquerda: $y^2 = -2px$.

Fonte – Elaborado pela autora

1.5.3 Hipérbole

Figura 59 – Hipérbole construída no plano cartesiano



Fonte – Elaborado pela autora

Tomando um ponto P qualquer, sobre a hipérbole da Figura 59, de coordenadas (x, y) as distâncias de P aos focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ dessa hipérbole são:

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, F_1) &= \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} \\ &= \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{1.70}$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, F_2) &= \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Aplicando a Definição 1.2.5 da hipérbole como L.G., tem-se que:

$$\begin{aligned} |\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| &= 2a \\ \left| \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \right| &= 2a. \end{aligned} \tag{1.72}$$

A Equação modular (1.72) pode ser reescrita da forma:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} &= \pm 2a \\ \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e realizando algumas manipulações e simplificações matemáticas, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}\right)^2 &= \left(\pm 2a - \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}\right)^2 \\ xc - a^2 &= \mp a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Novamente realizando as operações anteriores, pode-se chegar às igualdades:

$$\begin{aligned} (xc - a^2)^2 &= \left(\mp a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}\right)^2 \\ x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 &= a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\ x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= -a^4 + a^2c^2 \\ x^2(c^2 - a^2) - y^2(a^2) &= a^2(c^2 - a^2). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por $a^2(c^2 - a^2)$, note que $c > a > 0$ por definição, obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{x^2(\cancel{c^2 - a^2})}{a^2(\cancel{c^2 - a^2})} - \frac{y^2(\cancel{a^2})}{\cancel{a^2}(c^2 - a^2)} &= \frac{a^2(\cancel{c^2 - a^2})}{a^2(\cancel{c^2 - a^2})} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} &= 1. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Pela Expressão (1.46), sabe-se que $b^2 = c^2 - a^2$ e substituindo essa nova relação em (1.73), conclui-se que:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.74)$$

Portanto a Expressão (1.74) representa a equação da hipérbole apresentada.

O caso em que o eixo real localiza-se no eixo das ordenadas, o imaginário no das abscissas e o centro permanece na origem é análogo, a única diferença é que será encontrada a seguinte equação

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

1.5.4 Demais considerações

Nessa seção foram apresentadas as equações das cônicas “centradas na origem” e com eixo focal paralelo a um dos eixos cartesianos. Entretanto, as equações encontradas não são as únicas que representam cônicas. Qualquer equação quadrática é representada graficamente por uma cônica igual a uma das apresentadas anteriormente a menos de uma translação e/ou rotação.

A expressão geral de uma curva descrita por uma equação quadrática é dada por:

$$AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F = 0. \quad (1.75)$$

Na qual A, B, C, D, E e F são os coeficientes da equação dada com base nos eixos canônicos do plano cartesiano.

Qualquer curva cônica pode ser descrita através de uma equação do 2º grau em duas variáveis do tipo (1.75), do mesmo modo qualquer equação escrita algebricamente dessa forma representa uma cônica.

Dada uma cônica qualquer semelhante às apresentadas nas Subseções 1.5.1, 1.5.2 e 1.5.3, centradas na origem e com eixo(s) de simetria coincidindo com um eixo cartesiano, sua equação geral está na forma:

$$AX^2 + BY^2 + F = 0, \quad (1.76)$$

tem-se que os termos da Equação (1.75) DX e EY representam translações nos eixos x e y , respectivamente, enquanto o termo CXY indica rotação dessa cônica, alguns casos podendo ser degenerada.

Como esse não é o enfoque dessa pesquisa, será apresentado, superficialmente, nessa subseção as equações analíticas das cônicas nos casos em que se tem uma translação ou rotação da cônica original.

- Translações

A partir da Elipse (1.66), a equação da elipse cujo centro foi transladado para algum ponto (x_c, y_c) diferente da origem é dada da seguinte forma:

$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1.$	$\frac{(y - y_c)^2}{a^2} + \frac{(x - x_c)^2}{b^2} = 1.$
Equação da elipse com eixo maior paralelo ao eixo das abscissas.	Equação da elipse com eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas.

A partir da Parábola (1.69), a equação da parábola cujo centro foi transladado para algum ponto (x_c, y_c) diferente da origem é dada da seguinte forma:

$(x - x_c)^2 = 2p(y - y_c)$	$(x - x_c)^2 = -2p(y - y_c)$	$(y - y_c)^2 = 2p(x - x_c)$	$(y - y_c)^2 = -2p(x - x_c)$
Equação da parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas e concavidade voltada para cima.	Equação da parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas e concavidade voltada para baixo.	Equações das parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas e concavidade voltada para a direita.	Equações das parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas e concavidade voltada para a esquerda.

A partir da Hipérbole (1.74), a equação da hipérbole cujo centro foi transladado para algum ponto (x_c, y_c) diferente da origem é dada da seguinte forma:

$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1.$	$\frac{(y - y_c)^2}{a^2} - \frac{(x - x_c)^2}{b^2} = 1.$
Equação da hipérbole com eixo real paralelo ao eixo das abscissas.	Equação da hipérbole com eixo real paralelo ao eixo das ordenadas.

Generalizando, dada uma cônica conforme a apresentada na Seção 1.2, cuja equação geral é do tipo (1.76), que foi transladada em relação aos eixos cartesianos é dada por:

$$AX^2 + BY^2 + DX + EY + F = 0. \quad (1.77)$$

Realizando o processo de completar quadrados pode-se transformar a Equação (1.77) em uma nova equação do tipo:

$$AX'^2 + BY'^2 + F = 0, \quad (1.78)$$

no qual $X' = X - X_c$ indicará o deslocamento em relação ao eixo das abscissas e $Y' = Y - Y_c$ o da ordenada de cada ponto dessa cônica.

- Rotações

Dada uma cônica como a apresentada na Seção 1.2 cuja equação geral é do tipo (1.76) que foi rotacionada em relação aos eixos cartesianos é dada por:

$$AX^2 + BY^2 + CXY + F = 0. \quad (1.79)$$

Com o auxílio da álgebra linear pode-se determinar a equação analítica de uma cônica qualquer através de transformações lineares que realizam uma mudança de base dos eixos referenciais (x e y), transformando os coeficientes da equação na base canônica (1.79) em novos coeficientes com base em eixos adequados a qualquer rotação e atribuindo a essa cônica uma nova Equação (1.80).

$$A'X^2 + B'Y^2 + F' = 0. \quad (1.80)$$

Pode-se encontrar em alguns livros de Álgebra Linear e Geometria Analítica como se realiza essa mudança de base, entretanto este não é o foco desse trabalho, por isso não será realizada tal explanação. Para maiores informações a esse respeito uma indicação deixada é o livro Lima (2010).

1.6 PROPRIEDADE REFLETORA DAS CÔNICAS - DEMONSTRAÇÃO UTILIZANDO GEOMETRIA ANALÍTICA

Nessa seção será mostrada uma outra maneira de demonstrar as propriedades refletoras das cônicas, usando Geometria Analítica. Mas para isso, primeiramente é necessário saber como se obter

o vetor diretor de uma reta que seja tangente a uma cônica não degenerada.

Previamente, será visto como determinar a equação de uma reta tangente à uma curva no ponto $P(x_0, y_0)$

Seja uma curva cuja equação é dada por $y = f(x)$, pode-se determinar a equação da reta tangente a essa curva no ponto $P(x_0, y_0)$ através da fórmula geral de uma reta:

$$y = mx + n,$$

no qual m que é o coeficiente angular da reta pode ser visto como a derivada na função calculada no ponto (x_0, y_0) e $n = y - m(x_0)$.

Substituindo m e n , tem-se:

$$y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0. \quad (1.81)$$

• DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO DA RETA TANGENTE ÀS CÔNICAS:

Nas Subseções 1.6.1, 1.6.2 e 1.6.3, serão determinadas as equações das retas tangentes às cônicas e, a partir delas, serão demonstradas, de modo mais algébrico, as propriedades refletoras de cada uma.

1.6.1 Elipse

Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ou seja, $y = \pm b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Definimos as funções:
$$\begin{cases} f_1(x) = b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ f_2(x) = -b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} .$$

Calculando a derivada de $f_1(x)$, tem-se:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{b}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{-2x}{a^2}\right) \\ &= -\frac{bx}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Sabendo que $P(x_0, y_0)$ satisfaz a equação da elipse e calculando a derivada nesse ponto, tem-se:

$$f_1'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}. \quad (1.82)$$

Analogamente, como, $f_2(x) = -f_1(x)$, temos:

$$f_2'(x_0) = -f_1'(x_0) = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}. \quad (1.83)$$

Considerando $y = f_1(x)$, temos que ao substituir tanto (1.82) quanto (1.83) em (1.81) chega-se a seguinte equação da reta:

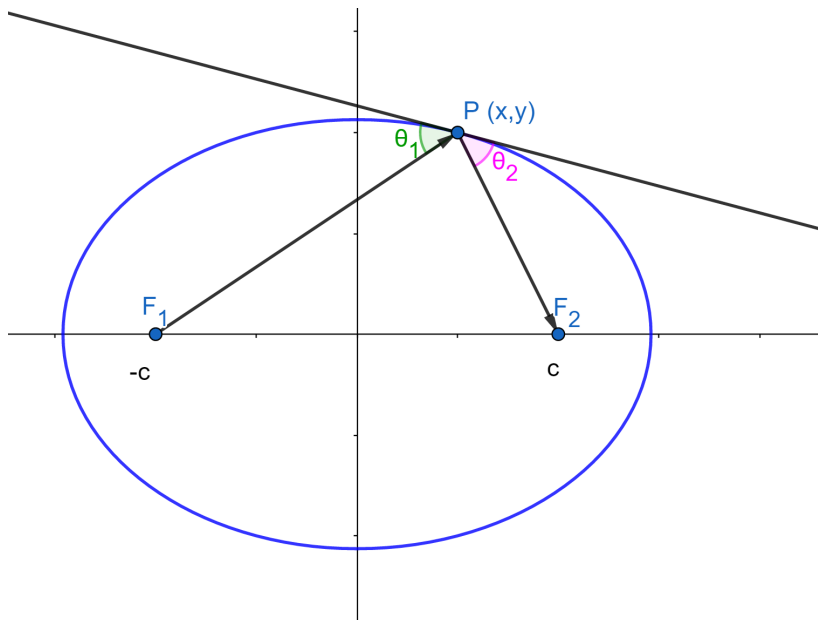
$$\begin{aligned}
 y &= -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x + y_0 + \underbrace{\frac{b^2 x_0^2}{a^2 y_0}}_{\frac{b^2}{y_0}} \\
 y &= -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x + \frac{b^2}{y_0} \\
 a^2 y_0 y + b^2 x_0 x - b^2 a^2 &= 0 \\
 \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} &= 1.
 \end{aligned} \tag{1.84}$$

A Equação (1.84) possui vetor diretor $\vec{v} = (-y_0 a^2, x_0 b^2)$.

- Propriedade refletora da elipse

Essa é uma demonstração alternativa para o Teorema 1.4.1.

Figura 60 – Lei de reflexão aplicada a uma superfície elíptica



Fonte – Elaborado pela autora

Demonstração. Queremos mostrar que $\theta_1 = \theta_2$. Sem perda de generalidade, considere a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sabendo que o raio de luz parte de F_1 e encontra a elipse em $P(x_0, y_0)$, a equação da reta tangente à elipse em P é $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ (Equação (1.84)), de vetor diretor $\vec{v} = (-y_0 a^2, x_0 b^2)$, e

$$\begin{cases} \vec{F_1 P} = (x_0 + c, y_0) \\ \vec{P F_2} = (c - x_0, -y_0) \end{cases} .$$

Calculando $\cos \theta_1$, temos:

$$\begin{aligned}
 \cos \theta_1 &= \frac{\langle \vec{F_1P}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{F_1P}\| \|\vec{v}\|} \\
 &= \frac{\langle (x_0 + c, y_0), (-y_0a^2, x_0b^2) \rangle}{\|\vec{F_1P}\| \|\vec{v}\|} \\
 &= \frac{-y_0a^2(x_0 + c) + y_0x_0b^2}{\|\vec{F_1P}\| \|\vec{v}\|} \\
 &= \frac{-y_0(x_0a^2 + ca^2 - x_0b^2)}{\|\vec{F_1P}\| \|\vec{v}\|} \\
 &= \frac{-y_0[x_0(a^2 - b^2) + ca^2]}{\|\vec{F_1P}\| \|\vec{v}\|} \\
 &= \frac{-y_0(x_0c^2 + ca^2)}{\|\vec{F_1P}\| \|\vec{v}\|} \\
 &= \frac{-y_0c(cx_0 + a^2)}{\|\vec{F_1P}\| \|\vec{v}\|}. \tag{1.85}
 \end{aligned}$$

Calculando $\cos \theta_2$, temos:

$$\begin{aligned}
 \cos \theta_2 &= \frac{\langle \vec{PF_2}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{PF_2}\| \|\vec{v}\|} \\
 &= \frac{\langle (c - x_0, -y_0), (-y_0a^2, x_0b^2) \rangle}{\|\vec{PF_2}\| \|\vec{v}\|} \\
 &= \frac{-y_0a^2(c - x_0) - y_0x_0b^2}{\|\vec{PF_2}\| \|\vec{v}\|} \\
 &= \frac{-y_0(ca^2 - x_0a^2 + x_0b^2)}{\|\vec{PF_2}\| \|\vec{v}\|} \\
 &= \frac{-y_0[x_0(-a^2 + b^2) + ca^2]}{\|\vec{PF_2}\| \|\vec{v}\|} \\
 &= \frac{-y_0(-x_0c^2 + ca^2)}{\|\vec{PF_2}\| \|\vec{v}\|} \\
 &= \frac{y_0c(cx_0 - a^2)}{\|\vec{PF_2}\| \|\vec{v}\|}. \tag{1.86}
 \end{aligned}$$

Comparando as Equações (1.85) e (1.86) e usando o fato de que:

$$\|\vec{F_1P}\| + \|\vec{PF_2}\| = 2a \Rightarrow \|\vec{F_1P}\| = 2a - \|\vec{PF_2}\|,$$

podemos estabelecer as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}
\cos \theta_1 = \cos \theta_2 &\Leftrightarrow \frac{-y_0 c (cx_0 + a^2)}{\| \vec{F_1 P} \| \| \vec{x} \|} = \frac{y_0 c (cx_0 - a^2)}{\| \vec{P F_2} \| \| \vec{x} \|} \\
&\Leftrightarrow (cx_0 - a^2) \| \vec{F_1 P} \| = -(cx_0 + a^2) \| \vec{P F_2} \| \\
&\Leftrightarrow (cx_0 - a^2) \left(2a - \| \vec{P F_2} \| \right) = -(cx_0 + a^2) \| \vec{P F_2} \| \\
&\Leftrightarrow 2acx_0 - 2a^3 - cx_0 \| \vec{P F_2} \| + a^2 \| \vec{P F_2} \| = -cx_0 \| \vec{P F_2} \| - a^2 \| \vec{P F_2} \| \\
&\Leftrightarrow 2acx_0 - 2a^3 = -2a^2 \| \vec{P F_2} \| \\
&\Leftrightarrow cx_0 - a^2 = -a \| \vec{P F_2} \| \\
&\Leftrightarrow cx_0 - a^2 = -a \sqrt{\langle (c - x_0, -y_0), (c - x_0, -y_0) \rangle} \\
&\Leftrightarrow cx_0 - a^2 = -a \sqrt{c^2 - 2cx_0 + x^2 + y^2} \\
&\Leftrightarrow (cx_0 - a^2)^2 = \left(-a \sqrt{c^2 - 2cx_0 + x^2 + y^2} \right)^2 \\
&\Leftrightarrow c^2 x_0^2 - 2cx_0 a^2 + a^4 = a^2 c^2 - 2cx_0 a^2 + a^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 \\
&\Leftrightarrow x_0^2 (c^2 - a^2) = a^2 (c^2 - a^2 + y_0^2) \\
&\Leftrightarrow x_0^2 (-b^2) = a^2 (-b^2 + y_0^2) \\
&\Leftrightarrow a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 = a^2 b^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \tag{1.87}
\end{aligned}$$

Como o ponto $P(x_0, y_0)$ pertence à elipse, a relação estabelecida na Equação (1.87) é verdadeira, conseqüentemente,

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2.$$

E como ambos os ângulos são menores que 90° , pode-se concluir que:

$$\theta_1 = \theta_2. \quad \square$$

1.6.2 Parábola

Considere a parábola de equação $x^2 = 2py$, ou seja, $y = \frac{x^2}{2p}$, com $p \in \mathbb{R}_+^*$.

