



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Eliú Antão de Oliveira

Quadriláteros Órticos

RECIFE
2020



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Eliú Antão de Oliveira

Quadriláteros Órticos

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adriano Regis Rodrigues

RECIFE
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O48q

Oliveira, Eliú Antão de Oliveira
Quadriláteros órticos / Eliú Antão de Oliveira Oliveira. - 2020.
96 f. : il.

Orientador: Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva.
Inclui referências.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2020.

1. Triângulo órtico. 2. Problema de Fagnano. 3. Alturas de um quadrilátero. 4. Quadriláteros órticos. 5. Problemas de otimização em geometria. I. Silva, Adriano Regis Melo Rodrigues da, orient. II. Título

CDD 510

ELIÚ ANTÃO DE OLIVEIRA

Quadriláteros Órticos

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em ____ / ____ / ____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva (Orientador)– UFRPE

Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira – UEFS

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza– PROFMAT/UFRPE

À minha família dedico essa dissertação, pois ela é a base da minha vida. Foram dois anos em que abdiquei de momentos importantes e em todos eles fui compreendido. Nós choramos juntos e principalmente nos alegamos juntos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que é a razão do meu viver. À minha esposa Amanda Andrade que me deu total apoio durante o período do mestrado e acreditou em mim mesmo quando eu não me achei capacitado. Aos meus filhos Benjamim Alexandre e Benício Martin (ainda no ventre) que me trouxeram um novo sentido a vida. Aos meus pais Aurino e Lúcia por toda educação que me deram e ao meu irmão Utaí por acreditar sempre em mim. Ao meu orientador Dr Adriano Regis por ter acreditado em mim e por todos os direcionamentos ao longo da dissertação. Aos meus amigos Cristiano Silva, Pedro Vitor, Valter Junior, Gabriel Brito, Peterson, Cícero e Luiz Manoel por tornarem o período do mestrado mais prazeroso. E ainda, aos meus amigos da graduação Ebersson, Felipe e Rafael que sempre foram incentivadores para realização desse mestrado.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12.2)*

DECLARAÇÃO

Eu, ELIÚ ANTÃO DE OLIVEIRA, declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título “**Quadriláteros Órticos**”, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processos administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador ADRIANO REGIS MELO RODRIGUES DA SILVA, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 03 de setembro de 2020.

Eliú Antão de Oliveira

Resumo

Problemas de otimização compõem uma importante e fascinante parte da geometria que, dentre outras aplicações práticas, estimulam o interesse pelo estudo de geometria euclidiana no ensino básico. Heron de Alexandria foi um matemático grego que também desenvolveu estudos na área da geometria. Ele utilizou o princípio do caminho mínimo para explicar a reflexão em espelhos planos e curvos. Um dos problemas básicos de otimização em geometria é conhecido como problema de Heron que consiste em determinar um menor caminho entre dois pontos de um mesmo semiplano, determinado por uma dada reta, passando necessariamente por um ponto desta reta. Um outro problema famoso e que, de certa forma, estende o problema de Heron se deve ao matemático italiano Giovanni Fagnano que dá nome ao problema de se determinar um triângulo de menor perímetro que pode ser inscrito em um triângulo acutângulo dado. O triângulo que resolve o problema de Fagnano é o triângulo órtico do triângulo ordinário, isto é, o triângulo formado pelos pés das suas alturas. Neste trabalho, buscamos desenvolver uma extensão destas ideias que foram publicadas, recentemente, em dois artigos de 2005 e 2010, com uma definição de quadriláteros órticos que possuem propriedades semelhantes às do triângulo órtico e resolvem um problema análogo ao de Fagnano para quadriláteros com hipóteses adicionais. Pretendemos com isto, para além de apresentar um texto complementar aos estudantes e professores, promover um maior estímulo ao estudo de geometria euclidiana mostrando, sobretudo, que novos conceitos podem ser desenvolvidos em tempos atuais com, apenas, assuntos de nível básico.

Palavras-chave: Triângulo Órtico, Problema de Fagnano, Alturas de um quadrilátero, Quadrilátero Órtico.

Abstract

Optimization problems make up an important and fascinating part of geometry that, among other practical applications, stimulate interest in the study of Euclidean geometry in basic education. Heron of Alexandria was a Greek mathematician who also developed studies in the field of geometry. He used the minimum path principle to explain reflection in flat and curved mirrors. One of the basic problems of optimization in geometry is known as the Heron problem, which consists of determining a shortest path between two points of the same semiplane, determined by a given line, necessarily passing through a point on this line. Another famous problem that, in a way, extends Heron's problem is due to the Italian mathematician Giovanni Fagnano, who gives the name to the problem of determining a smallest perimeter triangle that can be inscribed in a given triangle. The triangle that solves Fagnano's problem is the orthotic triangle of the ordinary triangle, that is, the triangle formed by the feet of its heights. In this work, we seek to develop an extension of these ideas that were recently published in two articles from 2005 and 2010, with a definition of orthotic quadrilaterals that have similar properties to the orthotic triangle and solve a problem analogous to Fagnano's for quadrilaterals with additional hypotheses. We intend with this, in addition to presenting a complementary text to students and teachers, to promote a greater stimulus to the study of Euclidean geometry showing, above all, that new concepts can be developed in current times with only basic level subjects.

Keywords: Ortic Triangle, Fagnano's Problem, Heights of a quadrilateral, Ortic Quadrilateral

Lista de ilustrações

Figura 1 – Quadrilátero entrecruzado	25
Figura 2 – Quadrilátero convexo	25
Figura 3 – Quadrilátero concavo	26
Figura 4 – Mediana Relativa à hipotenusa	26
Figura 5 – Base média de triângulo	27
Figura 6 – Base média do trapézio I	28
Figura 7 – Base média do trapézio II	29
Figura 8 – Quadrilátero Reverso	29
Figura 9 – Quadrilátero Concavo	30
Figura 10 – Triângulos simétricos em relação à mediatriz de PP'	31
Figura 11 – Construção de arco capaz para ângulo agudo	31
Figura 12 – Construção de arco capaz para ângulo obtuso	32
Figura 13 – Arco capaz superior do segmento AB	33
Figura 14 – Quadrilátero côncavo para um arco capaz	33
Figura 15 – Arco capaz superior do segmento AB	34
Figura 16 – Arco capaz superior do segmento AB	34
Figura 17 – Bissetriz 1	35
Figura 18 – Bissetriz 2	35
Figura 19 – Quadrilátero cíclico I	36
Figura 20 – Quadrilátero e ângulo externo	37
Figura 21 – Mediatrizes relativas aos lados de um quadrilátero cíclico	38
Figura 22 – Segmentos tangentes à circunferência	38
Figura 23 – Quadrilátero circunscritível III	39
Figura 24 – Quadrilátero circunscritível IV	40
Figura 25 – Quadrilátero circunscritível V	41
Figura 26 – Quadrilátero circunscritível VI	41
Figura 27 – Quadrilátero circunscritível VII	42
Figura 28 – Reta de Euler	42
Figura 29 – Círculo de 9 pontos	43
Figura 30 – Triângulo órtico de um triângulo acutângulo	46
Figura 31 – Triângulo órtico de um triângulo obtusângulo	46
Figura 32 – Quadriláteros inscritíveis no triângulo	47
Figura 33 – Bissetrizes dos ângulos externos do triângulo órtico	48
Figura 34 – Bissetrizes internas do triângulo órtico	49
Figura 35 – Triângulo órtico de um triângulo acutângulo I	49
Figura 36 – Triângulo órtico de um triângulo acutângulo II	50