Definimos a função $f(x) = \frac{x^2}{2p}$, cuja derivada é:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x}{2p} \\
&= \frac{x}{p}.
\end{aligned}$$

Essa derivada, quando aplicada no ponto $P(x_0, y_0)$, é dada por:

$$f'(x_0) = \frac{x_0}{p}. \quad (1.88)$$

Substituindo (1.88) em (1.81), tem-se:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x_0 x}{p} + y_0 - \frac{x_0^2}{p} \\ py &= x_0 x + py_0 - x_0^2 \\ x_0 x - py + py_0 - x_0^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.89)$$

A Equação (1.89) possui vetor diretor $v = (p, x_0)$.

- Propriedade refletora da parábola

Essa é uma demonstração alternativa para o Teorema 1.4.2.

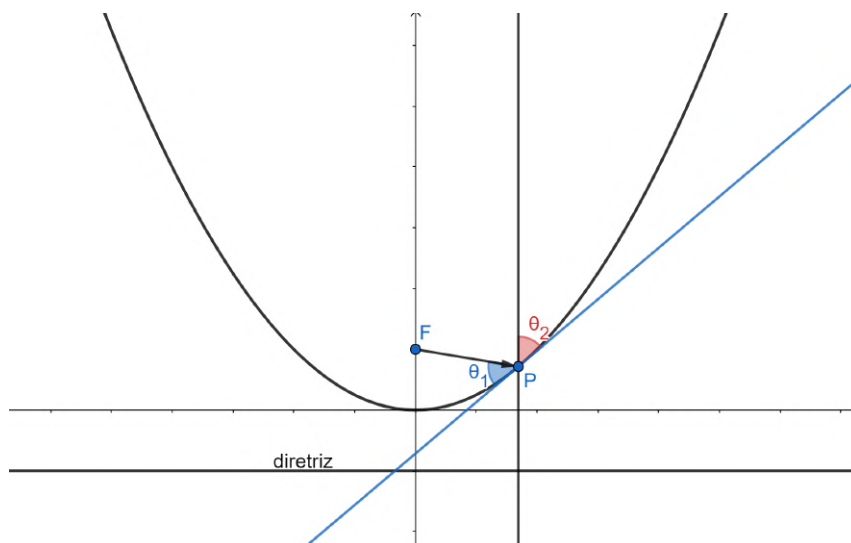
Demonstração. Considere a parábola de equação

$$x^2 = 2py \Rightarrow y = \frac{x^2}{2p},$$

cujo foco é $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$ e diretriz é a reta $r : y = -\frac{p}{2}$.

Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto pertencente à parábola, tem-se que a equação da reta tangente à parábola em P é $x_0 x - py + py_0 - x_0^2 = 0$, conforme a Equação (1.89), e seu vetor diretor é dado por $\vec{v} = (p, x_0)$.

Figura 61 – Lei de reflexão aplicada a uma superfície parabólica



Fonte – Elaborado pela autora

Vamos mostrar que $\theta_1 = \theta_2$.

Sabe-se que $\vec{PF} = \left(-x_0, \frac{p}{2} - y_0\right)$ e $\vec{u} = (0, -1)$. Calculando o $\cos \theta_1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{\langle \vec{PF}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{PF}\| \|\vec{v}\|} \\ &= \frac{\langle (-x_0, \frac{p}{2} - y_0), (p, x_0) \rangle}{\|\vec{PF}\| \|\vec{v}\|} \\ &= \frac{-px_0 + \frac{p}{2}x_0 - x_0y_0}{\|\vec{PF}\| \|\vec{v}\|} \\ &= \frac{-x_0 \left(\frac{p}{2} + y_0\right)}{\|\vec{PF}\| \|\vec{v}\|}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Calculando o $\cos \theta_2$, tem-se:

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \\ &= \frac{\langle (0, -1), (p, x_0) \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \\ &= \frac{-x_0}{1 \cdot \|\vec{v}\|}. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Comparando as Equações (1.90) e (1.91) e usando o fato de que

$$\|\vec{PF}\| = \text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r) = \frac{p}{2} + y_0, \quad (1.92)$$

podemos estabelecer as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 = \cos \theta_2 &\Leftrightarrow \frac{\cancel{-x_0} \left(\frac{p}{2} + y_0\right)}{\|\vec{PF}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\cancel{-x_0}}{\|\vec{v}\|} \\ &\Leftrightarrow \frac{p}{2} + y_0 = \|\vec{PF}\|. \end{aligned} \quad (1.93)$$

A Relação (1.93) é verdadeira pela Definição de parábola como L.G. representada pela Equação (1.92). Logo,

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2$$

é verdade e como ambos os ângulos são menores que 90° , então conclui-se que:

$$\theta_1 = \theta_2. \quad \square$$

1.6.3 Hipérbole

Considere a hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ou seja, $y = \pm b \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Definimos as funções:
$$\begin{cases} f_1(x) = b \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ f_2(x) = -b \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} .$$

Calculando a derivada de $f_1(x)$, tem-se:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{b}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2x}{a^2} \right) \\ &= \frac{bx}{a^2} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Sabendo que $P(x_0, y_0)$ satisfaz a equação da hipérbole e calculando a derivada de $f_1(x)$ nesse ponto, tem-se:

$$f_1'(x_0) = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} . \quad (1.94)$$

Analogamente, como, $f_2(x) = -f_1(x)$, temos:

$$f_2'(x_0) = -f_1'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} . \quad (1.95)$$

Considerando $y = f_1(x)$, temos que, ao substituir tanto (1.94) quanto (1.95) em (1.81), chega-se a seguinte equação da reta:

$$\begin{aligned} y &= \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x + y_0 + \underbrace{\frac{b^2 x_0^2}{a^2 y_0}}_{\frac{b^2}{y_0}} \\ y &= \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x + \frac{b^2}{y_0} \\ a^2 y_0 y - b^2 x_0 x - b^2 a^2 &= 0 \\ \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} &= 1. \end{aligned} \quad (1.96)$$

A Equação (1.96) possui vetor diretor $\vec{v} = (-a^2 y_0, -b^2 x_0)$.

- Propriedade refletora da hipérbole

Essa é uma demonstração alternativa para o Teorema 1.4.3.

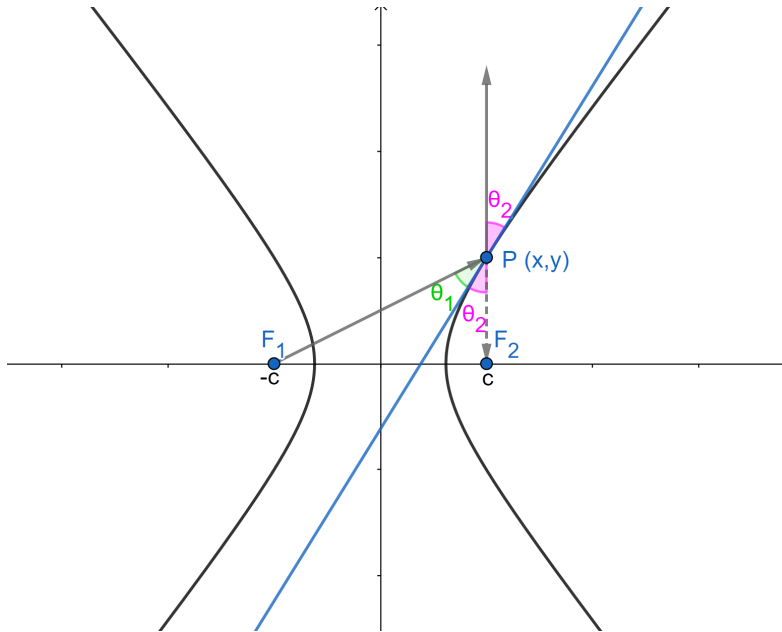
Demonstração. Considere a hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Destaca-se aí que $a, b, c \neq 0$.

Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto pertencente à hipérbole com $x_0, y_0 \neq 0$, tem-se que a equação da reta tangente à hipérbole em P é $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$ e seu vetor diretor é dado por $\vec{v} = (a^2y_0, b^2x_0)$, conforme a Equação (1.96).

Figura 62 – Lei de reflexão aplicada a uma superfície hiperbólica



Fonte – Elaborado pela autora

Vamos mostrar que $\theta_1 = \theta_2$.

$$\text{Sabe-se que: } \begin{cases} \vec{F_1P} = (x_0 + c, y_0) \\ \vec{PF_2} = (c - x_0, -y_0) \\ \vec{v} = (a^2y_0, b^2x_0). \end{cases}$$

Sabendo que θ_1 é o ângulo formado os vetores $\vec{F_1P}$ e \vec{v} , o $\cos \theta_1$, pode ser obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{\langle \vec{F_1P}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{F_1P}\| \|\vec{v}\|} \\ &= \frac{\langle (x_0 + c, y_0), (a^2y_0, b^2x_0) \rangle}{\|\vec{F_1P}\| \|\vec{v}\|} \\ &= \frac{y_0(x_0c^2 + ca^2)}{\|\vec{F_1P}\| \|\vec{v}\|} \\ &= \frac{y_0c(cx_0 + a^2)}{\|\vec{F_1P}\| \|\vec{v}\|}. \end{aligned} \tag{1.97}$$

Já o ângulo θ_2 , é o ângulo entre os vetores $\vec{PF_2}$ e \vec{v} . Pode-se calcular $\cos \theta_2$, através da expressão:

$$\begin{aligned}
 \cos \theta_2 &= \frac{\langle \vec{PF}_2, \vec{v} \rangle}{\|\vec{PF}_2\| \|\vec{v}\|} \\
 &= \frac{\langle (c - x_0, -y_0), (a^2 y_0, b^2 x_0) \rangle}{\|\vec{PF}_2\| \|\vec{v}\|} \\
 &= \frac{y_0 c (-cx_0 + a^2)}{\|\vec{PF}_2\| \|\vec{v}\|}. \tag{1.98}
 \end{aligned}$$

Sabendo que $x_0, y_0, a, b, c \neq 0$ e \vec{v} é um vetor não nulo, pois representa o vetor diretor de uma reta, pode-se, comparando as Equações (1.97) e (1.98), estabelecer as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}
 \cos \theta_1 = \cos \theta_2 &\Leftrightarrow \frac{y_0 c (cx_0 + a^2)}{\|\vec{F}_1 P\| \|\vec{\ell}\|} = \frac{y_0 c (-cx_0 + a^2)}{\|\vec{PF}_2\| \|\vec{\ell}\|} \\
 &\Leftrightarrow (-cx_0 + a^2) \|\vec{F}_1 P\| = (cx_0 + a^2) \|\vec{PF}_2\|. \tag{1.99}
 \end{aligned}$$

Pela Definição 1.2.5 de hipérbole como L.G., tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \left| \|\vec{F}_1 P\| - \|\vec{PF}_2\| \right| &= 2a \\
 \left| \|\vec{F}_1 P\| - \|\vec{PF}_2\| \right| &= \pm 2a \\
 \|\vec{F}_1 P\| &= \pm 2a + \|\vec{PF}_2\|. \tag{1.100}
 \end{aligned}$$

Substituindo a Equação (1.100) na Equivalência (1.99), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \cos \theta_1 = \cos \theta_2 &\Leftrightarrow (-cx_0 + a^2) \left(\pm 2a - \|\vec{PF}_2\| \right) = (cx_0 + a^2) \|\vec{PF}_2\| \\
 &\Leftrightarrow \mp cx_0 \pm a^2 = a \|\vec{PF}_2\|. \tag{1.101}
 \end{aligned}$$

Note que,

$$\|\vec{PF}_2\| = \sqrt{\langle (c - x_0, -y_0), (c - x_0, -y_0) \rangle} = \sqrt{c^2 - 2cx_0 + x_0^2 + y_0^2}. \tag{1.102}$$

Logo, substituindo a Equação (1.102) em (1.101) e realizando algumas manipulações, chega-se a seguinte expressão:

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2 \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \tag{1.103}$$

Como o ponto $P(x_0, y_0)$ pertence à hipérbole, a relação estabelecida na Equação (1.103) é verdadeira, conseqüentemente,

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2.$$

E como ambos os ângulos são menores que 90° , pode-se concluir que:

$$\theta_1 = \theta_2.$$

□

2 DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Em uma sala de aula, cada atividade ou tarefa proposta pelo professor com uma determinada finalidade é classificada por [Zabala \(2015\)](#) como unidade elementar do processo de ensino-aprendizagem. Entretanto, ele, apesar de reconhecer importância dessas unidades, defende que elas são insuficientes por si só para realizar uma análise completa acerca do processo de ensino-aprendizagem de um determinado conteúdo. Para ficar mais claro, segue um exemplo:

Em uma abordagem tradicional, a realização de uma lista de exercício acerca de um determinado assunto normalmente é feita após a sua exposição por parte do professor. Enquanto em algumas metodologias ativas de ensino, como na sala de aula invertida, ela pode ser proposta inicialmente para os alunos e o seu conteúdo ser trazido para aula através de um debate mediado, posteriormente, pelo professor.

No exemplo acima, pode-se observar que a unidade elementar “lista de exercício” pode assumir funções e características diferentes que dependem das unidades elementares que a precede ou sucede. Na primeira situação, ela pode ser entendida como um meio de aferir a internalização dos tópicos apresentados na aula expositiva. Enquanto no segundo, pode ser que o professor quis usá-la para introduzir o conteúdo, despertando no estudante habilidades como a investigação e o protagonismo.

Assim, é necessário tomar uma outra unidade que permita realizar a análise desse desenvolvimento educativo em torno de um conteúdo, relacionando as unidades elementares entre si e situando-as em relação às diversas variáveis desse processo como, por exemplo, recursos e tempo utilizados. [Zabala \(2015\)](#) apresenta a “sequência de atividades ou sequência didática” como essa tal unidade de caráter processual.

Sequência didática é um termo comum no mundo docente, entretanto para os leitores não familiarizados com o termo pode ser confundido com outros termos pedagógicos. Sendo assim, a definição de sequência didática considerada nesse trabalho é:

“Sequência didática é um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano. É uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido.” ([PERETTI; COSTA, 2013](#), p. 6)

Além de considerar a sequência didática fio condutor do processo de ensino-aprendizagem, pode-se combiná-la à outras ferramentas para potencializar essa construção de conhecimento. Uma dessas ferramentas é a ludicidade.

Segundo ([EVANGELISTA et al., 2013](#), p. 2), “a Matemática é uma ciência muito complexa

[...] (que) requer atenção especial e disciplina na sua aplicação, o que faz com que muitos alunos apresentem certa dificuldade no momento da sua aprendizagem e execução”, por isso é importantíssimo obter a atenção e o engajamento dos estudantes nessa caminhada. As atividades lúdicas, como jogos os experimentos práticos, são armas muito poderosas quando se tem esse objetivo.

Conforme (EVANGELISTA et al., 2013, p. 5), “para os alunos, aula boa é aquela que consegue prender a atenção deles de forma que o tempo passe sem que eles percebam e proporcione aprendizagem interativa e dinâmica”, atribuições facilmente alcançadas quando se envolve a ludicidade.

Dentre os benéficos de se aplicar uma sequência didática lúdica, destaca-se:

“Explicações que são feitas com exemplos que atraem a atenção e a curiosidade dos alunos são absorvidas e interpretadas com mais facilidade. Temas que são desenvolvidos em ambientes diversificados, claros, arejados, que proporcione o bem estar do aluno e que exija dele participação ativa, certamente não serão esquecidos. Os alunos gostam e preferem aulas diferentes, a metodologia rotineira de quadro negro, sala de aula com professor escrevendo e o aluno copiando está ultrapassado e não desperta no aluno nenhum estímulo nem interesse de prestar atenção e aprender o que o professor está ensinando.” (EVANGELISTA et al., 2013, p. 5)

Diante dessa explicação acerca das vantagens dessas duas ferramentas, parece relevante utilizá-las. Portanto, essa pesquisa foi feita atentando para essa rica combinação pedagógica entre o uso da sequência didática e da ludicidade.

O conteúdo de cônicas faz parte do currículo das escolas do sistema integral de Pernambuco, previsto para o terceiro ano do Ensino Médio. Entretanto, devido à organização e planejamento internos da escola foi decidido que os conteúdos dos alunos do último ano seria focado nos assuntos que mais são cobrados em avaliações externas, o que não é o caso das seções cônicas. Por isso, optou-se por realizar essa pesquisa com uma turma de segundo ano.

O trabalho foi uma pesquisa de abordagem qualitativa realizada na Escola de Referência em Ensino Médio (EREM) Aníbal Falcão, localizada em Tejipió, bairro de Recife-PE. Foram aplicadas, no 4º bimestre de 2018, duas sequências didáticas em uma turma do 2º ano do Ensino Médio e ao final de cada sequência, foi realizado um teste avaliativo. Essas sequências também podem ser vistas como parte de uma única sequência didática dividida em dois “grandes momentos”. O intuito de separar em duas sequências didáticas é o fato de a segunda trabalhar o lúdico e a primeira não, entretanto, elas podem ser consideradas também como complementares.

Em um primeiro momento foi executada uma sequência didática sob uma abordagem tradicional, isto é, aulas expositivas no quadro ou de exercícios com o auxílio do livro didático Souza e Garcia (2016). No segundo momento, promoveram-se atividades lúdicas diferenciadas como a construção de modelos matemáticos concretos, observação das seções cônicas a partir de feixes de luz, construção das cônicas com barbante, dobraduras, experimentos de reflexão e aula de campo.

Uma das intenções desse trabalho ao comparar esses dois tipos de sequências didáticas é refletir sobre possíveis benefícios de aplicar o lúdico nas aulas de matemática no ensino-aprendizagem das seções cônicas.

Os materiais utilizados no segundo momento são, em sua grande maioria, de fácil acesso e baixo custo como lanterna, cartolina, barbante, régua, compasso, tachinhas, isopor, entre outros.

Além de reutilizar materiais que seriam descartados promovendo, assim, um impacto positivo no meio ambiente, os experimentos produzidos foram expostos na II Feira de Matemática da EREM Aníbal Falcão pelos alunos da turma do 3º ano A, além de servirem de recurso pedagógico para auxiliar professores no processo de ensino-aprendizagem das cônicas em turmas futuras.

Na maioria das atividades diferenciadas propostas, optou-se por materializar os conceitos trabalhados no livro didático concordando com o que diz Da Silva et al. que “o material concreto é uma forma de apresentar ao aluno uma maneira mais fácil e palpável de aprender matemática e como ela pode ser usada no nosso cotidiano.” (SILVA et al., 2016, p. 4)

Nessa seção, serão apresentadas as trajetórias de aplicação das sequências didáticas dessa pesquisa.

2.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA I - APLICAÇÃO DO MÉTODO TRADICIONAL

Esta etapa foi realizada seguindo apenas as orientações do livro didático adotado em sala, Souza e Garcia (2016), acrescida de uma aula expositiva sobre as propriedades refletoras das cônicas. Nesse momento, seguiu-se as recomendações no livro didático e os alunos não participaram em momento algum das construções, mantendo o processo de ensino-aprendizagem sob responsabilidade unilateral do professor, característica do ensino tradicional.

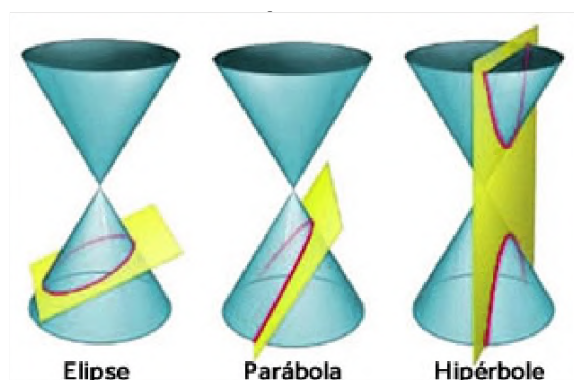
Segue abaixo a sequência didática realizada nesta primeira fase de aplicação da pesquisa.

- **Tema:** Estudo das cônicas e suas propriedades refletoras.
- **Conteúdos:** Seções em um cone de duas folhas; Estudo da elipse, hipérbole e parábola; Propriedade refletora da elipse, hipérbole e parábola.
- **Objetivo geral:** Apresentar uma sequência didática na abordagem tradicional de ensino acerca das cônicas e suas propriedades refletoras.
- **Objetivos específicos:**
 1. Identificar e classificar as cônicas, diferenciando-as entre si;
 2. Reconhecer seus componentes e associá-los às suas propriedades refletoras;
 3. Defini-las como lugar geométrico;
 4. Encontrar as equações cônicas de cada curva estudada.
- **Tempo estimado:** 10 aulas de 50 minutos cada.
- **Desenvolvimento:** Inicialmente foi apresentado um breve relato histórico acerca do desenvolvimento do estudo das cônicas. Nesse momento, as cônicas foram inseridas como seções de um plano em um cone de duas folhas conforme ilustrado na Figura 63. Em seguida, cada cônica (elipse, hipérbole e parábola) foi estudada individualmente.

- **Avaliação:**

- *Formativa:* fazer e receber perguntas, observar o desempenho dos alunos, exercícios do livro didático realizados em sala de aula.
- *Somativa:* Realização de um teste individual e sem consulta composto por 10 questões abertas acerca do assunto estudado.

Figura 63 – Representação das seções cônicas

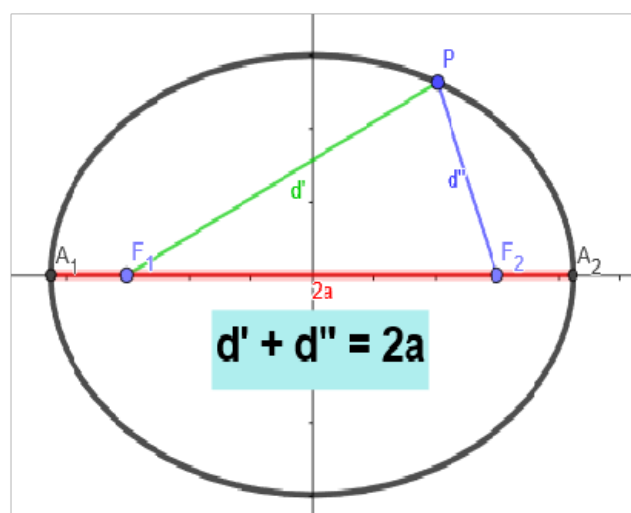


Fonte – Matemática (1998-2020)

2.1.1 Primeiro momento: Estudo da elipse.

Para o 1º momento foi realizado o estudo da elipse. Realizou-se no quadro, com o auxílio de ventosas, barbante e piloto, a construção de uma elipse conforme a orientação vista na Subseção 1.3.1 e ilustrada pela Figura 29. Após isso, seus elementos foram indicados. Depois, foi mostrado a relação entre a excentricidade de uma elipse e seu formato. Para finalizar esta etapa, foi apresentada a definição de elipse como L.G. e suas equações cartesianas.

Figura 64 – Definição geométrica da elipse



Fonte – Elaborado pela autora

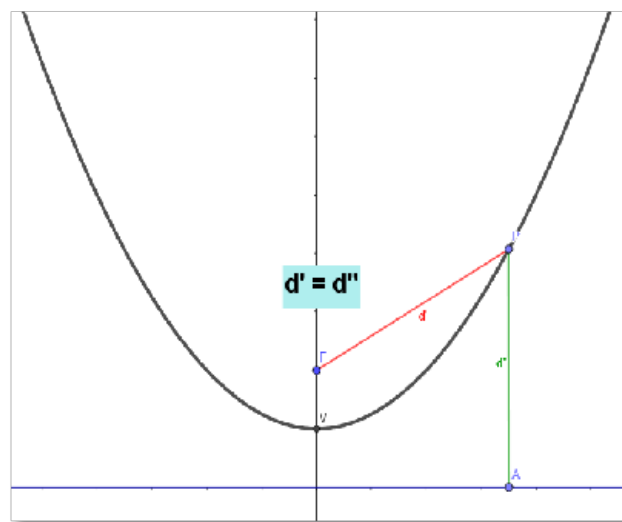
Equação cartesiana da elipse:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1. \quad (2.1)$$

2.1.2 Segundo momento: Estudo da parábola.

O momento dois foi iniciado relembrando a seção do cone que determina uma parábola. Após isso, foi construída uma parábola no quadro, com o auxílio de ventosas, esquadro, régua e piloto, conforme a orientação vista na Subseção 1.3.2 e ilustrada pela Figura 33. Em seguida, seus elementos foram indicados. Foi apresentada a definição de parábola como L.G. e em seguida, suas equações cartesianas, isto encerra o 2º momento.

Figura 65 – Definição geométrica das parábola



Fonte – Elaborado pela autora

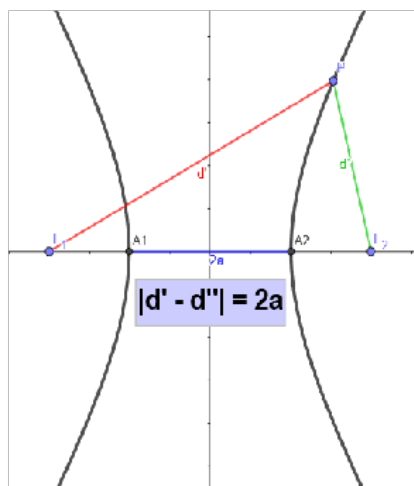
Equação cartesiana da parábola:

$$y - y_c = \frac{1}{4p}(x - x_c)^2. \quad (2.2)$$

2.1.3 Terceiro momento: Estudo da hipérbole.

Após relembrar a seção no cone de duas folhas que determina uma hipérbole, foi construída no quadro, com o auxílio de uma régua, ventosas, barbante e piloto, uma hipérbole conforme a orientação vista na Subseção 1.3.3 e ilustrada pelas Figuras 37 e 38. Em seguida, seus elementos foram indicados.

Foi apresentada a definição de hipérbole como L.G. e logo após, mostrada a relação entre a excentricidade de uma hipérbole e seu formato. Um elemento importante para o estudo analítico da hipérbole são as suas assíntotas, por isso foi mostrado como determiná-las e dito como elas são importantes para esboçar o gráfico de uma hipérbole a partir de suas equações cartesianas. O terceiro momento foi concluído com a apresentação das equações cartesianas da hipérbole e como, a partir delas, determiná-la.

Figura 66 – Definição geométrica da hipérbole

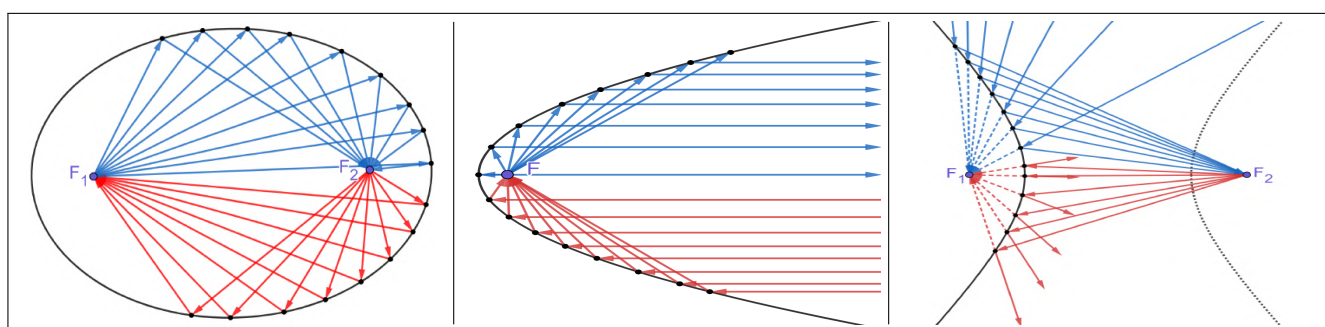
Fonte – Elaborado pela autora

Equação cartesiana da hipérbole:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1. \quad (2.3)$$

2.1.4 Quarto momento: Apresentando as propriedades refletoras das cônicas.

As cônicas estudadas nas três etapas anteriores apresentam propriedades refletoras que são muito utilizadas em áreas como a engenharia, astronomia, medicina, entre outras. Essas propriedades são úteis para reforçar ou esclarecer alguns pontos referentes ao estudo das cônicas, por isso, elas foram inseridas nessa sequência didática. Nesta etapa, as propriedades refletoras das cônicas foram apenas apresentadas através de esboços de feixes de retas representando raios de luz refletidos em uma superfície cônica desenhados no quadro.

Figura 67 – Representação da reflexão de feixes de luz sobre superfícies cônicas refletoras - propriedades refletoras das cônicas

Fonte – Elaborado pela autora

2.1.5 Quinto momento: Aplicação do Teste I.

Após as aulas tradicionais foi aplicado o Teste I (APÊNDICE A), para fins avaliativos, composto por 10 perguntas subjetivas acerca do assunto estudado. O teste foi realizado com 35 alunos

em regime de prova individual não pesquisada. No Capítulo 3, será feito o detalhamento do teste juntamente com a análise de resultados.

Em algumas atividades da primeira parte utilizou-se materiais que não são aplicados comumente nas aulas tradicionais, como ventosas e barbante. Isso foi feito para seguir fielmente a recomendação no livro didático, mas apesar de se utilizar esses materiais os alunos não participaram em momento algum dessas construções, mantendo o processo de ensino-aprendizagem sob responsabilidade unilateral do professor, característica do ensino tradicional.

2.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA II - APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES LÚDICAS

Nessa seção, será apresentada a sequência didática desenvolvida com o intuito de tornar mais lúdico o ensino de cônicas e suas propriedades refletoras.

O enfoque dessa sequência didática foi nas definições gerais e aplicação das propriedades refletoras, não se apegando à rigidez das fórmulas analíticas das cônicas, sendo assim, não demandam dos alunos conhecimentos matemáticos muito sofisticados ou abstratos, podendo inclusive, serem aplicados em séries anteriores, como, por exemplo, nos anos finais do Ensino Fundamental.

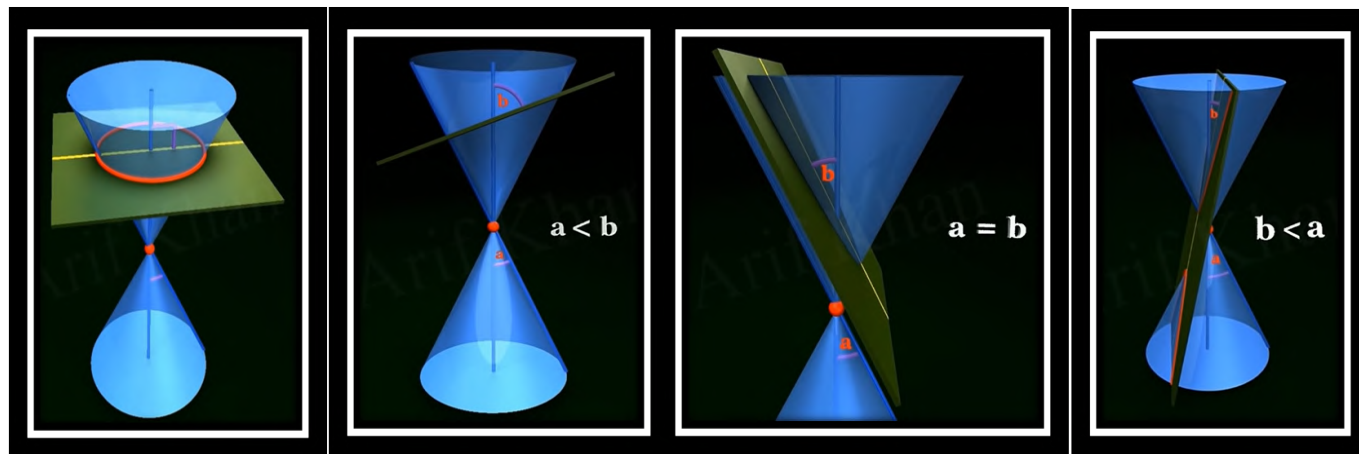
- **Tema:** As cônicas e suas propriedades refletoras.
- **Público alvo:** alunos do Ensino Básico.
- **Duração:** 12 aulas (aproximadamente 4 encontros com duas aulas de 50 minutos cada e 1 encontro de quatro aulas de 50 minutos cada para a visita técnica).
- **Disciplina:** Matemática.
- **Objetivo geral:** Apresentar uma sequência didática utilizando atividades lúdicas no ensino das cônicas e suas propriedades refletoras.
- **Objetivos específicos:**
 1. Reconhecer as características de cada cônica;
 2. Identificar os elementos das cônicas;
 3. Comprovar a definição de cada cônica através de teste de medição;
 4. Identificar as retas tangentes às curvas;
 5. Compreender e aplicar as propriedades refletoras das cônicas;
 6. Motivar os alunos a estudarem matemática.
- **Avaliação:**
 - *Formativa:* fazer e receber perguntas, observar o desempenho dos alunos, produções dos materiais produzidos nas diversas atividades de classe.
 - *Somativa:* Realização de um teste individual e sem consulta composto por 8 questões abertas acerca do assunto estudado.

2.2.1 Atividade 1: Experimento com lanterna. (Duração: 1 aula)

Materiais adotados: notebook, data show e lanterna.

Foi apresentado inicialmente o vídeo [Learning \(2015\)](#) mostrando a relação de cada cônica com o ângulo de inclinação do plano que secciona o cone duplo em relação ao seu eixo, (Ver Figura 68), nesse aspecto, pode-se obter quatro tipos de ângulos:

Figura 68 – Determinação das cônicas através da inclinação de um plano que secciona um cone de duas folhas

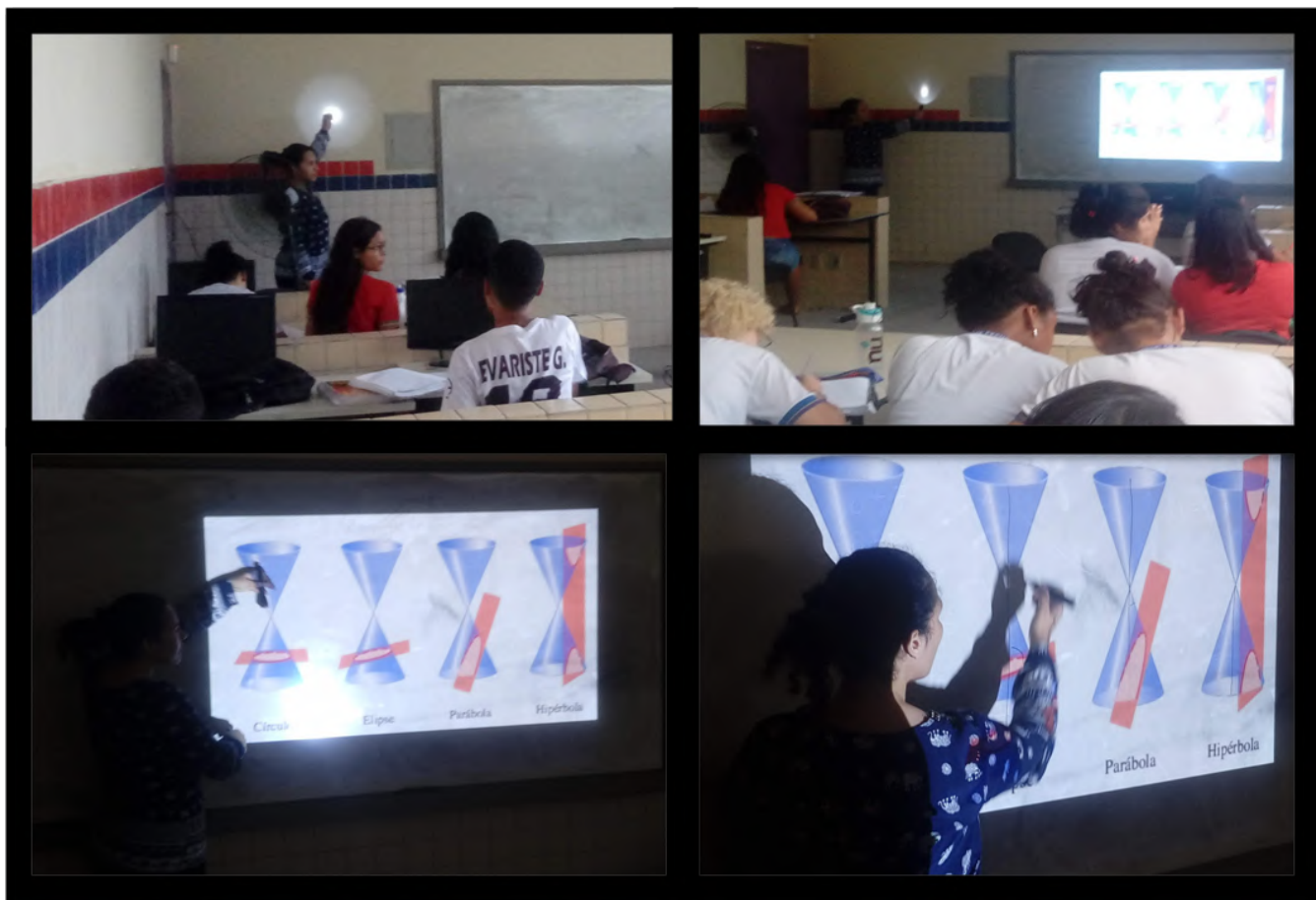


Fonte – Print Screen's retirados de [Learning \(2015\)](#)

1. Reto: circunferência;
2. Maior que o da geratriz do cone: elipse;
3. Igual ao da geratriz do cone: parábola;
4. Menor que o da geratriz do cone: hipérbole.

Em um ambiente suficientemente escuro, direcionou-se a lanterna para a parede e, a medida que se inclinou a lanterna em relação à parede, a intersecção dos feixes de luz com a parede desenhava as cônicas. Os feixes de luz que saem da lanterna são emitidos em forma de cone e a parede se comporta como um plano que o secciona. A cada figura nova que surgia os alunos eram instigados a refletir para responder as seguintes perguntas:

1. Que tipo de ângulo o plano faz com o eixo do cone?
2. Qual é a cônica formada?

Figura 69 – Experimentos com lanterna

Fonte – Elaborado pela autora

Através da variação da inclinação da lanterna¹ pode-se obter uma circunferência, uma elipse, uma parábola ou um ramo de hipérbole, conforme demonstrado na Seção 1.2.

2.2.2 Atividade 2: Construções das cônicas com barbante. (Duração: 3 aulas)

A segunda atividade diferenciada proposta foi a construção das cônicas pelos alunos.

Materiais utilizados: cartolina, barbante, régua, esquadro, lápis e tachinhas.

Essa atividade seguiu os procedimentos de construção apresentados na Seção 1.3 e foi realizada pelos próprios alunos.

(i) Elipse

Para construir a elipse seguiu-se os passos descritos na Subseção 1.3.1 (Ver Figura 29).

¹ Em outra perspectiva pode-se considerar que o plano seccionador do cone (formato com que os feixes se posicionam no espaço), representado pela parede, é quem se move em relação ao eixo desse cone.

Figura 70 – Construção da elipse com o auxílio de barbante

Fonte – Elaborado pela autora

Após a construção, os alunos marcaram dois pontos quaisquer sobre a elipse e com o auxílio da régua verificaram que a soma das distâncias de qualquer um desses pontos aos pontos F_1 e F_2 é constante, concluindo assim que a figura obtida foi uma elipse. Em seguida, identificaram na figura os elementos da elipse.

(ii) Parábola

Para construir a parábola seguiu-se os passos descritos na Subseção 1.3.2 (Ver Figura 33).

Figura 71 – Construção da parábola com o auxílio de barbante

Fonte – Elaborado pela autora

Após a construção, os alunos marcaram dois pontos quaisquer sobre a parábola e com o auxílio da régua verificaram que as distâncias entre esses pontos e a reta d (diretriz) e o ponto F (foco) são iguais, concluindo assim que figura obtida foi uma parábola. Em seguida, identificaram na figura os elementos da parábola.

(iii) Hipérbole

Para construir a hipérbole seguiu-se os passos relatado na Subseção 1.3.3 (Ver Figura 37).

Figura 72 – Construção da hipérbole com o auxílio de barbante

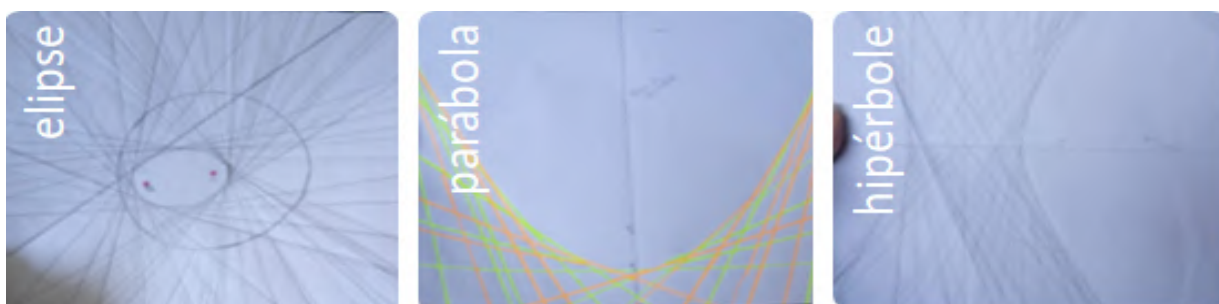
Fonte – Elaborado pela autora

Após a construção, os alunos marcaram dois pontos quaisquer sobre a hipérbole e com o auxílio da régua verificaram que o módulo da diferença das distâncias entre esses pontos e os pontos F_1 e F_2 são sempre constantes, concluindo assim que a figura obtida foi uma hipérbole. Em seguida, identificaram na figura os elementos da hipérbole.

2.2.3 Atividade 3: Construção das cônicas usando dobradura. (Duração: 2 aulas)

O terceiro experimento realizado utiliza a técnica de dobraduras. O procedimento segue os algoritmos apresentados nas Figuras 46, 50 e 54, na qual cada mediatriz (reta tangente) traçada nas figuras corresponde a uma dobra de papel. Assim como o concluído na Seção 1.4, a curva delimitada pelas dobras são as cônicas. Pode-se ver mais detalhes acerca desse processo de dobradura no trabalho de Tenani, Silveira e Uribe (2015) e nos vídeos do YouTube Rodrigues (2015a), Rodrigues (2015c) e Rodrigues (2015b).

A Figura 73 mostra um exemplo de cada curva produzida em sala de aula pelos alunos durante o processo de aplicação do terceiro experimento.

Figura 73 – Cônicas obtidas através de dobraduras

Fonte – Elaborado pela autora

No processo de construção o aluno entenderá as características e propriedades de cada cônica, além de desenvolver habilidades de manipulação de instrumentos geométricos como régua e compasso. A Figura 74 mostra tal experimento sendo realizado.

Figura 74 – Construção das cônicas através de dobraduras



Fonte – Elaborado pela autora

2.2.4 Atividade 4: Experimento de reflexão. (Duração: 2 aulas)

(i) Propriedade refletora da elipse

Conforme visto e demonstrado no Teorema 1.4.1, a elipse possui uma propriedade refletora. Nessa atividade, foi proposta a construção de um modelo concreto que mostre a aplicação dessa propriedade em um "bilhar elíptico" considerando a luz como conjunto de partículas em substituição das bolas de bilhar.

Para simular essa propriedade refletora da elipse utilizou-se folhas de isopor, folhas de papel laminado e laser.

Utilizando o molde, desenhou-se uma mesma elipse em cinco folhas de isopor. Retirou-se a parte interna da elipse e colou-se as placas umas sobre as outras e em seguida, esse bloco foi colado em uma folha inteira de isopor formando uma cavidade com borda elíptica. Nessa base, marcou-se os focos e a borda foi toda revestida de papel laminado. O laser foi posicionado horizontalmente em um dos focos de maneira que o feixe de luz refletisse na borda da elipse. Verificou-se que independente

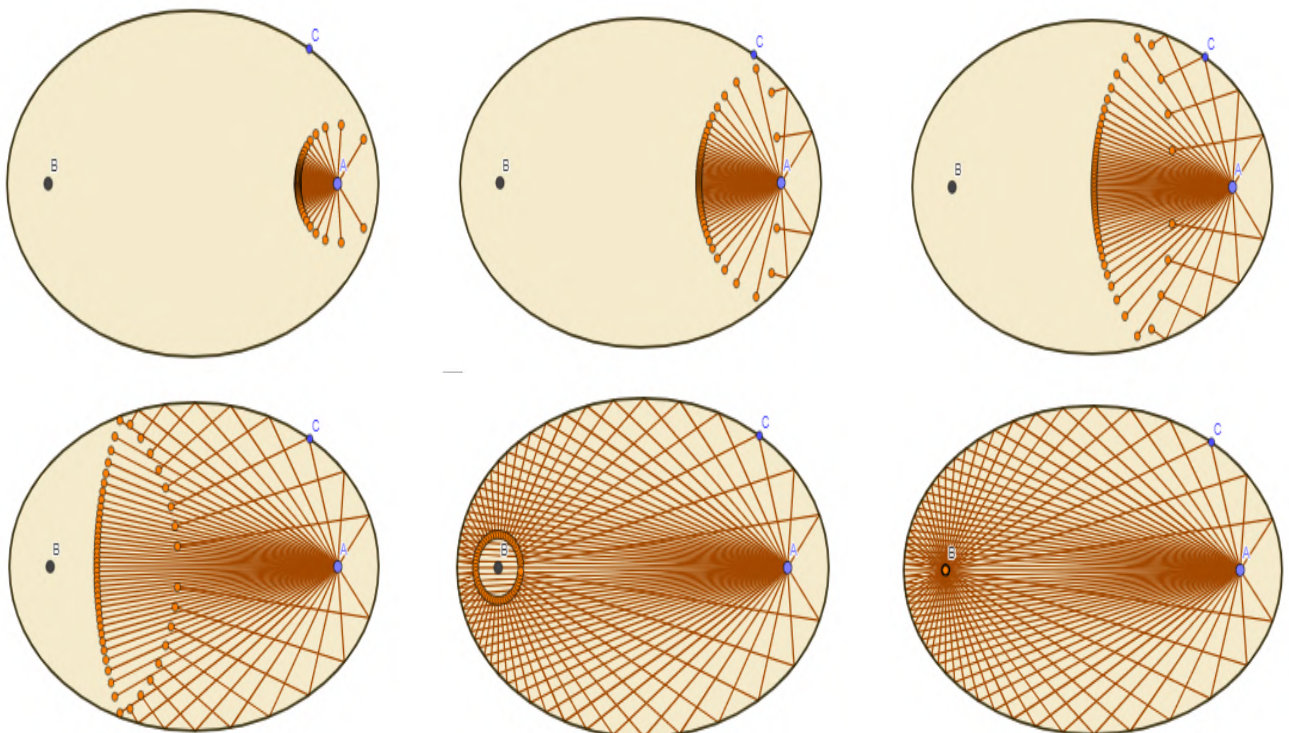
da direção para onde se apontava o laser, o feixe de luz refletido sempre passava pelo outro foco. Conforme ilustrado na Figura 75.

Figura 75 – Experimento de reflexão numa superfície refletora elíptica



Fonte – Elaborado pela autora

Figura 76 – Esquema de reflexão dos raios de luz no experimento da Figura 75



Fonte – Bortolossi (2020)

(ii) Propriedade refletora da parábola

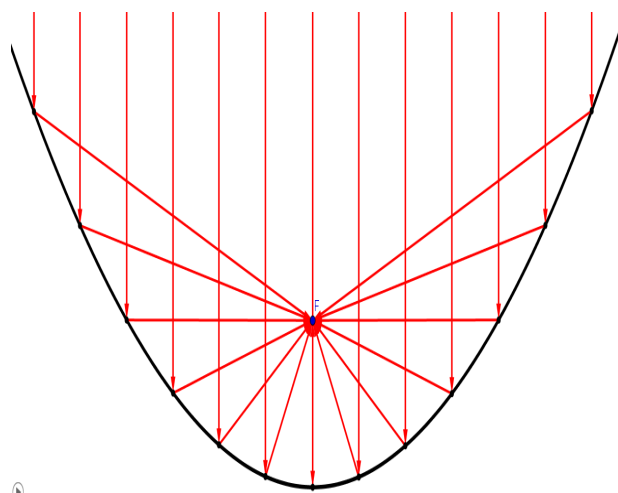
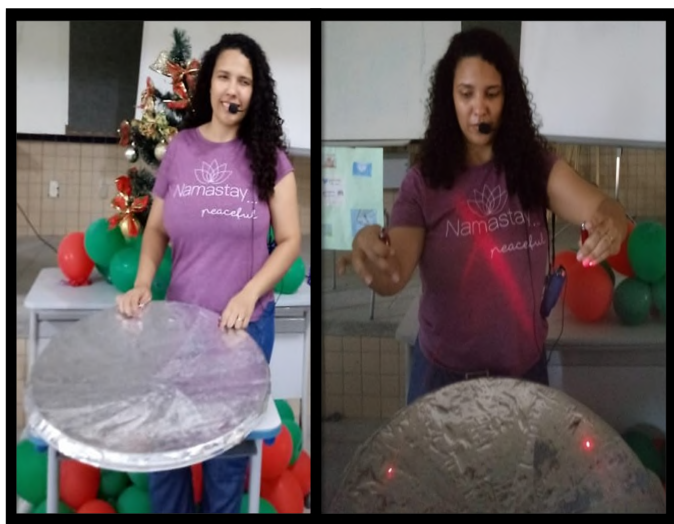
No Teorema 1.4.2 foi apresentada e demonstrada a propriedade refletora da parábola, veja a Figura 48. Para essa atividade, foi proposta a construção de um modelo concreto que mostre a aplicação dessa propriedade em uma antena parabólica.

Para simular essa propriedade refletora da parábola utilizou-se uma antena parabólica, papel alumínio, dois lasers e desodorante aerossol.

Cobriu-se a superfície côncava da antena com papel alumínio tomando cuidado de evitar ao máximo formar bolhas. Em um ambiente com pouca luz, direcionou-se os lasers à essa superfície da antena de modo que os raios de luz fossem paralelos ao eixo de simetria do parabolóide. Para tornar os raios dos lasers mais nítidos, borrifou-se desodorante aerossol no ar ao longo do trajeto da luz.

Após repetir esse procedimento em vários pontos do parabolóide, verificou-se que os raios sempre se cruzavam em um determinado ponto (foco das parábolas).

Figura 77 – Experimento de reflexão numa superfície refletora parabólica



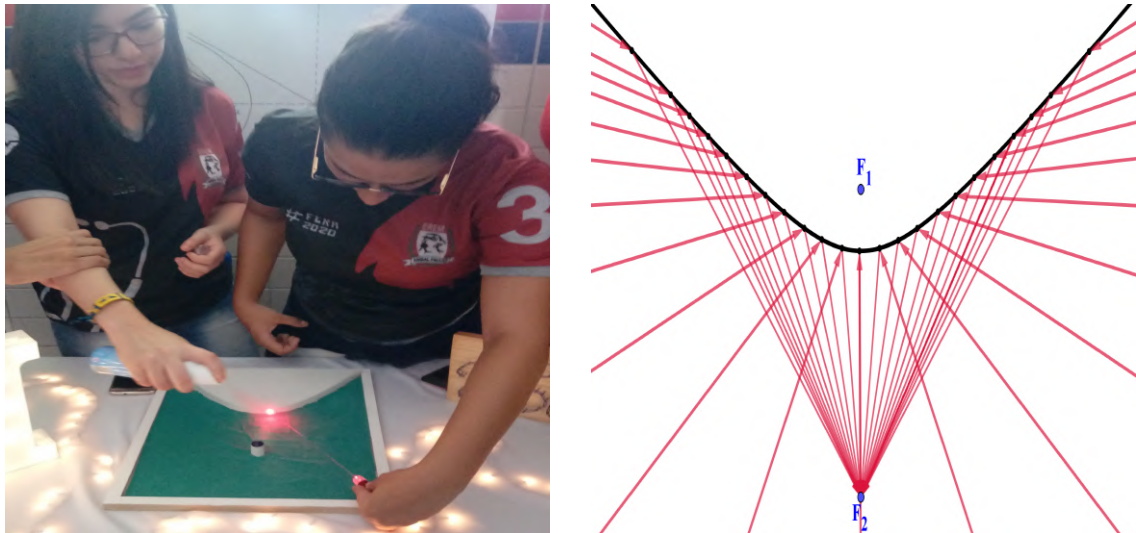
Fonte – Elaborado pela autora

(iii) Propriedade refletora da hipérbole

Conforme visto no Teorema 1.4.3, a hipérbole possui uma propriedade refletora. Nessa atividade, foi proposta a construção de um modelo concreto que mostre a aplicação dessa propriedade em um "bilhar hiperbólico".

Para simular essa propriedade refletora da hipérbole construiu-se um modelo de bilhar hiperbólico em MDF no qual uma das bordas possui o formato de um ramo de hipérbole e a caçapa se localiza no ponto focal externo a esse ramo. Na borda da mesa cujo formato é hiperbólico inseriu-se uma placa de fórmica para refletir a luz.

Posicionou-se um laser horizontalmente sobre a mesa de maneira que a luz refletisse na borda na direção do foco interno à hipérbole. Verificou-se que independente da posição de onde o laser emitisse a luz, ela sempre passava pela caçapa (outro foco), conforme ilustrado na Figura 78.

Figura 78 – Experimento de reflexão numa superfície refletora hiperbólica

Fonte – Elaborado pela autora

2.2.5 Atividade 5: Visita ao Museu Interativo de Ciência de Pernambuco – Espaço Ciência (Duração: 4 aulas)

Figura 79 – Visita ao Espaço Ciência em Olinda - PE

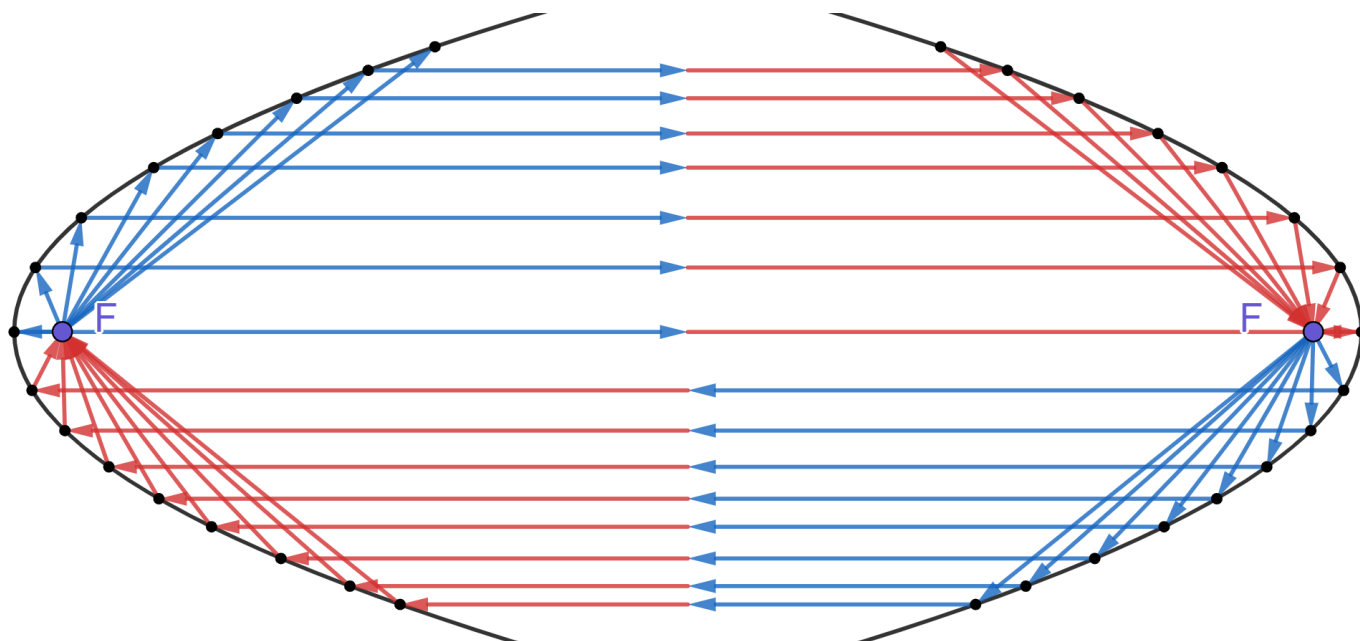
Fonte – Elaborado pela autora

A última atividade lúdica proposta foi a visita ao Espaço Ciência que possui em seu acervo de exposições, na área de percepção, algumas aplicações das propriedades refletoras das cônicas. Os alunos assistiram a apresentação dos experimentos e os manipularam. Após a visita, eles escreveram relatórios sobre suas observações.

Nessa visita ao Espaço Ciência, os alunos puderam manipular experimentos que exploram as propriedades refletoras das cônicas, especificamente as da parábola, como o fogão solar e o parabolóide de revolução. A seguir foram descritos superficialmente esses dois experimentos, mais detalhes acerca da demonstração das propriedades refletoras das cônicas foram apresentados no Capítulo 1.

No Parabolóide de Revolução (Orelhão Parabólico), há dois parabolóides com eixos focais paralelos ao solo com suas superfícies côncavas de frente uma para a outra e a cerca de 20 metros de distância um do outro. Uma pessoa ao sentar-se no local indicado, posiciona sua boca aproximadamente no foco do parabolóide a sua frente. Ao falar, as ondas sonoras colidem no parabolóide e refletem em trajetória retilínea no sentido paralelo ao seu eixo focal em direção ao outro parabolóide. Se não houver obstáculos relevantes nesse trajeto, as ondas sonoras chegam à superfície côncava desse outro parabolóide e reverberam na direção do seu foco onde, se houver uma segunda pessoa, a mensagem inicial será recebida. Veja o esquema da Figura 80.

Figura 80 – Representação do funcionamento de um orelhão parabólico



Fonte – Elaborado pela autora

Já o fogão solar funciona da seguinte forma: os raios solares incidem paralelamente ao eixo focal de um parabolóide cuja superfície côncava (que recebem os raios solares) é revestida por um material refletor, ao tocar essa superfície refletora do parabolóide os raios são refletidos em linha reta na direção do foco onde localiza-se convenientemente uma grelha que fica superaquecida em função da concentração dos raios solares neste ponto, tornando possível o preparo de alimentos. Para melhor compreensão veja a Figura 81.

Figura 81 – Representação do funcionamento de um fogão solar parabólico

Fonte – Garcia, Pappalardo e Beozzo (2013)

Essa atividade estimula o aprendizado tanto de matemática quanto de outras ciências exatas, visto que os alunos visitaram experimentos científicos relativos à outras ciências também, além de exercitar a observação e escrita científicas.

2.2.6 Aplicação do Teste II

Após as aulas lúdicas foi aplicado o Teste II (APÊNDICE B), para fins avaliativos, composto por 8 perguntas subjetivas acerca do assunto estudado. O teste foi realizado com 34 alunos em regime de prova individual sem consulta. No Capítulo 3 será realizado o detalhamento desse teste juntamente com a análise de dados.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesse capítulo será realizada a análise dos resultados dos dois testes feitos ao final das sequências didáticas apresentadas no Capítulo 2, bem como a comparação dos indicadores, por assunto abordado, entre o Teste I e o Teste II encontrados, respectivamente nos Apêndices A e B. Como alguns assuntos foram contemplados em mais de uma questão, o percentual utilizado para representar tais assuntos foi obtido através da média do percentual entre todas as questões que o abordavam.

O conteúdo inserido na questão 4 do teste I (identificação dos elementos da parábola através da equação) não possui correspondente em nenhuma questão do teste II, visto que na segunda sequência didática, as equações das cônicas não foram utilizadas em nenhum dos momentos. Por isso, os resultados serão mostrados apenas na Seção 3.1 que fala apenas dos dados do teste I. Esse também é o motivo principal para que a quantidade de questões do teste II seja inferior a do teste I.

Dois alunos realizaram apenas o Teste I enquanto uma outra aluna fez somente o Teste II, por isso as provas dos três alunos foram desconsideradas para a análise de resultados visto que uma das finalidades desse capítulo é realizar uma comparação entre os dois testes. O levantamento e verificação dos dados foi efetuado com base nos testes de 33 alunos submetidos às duas avaliações somativas.

Na análise dos testes categorizou-se as respostas das questões dentro de quatro tipos:

Tabela 2 – Categoria das respostas dos alunos aos Testes

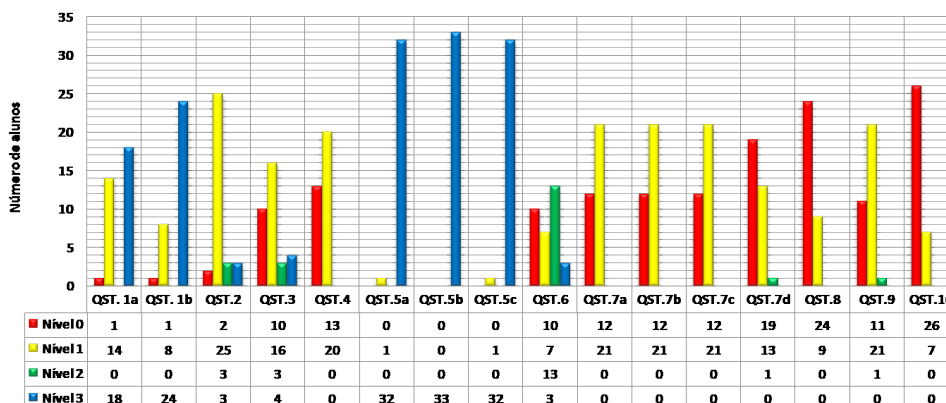
Nível 0	Não respondeu nada
Nível 1	Respondeu totalmente errado
Nível 2	Respondeu parcialmente certo
Nível 3	Respondeu totalmente certo

Fonte – Elaborado pela autora

3.1 TESTE I

O Teste I é composto de 10 questões subjetivas que foram respondidas individualmente e sem consulta por 35 alunos da turma de 2º ano em estudo nessa pesquisa.

Gráfico 1 — Resultado dos alunos no teste I



Fonte – Elaborada pela autora

No Gráfico 1 está sintetizado o resultado geral, conforme a Tabela 2 de níveis estabelecida no início desse capítulo, dos alunos no teste I. Ele mostra que as questões que tiveram os maiores níveis de acertos foram as questões 1 e 5 que tratam da identificação da cônicas, enquanto que as três últimas questões, 8, 9 e 10, se destacaram por serem as que obtiveram maiores índices de abstenções e um percentual praticamente nulo de acertos.

As questões do primeiro teste abordaram os seguintes temas:

Tabela 3 – Assuntos abordados no teste I - por questão

QUESTÃO	ITEM	ASSUNTO ABORDADO
QUESTÃO 1	A	Identificação da cônica através da definição
QUESTAO 1	B	Identificação da cônica através da definição
QUESTAO 2	-	Excentricidade da elipse
QUESTAO 3	-	Definir a equação da parábola através do gráfico
QUESTAO 4	-	Identificação dos elementos da parábola através da equação
QUESTAO 5	A	Identificação da cônica através de seção num cone de duas folhas
QUESTAO 5	B	Identificação da cônica através de seção num cone de duas folhas
QUESTAO 5	C	Identificação da cônica através de seção num cone de duas folhas
QUESTAO 6	-	Propriedade refletora da elipse
QUESTAO 7	A	Propriedade refletora da parábola
QUESTAO 7	B	Propriedade refletora da parábola
QUESTAO 7	C	Propriedade refletora da hipérbole
QUESTAO 7	D	Propriedade refletora da hipérbole
QUESTAO 8	-	Construção do gráfico da hipérbole
QUESTAO 9	-	Construção do gráfico da elipse
QUESTAO 10	-	Construção do gráfico da parábola

Fonte – Elaborado pela autora

3.2 TESTE II

O Teste II é composto de 8 questões subjetivas que foram respondidas individualmente e sem consulta por 34 alunos da turma de 2ºano em estudo nessa pesquisa.

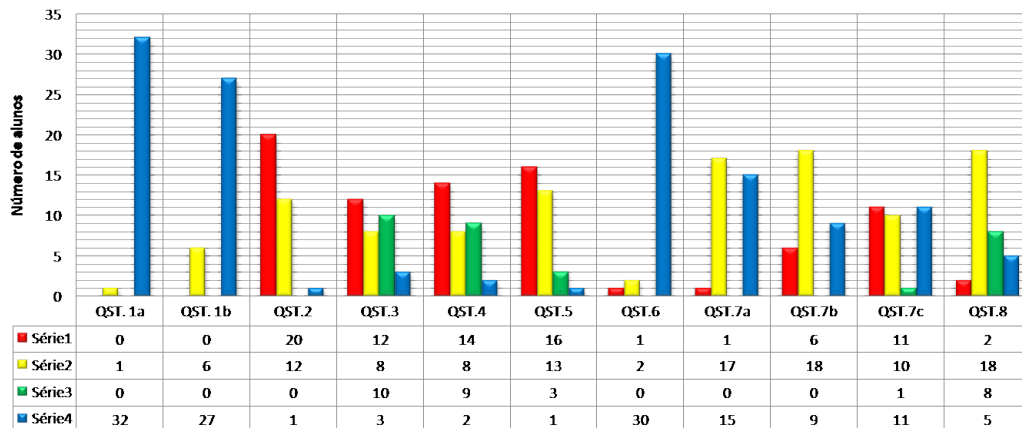
As questões do segundo teste abordaram os seguintes temas:

Tabela 4 – Assuntos abordados no teste II - por questão

QUESTÃO	ITEM	ASSUNTO ABORDADO
QUESTÃO 1	A	Identificação da cônica através da definição
QUESTAO 1	B	Identificação da cônica através da definição
QUESTAO 2	-	Definir a equação da parábola através do gráfico
QUESTAO 3	-	Excentricidade da elipse
QUESTAO 4	-	Construção do gráfico da hipérbole
QUESTAO 5	-	Construção do gráfico da parábola
QUESTAO 6	-	Identificação da cônica através de seção num cone de duas folhas
QUESTAO 7	A	Propriedade refletora da elipse
QUESTAO 7	B	Propriedade refletora da elipse
QUESTAO 7	C	Propriedade refletora da elipse
QUESTAO 8	-	Propriedade refletora da parábola

Abaixo estão sintetizados no Gráfico 2 o resultado geral, conforme a tabela de níveis estabelecida no início desse capítulo, dos alunos no teste II.

Gráfico 2 — Resultado dos alunos no teste II



Fonte – Elaborada pela autora

O Gráfico 2 mostra que as questões 1 e 6 foram as que tiveram os maiores níveis de acertos e, assim como no Teste I, tratam da identificação da cônica, as questões acerca da construção das cônicas e as das suas propriedades refletoras mostram índices de aumento no nível 3 consideráveis, enquanto que a de menor rendimento foi a questão 3 que trata das equações analíticas das cônicas, assunto esse não trabalhado na sequência didática II.

Olhando para o resultados dos testes isoladamente é difícil concluir qual dos dois teve maior êxito, até mesmo porque nem todos os assuntos são abordados em ambos os testes. Portanto, é necessária uma análise um pouco mais profunda, dividida por assunto para que se possa chegar a alguma conclusão acerca da comparação entre os resultados dos Testes I e II.

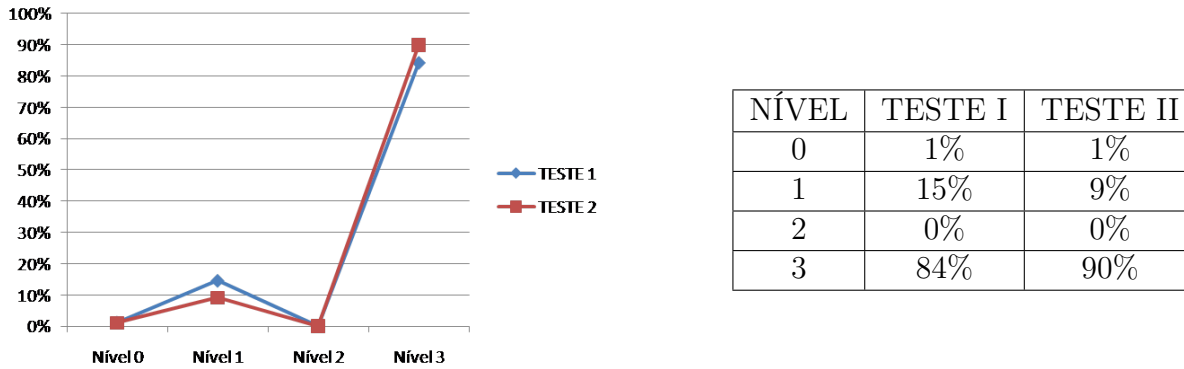
3.3 COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS DOS TESTES I E II

Dois dos principais métodos avaliativos das sequências didáticas apresentadas no Capítulo 2 são os testes feitos após a conclusão de cada uma. Nessa seção, será realizada, inicialmente, uma comparação entre esses dois testes a fim de perceber alguma vantagem no quesito aprendizagem de uma sequência sobre a outra.

Entendendo que a avaliação formativa é tão importante quanto a somativa (representada aqui pelos testes), será relatado também, posteriormente, as percepções da professora durante o processo de aplicação de ambas as sequências didáticas.

Acerca dos testes, para uma análise mais eficiente dos dados, será realizada a seguir um estudo das questões agrupadas por assunto abordado.

- Assunto 1 - Identificação da cônica
 TESTE I: Questões 1a, 1b, 5a, 5b e 5c;
 TESTE II: Questões 1a, 1b, 6.

Gráfico 3 — Comparação dos resultados dos testes I e II - assunto 1

Fonte – Elaborado pela autora

O objetivo dessas questões é que aluno consiga identificar qual é a curva cônica mostrada em cada caso através de sua definição como lugar geométrico ou através de uma seção em um cone de duas folhas.

Todas as atividades lúdicas apresentadas na Seção 2.2 tem relação direta ou indireta com esse tema. Particularmente, a atividade 1 dessa seção que simula o corte de um plano em um cone de duas folhas trata da identificação de cada tipo de cônica.

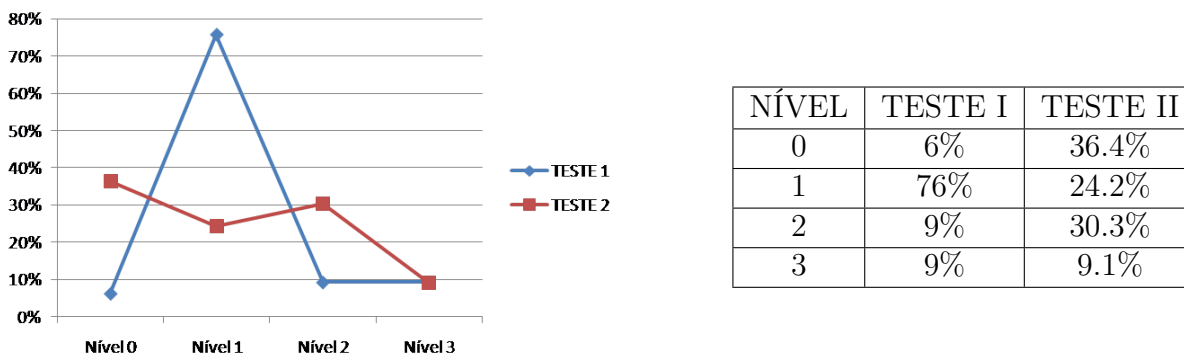
Como se pode ver no Gráfico 3, o percentual de alunos enquadrados nos níveis 1 (em branco) e 3 (parcialmente correto) se manteve. Já os alunos que responderam totalmente errado diminuiu de 15% para 9%, enquanto que o aumento do percentual de alunos que responderam totalmente correto foi de 6%, subindo de 84% para 90%.

- Assunto 2 - Excentricidade da elipse

TESTE I: Questão 2;

TESTE II: Questão 3.

O assunto 2 tem por finalidade que os alunos identifiquem a relação entre o formato de uma elipse e sua excentricidade, conseguindo indicar uma através da outra e vice-versa.

Gráfico 4 — Comparação dos resultados dos testes I e II - assunto 2

Fonte – Elaborado pela autora

Nas atividades lúdicas não houve uma especificamente voltada para o estudo da excentricidade das cônicas, isso pode explicar o aumento de 6% para mais de 36% da quantidade de alunos que

deixaram as questões acerca desse assunto em branco e a quantidade de respostas totalmente corretas se manteve em 9%.

Entretanto, 76% dos alunos haviam respondido a esse tópico totalmente errado, enquanto 9% respondeu parcialmente certo no primeiro teste e houve uma quebra brusca no nível 2 de 52%, caindo para 24% desse percentual e um aumento no nível 3 de 21% (de 9% para 30%) após as atividades lúdicas.

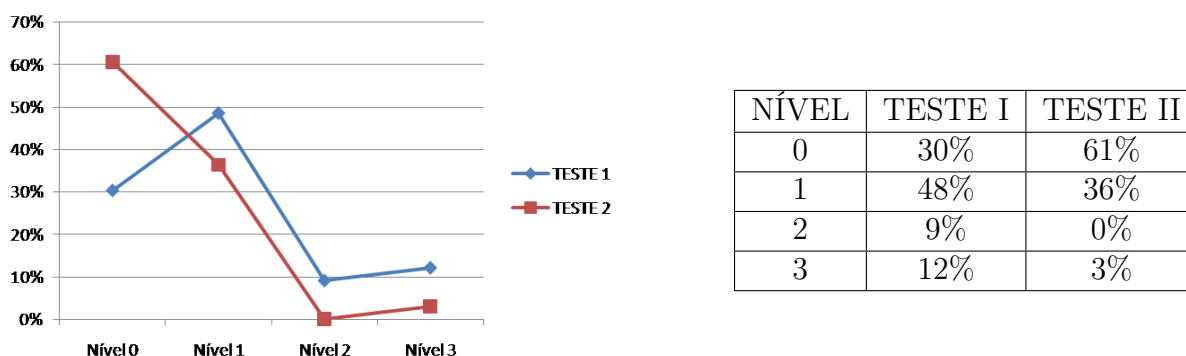
- Assunto 3 - Definir a equação da parábola através do gráfico

TESTE I: Questão 3;

TESTE II: Questão 2.

O objetivo que o aluno consiga realizar a transformação da linguagem geométrica para a algébrica, extraíndo a partir da figura de uma parábola a sua equação paramétrica.

Gráfico 5 — Comparação dos resultados dos testes I e II - assunto 3



Fonte – Elaborado pela autora

Mais da metade dos alunos deixaram em branco essa questão no teste II o que significa um aumento de 31%. Já os níveis 2 e 3 apresentaram ambos um decréscimo de 9%.

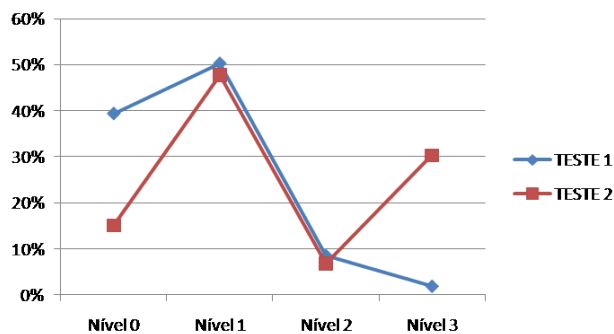
Vê-se que o teste I obteve melhores indicadores. Os motivos para tal resultado podem estar relacionados a não execução de atividades lúdicas no sentido de trabalhar as equações das cônicas para fixação e aprofundamento deste assunto, visto que os alunos haviam estudado isso no começo do bimestre durante a aplicação das aulas tradicionais. Com isso, fica como sugestão para trabalhos futuros uma sequência didática que contemple atividades lúdicas que envolvam o estudo das equações analíticas das cônicas.

- Assunto 4 - Propriedades refletoras das cônicas

TESTE I: Questões 6, 7a, 7b, 7c e 7d;

TESTE II: Questões 7a, 7b, 7c e 8.

O assunto 4 objetiva fazer com que os discentes identifiquem as propriedades refletoras de cada cônica e as aplicações vinculadas a elas.

Gráfico 6 — Comparação dos resultados dos testes I e II - assunto 4

NÍVEL	TESTE I	TESTE II
0	39%	15%
1	50%	48%
2	8%	7%
3	2%	30%

Fonte – Elaborado pela autora

As propriedades refletoras das cônicas foram bastante exploradas na segunda sequência didática, especialmente nas atividades 4 e 5. Como se pode observar no Gráfico 6 vê-se uma inegável melhora nos índices relativos à esse assunto do primeiro para o segundo teste.

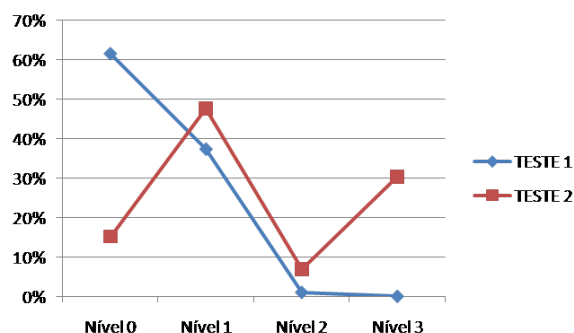
Os níveis 0 e 1 tiveram uma redução de 24% e 2%, respectivamente. Enquanto o nível em que o aluno responde totalmente certo subiu de 2% para 30%.

- Assunto 5 - Construção do gráfico das cônicas a partir de seus elementos

TESTE I: Questões 8, 9 e 10;

TESTE II: Questões 4 e 5.

Obter a cônica a partir de seus focos, reta diretriz e eixos é o objetivo desse assunto abordados nas questões indicadas acima.

Gráfico 7 — Comparação dos resultados dos testes I e II - assunto 5

NÍVEL	TESTE I	TESTE II
0	62%	15%
1	37%	48%
2	1%	7%
3	0%	30%

Fonte – Elaborado pela autora

Apesar do aumento de 11% no nível totalmente errado, houve uma diminuição significativa no número de alunos que deixaram essas questões em branco e os níveis parcialmente certo e totalmente certo aumentaram, respectivamente, 3% e 30%.

Foi tratado desse assunto na sequência lúdica na atividade de construção das cônicas com barbante, logo pode-se concluir que essa atividade agregou conhecimento aos alunos nesse sentido.

A respeito das percepções da professora acerca das respostas e indagações durante o processo de aplicação de ambas as sequências didáticas bem como o acompanhamento das construções geométricas

nas atividades lúdicas e da receptividade dos alunos são as seguintes: durante a primeira etapa de ensino a maior parte dos alunos não demonstrou interesse acerca do tema, o consideraram, inclusive, bastante complicado e enfadonho. Diferente do que ocorreu durante a segunda fase de ensino das cônicas quando foi utilizada uma abordagem lúdica, onde os estudantes construíram modelos, realizaram experimentos e visitaram um museu de ciência.

No primeiro experimento da lanterna, simulou-se as secções de um plano em um cone. Todos os alunos conseguiram associar as figuras formadas na parede com suas respectivas curvas. Na atividade 2, foram trabalhadas as definições e os elementos de cada curva. Segundo os alunos, ficou mais fácil compreender a relação da figura com a sua respectiva definição como lugar geométrico. Na atividade 3, os alunos exercitaram tanto as habilidades referentes à área de Geometria como desenvolveram seu lado artístico e produziram várias cônicas usando dobraduras. A atividade 4 foi a que mais empolgou os alunos devido aplicação prática das propriedades refletoras utilizando luzes. Além do interesse dos alunos em estudar matemática, nessa atividade, foi reforçado a identificação dos elementos das cônicas, como focos e eixos. Pensou-se na aplicação da atividade 5 para que os alunos desenvolvessem competências como a observação científica e a conversão entre a linguagem visual e a escrita.

Durante a aplicação dessa pesquisa foram encontradas algumas dificuldades. Dentre os obstáculos encontrados, destacam-se o fato de não ter sido possível realizar a pesquisa com alunos de terceiro ano (série apontada no currículo para se trabalhar as cônicas) e o adiantamento do calendário de provas do último bimestre, o que fez com que fosse necessário acelerar as atividades da sequência didática II.

Apesar dessas dificuldades, em geral, o resultado da aplicação dessas atividades lúdicas foram alunos mais interessados em assistir e participar das aulas de matemática, além de demonstrarem maior compreensão sobre o assunto quando indagados acerca do formato, dos elementos e das propriedades refletoras das cônicas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática é, sem dúvida, uma ciência abstrata, entretanto, isso não implica que seja considerada chata ou incompreensível. Para que essa ciência se aproxime mais da realidade dos alunos é válido que o professor utilize métodos de ensino divertidos e com aplicações práticas.

É de conhecimento geral as várias dificuldades que um professor de escola pública passa e o quanto ele tem que se desdobrar dentro e fora da sala de aula para atingir o objetivo de fazer com que seus alunos aprendam. Contribuir com o trabalho docente para promover o aprendizado acerca das cônicas foram os principais objetivos dessa pesquisa.

Nesse sentido, o propósito deste trabalho foi atingido, visto que foi apresentada uma aplicação de sequência didática para o ensino das cônicas baseada na ludicidade, que obteve resultados satisfatórios. Nela, os estudantes demonstraram compreender a definição dos elementos determinantes das cônicas e indicá-los algébrica e geometricamente. Além de construir modelos concretos que representem as cônicas e suas propriedades refletoras, esses modelos foram apresentados na II Feira de Matemática da EREM Aníbal Falcão.

Como foi dito no final das Seção 3.3, foi preciso adiantar as atividades lúdicas devido à organização interna da escola, por isso a sugestão é ampliar o tempo reservado para cada atividade para que elas sejam trabalhadas com calma e induzir os alunos a chegarem às próprias conclusões acerca do assunto abordado.

A parte dessa pesquisa envolvendo as sequências didáticas apresentadas no Capítulo 2 foi publicada nos Anais do VI CONEDU (Congresso Nacional de Educação), Nascimento (2018), e apresentada oral e visualmente nesse evento na modalidade bânner e recebeu muitos feedbacks positivos dos professores, elogiando as atividades lúdicas desenvolvidas em sala de aula e demonstrando interesse em desenvolver essa sequência didática com seus alunos.

Como foi apresentado no Capítulo 3, ainda há muitas contribuições a se fazerem a partir das lacunas dessa pesquisa, como, por exemplo, desenvolver uma sequência didática lúdica que reforce as equações das cônicas, trabalhar com os alunos as construções geométricas das Figuras 31, 34, 35, 39 e 40 sobre a determinação dos elementos das cônicas a partir do seu traço ou propor uma demonstração geométrica para as construções supracitadas.

Dados os resultados obtidos, espera-se que esse trabalho inspire mais professores de matemática a aplicarem à suas aulas, a proposta apresentada.

Vale ressaltar também que, embora tenha sido realizada uma comparação entre os testes feitos ao final de cada uma das sequências didáticas, pelo fato de elas reforçarem aspectos distintos dentro do assunto abordado, elas não se contrapõem ou se anulam, muito pelo contrário, se complementam. Sendo assim, é interessante que o professor possa mesclar ambas as sequências apresentadas a fim de potencializar o aprendizado dos alunos a respeito das cônicas, podendo a segunda sequência funcionar, por exemplo, como um complemento ou introdução à primeira.

Todo processo de aprendizagem vivenciado no PROFMAT, desde a aprovação do Exame

Nacional de Acesso (ENA) até a finalização da produção do trabalho de conclusão de curso traz uma nova perspectiva ao educador. Não somente quanto a desenvolver um maior domínio de conteúdos matemáticos, mas também quanto a repensar e remodelar a sua prática de ensino da matemática em sala de aula de modo a assistir seus alunos de maneira mais efetiva.

Referências

- ALVES JÚNIOR, M. C. *Seções cônicas: propostas de atividades com ênfase nas propriedades refletoras e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília - Instituto de Ciências Exatas - Departamento de Matemática, 2015.
- BARBIERI, C. D. et al. *Cônicas e suas propriedades refletoras*. *Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional*, Universidade Federal de Santa Maria, 2018.
- BORTOLOSSI, H. J. *Bilhar na Elipse*. [S.I.]: [s.n.], 2020. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/dkwzwa5m>>. Acesso em: 10 mai. 2020.
- BRISOLA, D. D. P. F. *Teorema de Dandelin*. Dissertação (Mestrado) — PUC-Rio, 2016.
- CARVALHO, J. P. d. Equivalência e aplicação de áreas na matemática grega. *Anais da III Bienal da SBM*, 2006. Disponível em: <<https://ime.ufg.br/bienal/2006/mini/pitombeira.pdf>>.
- CHUNG, K. *A Parábola, sua propriedade Refletora e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), 2013.
- DOMINGUES, H. H. Seções cônicas: história e ensino. *Revista de Educação Matemática*, v. 6, n. 4, p. 43–50, 1998.
- EDUCABRAS. *Espelhos Esféricos*. 2018. Disponível em: <https://www.educabras.com/enem/materia/fisica/optica/aulas/espelhos_esfericos>.
- EDUCAÇÃO, R. *Reflexão da luz e espelhos*. 2019. Disponível em: <<https://realizeeducacao.com.br/wiki/reflexao-da-luz-e-espelhos/>>. Acesso em: 02 mai. 2020.
- EVANGELISTA, J. R. et al. Matemática lúdica ensino fundamental e médio. *Revista de Educação em Foco UNISEPE*, 2013.
- GARCIA, B. O.; PAPPALARDO, J. R.; BEOZZO, R. C. *Fogão Solar Parabólico*. 2013. Disponível em: <<https://www.sorocaba.unesp.br/Home/Extensao/Engenhocas/esquilotelefonico.pdf>>.
- LEARNING, C. *Conic Section 3D Animation*. [S.I.]: [s.n.], 2015. Disponível em: <<https://youtube/HO2zAU3Eppo>>. Acesso em: 08 ago. 2019.
- LIMA, E. L. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. (III).
- LOPES, J. F. *Cônicas e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — UNESP, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Masquita Filho", 2011.
- LOUZADA, S. *Relações entre cônicas e funções no ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)-Universidade Federal do Espírito Santo, 2013.
- MATEMÁTICA, . S. *Geometria analítica - Cônicas*. 1998–2020. Disponível em: <<https://www.somatematica.com.br/emedio/conicas/conicas.php>>. Acesso em: 15 jan. 2020.
- MEC, M. *Base Nacional Comum Curricular - Ensino Médio, BNCC*. [S.I.], 2018. Disponível em: <<https://bit.ly/2xlTzlo>>. Acesso em: 09 jan. 2020.
- MEES, J. Duplicação, trissecção e quadratura. 1999.
- MONTEIRO, R. M. *Resgate do Teorema de Dandelin no Estudo de Cônicas Com o Geogebra*. Dissertação (Mestrado) — Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)-Universidade Federal do Espírito Santo, 2014.

- MOREIRA, J. S. *Construções das cônicas utilizando o desenho geométrico e instrumentos concretos*. Dissertação (Mestrado) — PUC-Rio, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: <<https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/33061/33061.PDF>>.
- MUNOZ, F. H. *Seções cônicas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, 2018.
- NASCIMENTO, K. F. Luz, cônicas, reflexão: uma sequência didática para o ensino das cônicas. In: EDITORA REALIZE. *Anais do VI Congresso Nacional de Educação (CONEDU)*. 2018. Disponível em: <<https://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/resumo.php?idtrabalho=2177>>.
- PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. d. Sequência didática na matemática. *Revista de Educação do IDEAU*, v. 8, n. 17, 2013.
- PIERCE, D. Conic sections. *Middle East Technical University*, 2008. Disponível em: <<http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/Courses/115/Notes/conics.pdf>>.
- PITOMBEIRA, J. B. Revisitando uma velha conhecida. *Departamento de Matemática, PUC-Rio*, p. 1–41, 2004. Disponível em: <<http://www.bienasbm.ufba.br/C2.pdf>>.
- PITOMBEIRA, J. B. *Apolônio e as cônicas*. 2015. Disponível em: <<https://bityli.com/El4sy>>.
- RIBEIRO, G. d. N. B. d. S. M. *Teoremas clássicos sobre cônicas projetivas*. Tese (Doutorado) — Universidade do Minho Escola de Ciências, 2012.
- RODRIGUES, B. *Construção da Elipse através do Origami*. [S.I.]: [s.n.], 2015. Disponível em: <<https://youtu.be/RNMrDGKYbxw>>. Acesso em: 08 ago. 2019.
- RODRIGUES, B. *Construção da Hipérbole através do Origami*. [S.I.]: [s.n.], 2015. Disponível em: <<https://youtu.be/p8pRw9RIrWY>>. Acesso em: 08 ago. 2019.
- RODRIGUES, B. *Construção da Parábola através do Origami*. [S.I.]: [s.n.], 2015. Disponível em: <<https://youtu.be/GEvgDMBLRDQ>>. Acesso em: 08 ago. 2019.
- ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. *Tópicos de história da matemática*. [S.I.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- SANTOS, S. A.; TREVISAN, A. L. *O problema de Apolônio: aspectos históricos e computacionais*. 2004. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~sandra/artigoSantosTrevisan28jun05.pdf>>.
- SCHIVANI, J. *Poliedros e Esferas áreas e volumes*. 2019. Disponível em: <<https://slideplayer.com.br/slide/15803812/>>.
- SEE, S. *Conteúdos de matemática por bimestre para o Ensino Médio: com base nos parâmetros curriculares do estado de Pernambuco*. [S.l.], 2013. Disponível em: <<https://bit.ly/2QJDqge>>. Acesso em: 08 jan. 2020.
- SILVA, F. M. d. et al. O uso do material concreto no ensino da matemática. In: *Anais do VIII Forum Internacional de Pedagogia*. [S.l.: s.n.], 2016.
- SOUSA, J. M. R. d. Trissecção do ângulo e duplicação do cubo: as soluções na antiga grécia. *Universidade do Porto. Reitoria*, 2001.
- SOUZA, J. R. d.; GARCIA, J. S. R. *#Contato Matemática, 2º ano*. São Paulo: FTD, 2016.
- TENANI, L. R. d. S.; SILVEIRA, C. L. B.; URIBE, E. B. O. Ensino de cônicas e a arte das dobraduras. *Colloquium Exactarum*, 2015.
- ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. [S.l.]: Penso Editora, 2015.

A TESTE I

AS CÔNICAS E SUAS PROPRIEDADES REFLETORAS

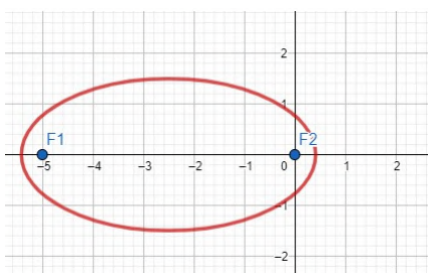
ALUNO(A): _____

1. Que local geométrico é definido como:

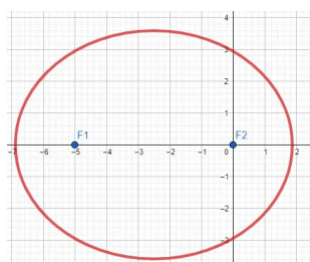
a) O conjunto de todos os pontos em um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixo, denominados focos, é constante e maior que a distância entre os focos?

b) O conjunto de todos os pontos em um plano cuja diferença em módulo da distância de cada um deles aos focos, F_1 e F_2 , é constante e menor que a distância entre F_1 e F_2 ?

2. Qual das elipses apresentadas tem excentricidade de menor valor, sabendo que os eixos coordenados estão em uma mesma escala? Justifique.

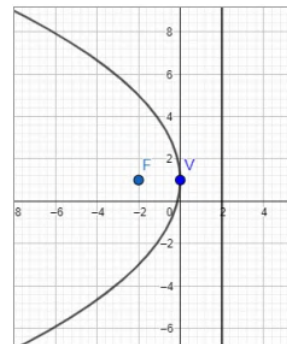


a)



b)

3. Escreva a equação da parábola representada abaixo:



4. Determine o foco e a reta diretriz da parábola de equação:

$$(x - 1)^2 = -6y + 14$$

5. Que figuras são determinadas pela interseção de um plano de um cone duplo em cada um dos itens?



a)

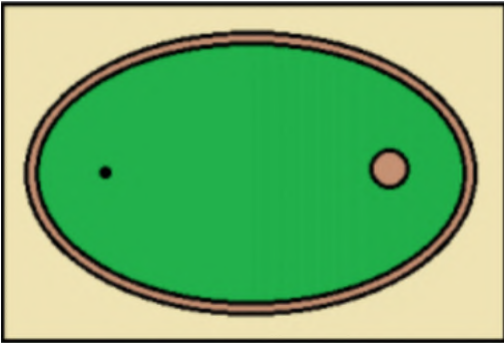


b)



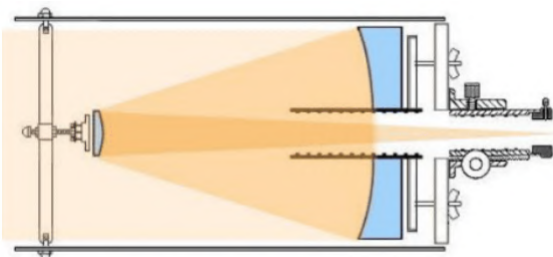
c)

6. Observe a figura dessa mesa de sinuca elíptica vista de cima:



Considere que o ponto marcado de preto e a caçapa estão sobre os focos dessa elipse. Se uma bolinha for lançada do ponto preto em direção à borda da mesa, é possível que a bolinha caia na caçapa? Em que casos? Justifique.

7. O telescópio Cassegrain possui um espelho primário de superfície parabólica. Possui também um orifício central por onde passam os raios luminosos. Seu espelho secundário possui uma superfície convexa e de forma hiperbólica. Ao captar a luz de um objeto o espelho primário reflete os raios luminosos para o espelho secundário. Este espelho possui a sua superfície voltada para o espelho primário e reflete a luz novamente para o espelho principal passando pelo orifício central. Logo atrás encontramos a ocular e o dispositivo de foco. Conforme o esquema abaixo:



Esquema óptico do telescópio Cassegrain.



Telescópio Cassegrain.

Responda:

- Que característica uma superfície parabólica espelhada tem que a fizeram ser escolhida como espelho primário?
- Para que os raios de luz se concentrem no espelho secundário, onde ele deve estar posicionado? Justifique.
- Que característica uma superfície hiperbólica espelhada tem que a fizeram ser escolhida como espelho secundário?
- Onde estão localizados os focos da hipérbole? Justifique.

(USE A FOLHA MILIMETRADA PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES 8, 9 E 10)

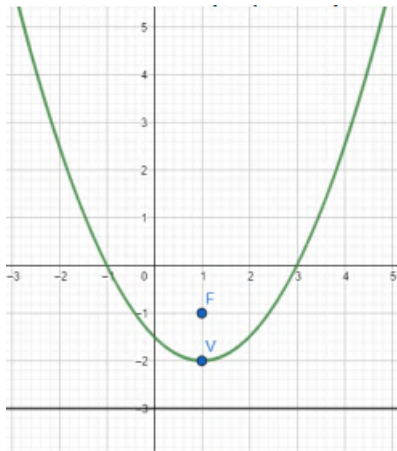
- Esboce uma hipérbole cujo eixo real mede 12 cm e eixo imaginário mede 16 cm e determine sua equação cartesiana.
- Construa o esboço de uma elipse cuja distância focal seja 8 cm e eixo menor 6 cm e determine sua equação cartesiana.
- Esboce uma parábola cujo foco está a 6 cm acima de sua reta diretriz e determine sua equação cartesiana.

B TESTE II

AS CÔNICAS E SUAS PROPRIEDADES REFLETORAS

ALUNO(A): _____

1. Que local geométrico é definido como:
 - a) O conjunto de todos os pontos em um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, denominados focos (F_1 e F_2), é constante e maior que a distância entre os focos?
 - b) O conjunto de pontos em um plano cuja distância a um ponto fixo F é sempre igual à distância a uma reta dada?
2. Escreva a equação da parábola representada:



3. Construa uma elipse cuja excentricidade, $\frac{a}{c}$, seja igual a 0.8 e centro C na origem. (Obs.: Deve-se estar indicado os locais dos focos, centro e extremidades dos eixos)
4. Esboce o gráfico de uma hipérbole cujo eixo real mede 8cm , eixo imaginário mede 6cm e centro $C(1, 2)$. (Obs.: Deve-se estar indicado os locais dos focos, centro e extremidades dos eixos)
5. Esboce o gráfico de uma parábola cuja concavidade esteja voltada para a esquerda, coordenadas do vértice $V(5, 1)$ e de parâmetro

2. (Obs.: Deve-se estar indicado os locais do foco F , vértice V e da reta diretriz d .)

6. A fotografia abaixo reproduz um abajur e a sombra que ele projeta na parede. Que curvas são essas?



7. Uma das aplicações das propriedades refletoras das cônicas é o aparelho iluminador que os dentistas usam em suas consultas. Nele, o dentista necessita que a iluminação seja concentrada em um único ponto, o dente do paciente, e isso é facilmente alcançado quando se tem um espelho de certo formato e a lâmpada fixada em um determinado ponto fixo, interior em relação a curva formada pelo espelho. Quando o dentista movimentava o seu dispositivo, e consegue colocar a iluminação exatamente no dente a ser trabalhado, este se encontra em um ponto estratégico. Veja a foto abaixo:



que está disposto à volta da orquestra e aberto para a plateia. Qual é a vantagem de se construir uma concha acústica com formato parabólico (como no exemplo mostrado na figura abaixo), cujo palco esteja situado no foco dessa curva?

Acerca da situação descrita, responda:

- a) Que formato deverá ter esse espelho para que o seu propósito seja atingido?
 - b) Em que lugar geométrico relativo à curva essa lâmpada estará?
 - c) E o dente iluminado?
8. Uma concha acústica é um equipamento cênico, usado em diversos eventos musicais e



C DEMONSTRAÇÕES REFEREN- TES À SEÇÃO 1.3

O Apêndice C esclarece analiticamente alguns dos passos construídos nas Subseções 1.3.2 e 1.3.3 quando foram apresentados os algoritmos geométricos da determinação dos elementos das cônicas através do seu traço.

Para que o leitor consiga compreender e acompanhar melhor a que parte da construção a demonstração se trata, será indicado, entre parênteses, o passo ao qual o trecho está se referindo.

DEMONSTRAÇÃO ANALÍTICA DE ALGUNS PASSOS CONSTRUIDOS NA SEÇÃO 1.3.2

Nessa primeira demonstração, os passos em destaque ao longo do texto se referem aos das Figuras 34 e 35 presentes na Seção 1.3.2.

Considere, sem perda de generalidade, a parábola cuja equação é dada por $y = \frac{x^2}{2p}$. Escolhendo dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ quaisquer e distintos sobre a parábola que estejam do mesmo lado em relação ao eixo de simetria de modo que a distância entre eles seja menor que a soma dos valores de suas ordenadas, nos garante que as circunferências tangentes ao eixo x e centradas nesses pontos sejam secantes [PASSOS 3 (35(d)) e 4 (35(e))].

Logo, para $x = x_1$, tem-se que $y = \frac{x_1^2}{2p}$ e para $x = x_2$, $y = \frac{x_2^2}{2p}$. Note que, como as circunferências tangenciam o eixo x , os raios das circunferências são as ordenadas dos centros, portanto os raios das circunferências são, respectivamente, $r = \frac{x_1^2}{2p}$ e $r = \frac{x_2^2}{2p}$.

Com isso, a equação da primeira circunferência será:

$$(x - x_1)^2 + \left(y - \frac{x_1^2}{2p}\right)^2 = \frac{x_1^4}{4p^2}.$$

Expandindo a expressão acima tem-se:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - \frac{yx_1^2}{p} + \frac{x_1^4}{4p^2} &= \frac{x_1^4}{4p^2} \\ x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - \frac{yx_1^2}{p} &= 0. \end{aligned} \tag{C.1}$$

De maneira análoga, a segunda circunferência, será dada por:

$$x^2 - 2x_2x + x_2^2 + y^2 - \frac{yx_2^2}{p} = 0. \tag{C.2}$$

Para determinar os pontos de interseções A e B das duas circunferências basta igualar as Equações (C.1) e (C.2) [PASSO 5 (35(f))]:

$$x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - \frac{yx_1^2}{p} = x^2 - 2x_2x + x_2^2 + y^2 - \frac{yx_2^2}{p}.$$

Simplificando, tem-se a relação:

$$\begin{aligned}
 -2x_1x + x_1^2 - \frac{yx_1^2}{p} &= -2x_2x + x_2^2 - \frac{yx_2^2}{p} \\
 \frac{yx_2^2}{p} - \frac{yx_1^2}{p} &= 2x_1x - 2x_2x + x_2^2 - x_1^2 \\
 \frac{y(x_2^2 - x_1^2)}{p} &= 2x(x_1 - x_2) + x_2^2 - x_1^2 \\
 y &= -\frac{2px}{x_1 + x_2} + p.
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

A Equação (C.3) representa a reta s que possui os pontos de interseção das duas circunferências [PASSO 5 (35(f))] e para determinar o ponto C de interseção dessa reta e o eixo das ordenadas [PASSO 6 (35(g))] basta fazer $x = 0$, com isso: $y = p$, ou seja, a distância desse ponto ao vértice é o dobro da distância do vértice ao foco, que é $\frac{p}{2}$. Para encontrar o foco F da parábola basta determinar o ponto médio do segmento \overline{OC} [PASSOS 7 (36(a)), 8(36(b)), 9 (36(c)) e 10(36(d))].

Como já foi determinado o valor de p , para encontrar a reta diretriz d , basta construir uma reta de equação $y = -\frac{p}{2}$ [PASSOS 11 (36(e)) e 12(36(f))].

DEMONSTRAÇÃO ANALÍTICA DE ALGUNS PASSOS CONSTRUÍDOS NA SEÇÃO 1.3.3

Na demonstração a seguir, os passos em destaque ao longo do texto se referem aos das Figuras 39 e 40 presentes na Seção 1.3.3.

Considere a hipérbole cuja equação é dada por $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Como a hipérbole é simétrica tanto em relação ao seu eixo real quanto ao seu eixo imaginário, tomando os pontos da hipérbole que estão no primeiro quadrante tem-se a equação $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Os pontos que ficam sobre os demais quadrantes são análogos.

A equação da circunferência centrada na origem C e que passa pelos vértices $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$ da hipérbole é dada por $x^2 + y^2 = a^2$ [PASSO 1 (40(b))].

Dado um ponto $P\left(p, \frac{b}{a}\sqrt{p^2 - a^2}\right)$ sobre a hipérbole [PASSO 2 (40(c))] são traçadas as retas $f : x = p$ e $g : y = \frac{b}{a}\sqrt{p^2 - a^2}$ que passam por P e são paralelas aos eixos cartesianos [PASSO 3 (40(d))].

Seja o ponto P' a projeção ortogonal de P sobre o eixo x , ou seja, $P'(p, 0)$ [PASSO 4 (40(e))], determina-se a reta h cuja inclinação é α , tangente a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ no primeiro quadrante e que passa por P' [PASSO 5 (40(f))], ou seja,

$$h : y = \alpha(x - p). \tag{C.4}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y = \alpha(x - p) \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
x^2 + (\alpha(x - p))^2 &= a^2 \\
x^2 + \alpha^2(x^2 - 2px + p^2) - a^2 &= 0 \\
x^2 + \alpha^2x^2 - 2\alpha^2px + \alpha^2p^2 - a^2 &= 0 \\
(1 + \alpha^2)x^2 - 2\alpha^2px + \alpha^2p^2 - a^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Para que haja apenas um ponto de interseção, ou seja, para que a reta seja tangente à circunferência, tem-se que tomar o discriminante da Equação (C.5) igual a zero.

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4\alpha^4p^2 - 4(1 + \alpha^2)(\alpha^2p^2 - a^2) \\
\Delta &= 4\alpha^4p^2 - (4 + 4\alpha^2)(\alpha^2p^2 - a^2) \\
\Delta &= \cancel{4\alpha^4p^2} - 4\alpha^2p^2 + 4a^2 - \cancel{4\alpha^4p^2} + 4\alpha^2a^2 \\
-\alpha^2p^2 + a^2 + \alpha^2a^2 &= 0 \\
(a^2 - p^2)\alpha^2 + a^2 &= 0 \\
\alpha^2 &= \frac{a^2}{p^2 - a^2}.
\end{aligned}$$

Como quer-se a interseção referente ao primeiro quadrante tem-se $\alpha < 0$, logo:

$$\alpha = -\left(\sqrt{\frac{a^2}{p^2 - a^2}}\right). \tag{C.6}$$

Substituindo C.6 em C.4, tem-se a equação da reta h :

$$\begin{aligned}
y &= -\left(\sqrt{\frac{a^2}{p^2 - a^2}}\right)(x - p) \\
&= -\sqrt{\frac{a^2}{p^2 - a^2}}x + \sqrt{\frac{a^2}{p^2 - a^2}}p.
\end{aligned}$$

Seja i a reta perpendicular à h passando pela origem C . Como h e i são perpendiculares, o coeficiente m da reta i é dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
-\left(\sqrt{\frac{a^2}{p^2 - a^2}}\right)m &= -1 \\
m &= \sqrt{\frac{p^2 - a^2}{a^2}}.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Logo, a equação da reta i é dada por [PASSO 6 (40(g))]:

$$y = \left(\sqrt{\frac{p^2 - a^2}{a^2}}\right)x.$$

Como, por definição, $a > 0$, tem-se que:

$$i : y = \frac{\sqrt{p^2 - a^2}}{a}x$$

A interseção entre a reta $i : y = \frac{\sqrt{p^2 - a^2}}{a}x$ e a reta $g : y = \frac{b}{a}\sqrt{p^2 - a^2}$ é [PASSO 6 (40(g))]:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{p^2 - a^2}}{a}x &= \frac{b}{a}\sqrt{p^2 - a^2} \\ x &= b. \end{aligned}$$

Ou seja, o ponto de interseção entre as retas g e i é o ponto $I = \left(b, \frac{b}{a}\sqrt{p^2 - a^2}\right)$.

Marcando o ponto $J(b, 0)$ de forma que ele seja a projeção ortogonal de I sobre o eixo real da hipérbole, tem-se que o tamanho do segmento \overline{CJ} equivale à metade do tamanho do eixo imaginário [PASSO 7 (40(h))].

Com isso, fica determinado os pólos do eixo imaginário traçando a circunferência $x^2 + y^2 = b^2$ e marcando os dois pontos de interseção dessa circunferência com o eixo das ordenadas [PASSO 8 (41(a))].

Construindo o retângulo $QRST$ de lados $2a$ e $2b$, centrado na origem com lados paralelos aos eixos cartesianos [PASSOS 10 (41(c)) e 11 (41(d))] e sabendo que em toda hipérbole existe a relação pitagórica $c^2 = a^2 + b^2$, conclui-se que a metade da diagonal desse retângulo mede c (metade da distância focal).

Logo, os pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, construídos como interseção da circunferência $x^2 + y^2 = c^2$ com o eixo das abscissas, são os focos dessa hipérbole [PASSOS 12 (41(e)) e 13 (41(f))].

Além disso, as retas $a_1 = \overleftrightarrow{QS} : y = -\frac{b}{a}x$ e $a_2 = \overleftrightarrow{RT} : y = \frac{b}{a}x$, são as assíntotas dessa hipérbole [PASSO 14 (41(g))].