Figura 37 – Triângulo órtico de um triângulo acutângulo III	50
Figura 38 – Reflexão de Heron I	52
Figura 39 – Reflexão de Heron II	52
Figura 40 – Reflexões do triângulo órtico I	53
Figura 41 – Reflexões do triângulo órtico II	53
Figura 42 – Reflexões do triângulo órtico III	54
Figura 43 – Reflexões do triângulo órtico IV	55
Figura 44 – Quadrilátero $V_1V_2V_3V_4$	57
Figura 45 – Variações do V-paralelogramo	59
Figura 46 – M-paralelogramo	60
Figura 47 – Quadrilátero Concavo	62
Figura 48 – Alturas Relativas aos pontos V_i	63
Figura 49 – M-alturas e área	64
Figura 50 – Quadrilátero órtico Principal	66
Figura 51 – Quadrilátero Inscritível	68
Figura 52 – Anticentro, circuncentro e centróide	69
Figura 53 – Quadrilátero ortodiagonal I	70
Figura 54 – Quadrilátero ortodiagonal II	71
Figura 55 – Quadrilátero ortodiagonal III	72
Figura 56 – Quadrilátero órtico e V-paralelogramo inscritos I	72
Figura 57 – Quadrilátero órtico e V-paralelogramo inscritos II	73
Figura 58 – Quadrilátero órtico e V-paralelogramo inscritos III	73
Figura 59 – Quadrilátero órtico e paralelogramo de Varignon inscritos	74
Figura 60 – Quadrilátero órtico principal inscritível I	75
Figura 61 – Quadrilátero órtico principal inscritível II	76
Figura 62 – Quadrilátero órtico principal inscritível III	76
Figura 63 – Triângulo formado a partir da altura média	77
Figura 64 – Órtico principal inscritível em um quadrilátero cíclico I	78
Figura 65 – Órtico principal inscritível em um quadrilátero cíclico II	78
Figura 66 – Quadrilátero cíclico e ortodiagonal I	79
Figura 67 – Quadrilátero cíclico e ortodiagonal II	80
Figura 68 – Quadrilátero órtico principal circunscrito I	81
Figura 69 – Quadrilátero órtico principal circunscrito II	81
Figura 70 – Quadrilátero órtico principal circunscrito III	81
Figura 71 – Incentro e anticentro coincidentes	82
Figura 72 – Circuncentro e centróide coincidentes	83
Figura 73 – Bimediana como mediatriz I	83
Figura 74 – Bimediana como mediatriz II	84
Figura 75 – Bimediana como mediatriz III	85

Figura 76 – Reflexões do quadrilátero órtico I	86
Figura 77 – Reflexões do quadrilátero órtico II	87
Figura 78 – Reflexões do quadrilátero órtico III	87
Figura 79 – Reflexões do quadrilátero órtico IV	88
Figura 80 – Reflexões do quadrilátero órtico V	88

Sumário

	Introdução	21
1	CONCEITOS E RESULTADOS PRELIMINARES	25
2	O TRIÂNGULO ÓRTICO E SUAS PROPRIEDADES	45
2.1	Definição de triângulo órtico e propriedades	45
2.1.1	Definição de triângulo órtico	45
2.1.2	Propriedades do triângulo órtico	47
2.2	Problemas de otimização em geometria	51
2.2.1	O problema de Heron	51
2.2.2	O problema de Fagnano	52
3	QUADRILÁTEROS ÓRTICOS E SUAS PROPRIEDADES	57
3.1	O V-paralelogramo	57
3.2	O paralelogramo de Varignon ou M-paralelogramo	59
3.3	V-alturas e alturas médias de um quadrilátero simples	63
3.4	Quadriláteros órticos	65
3.5	Pontos notáveis de um quadrilátero	66
3.6	Quadriláteros ortodiagonais	70
3.7	Quadriláteros órticos de um quadrilátero cíclico e ortodiagonal	75
	Conclusão	91
	REFERÊNCIAS	93

Introdução

A presente dissertação está inserida no Mestrado Profissional em matemática, pela Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Em matemática, os problemas têm sido ao longo do tempo, uma das principais, se não a principal, motivação para o desenvolvimento dessa ciência. Dentre os variados tipos de problemas, destacamos os relacionados à otimização. Estes, visam resolver um problema, buscando a melhor solução possível. Na grande maioria das vezes, estão presentes nesse tipo de problema, frases como: o menor possível, o mínimo, o maior possível, o máximo, etc. Em especial, nessa dissertação vamos estudar alguns problemas de otimização em geometria. Vamos considerar um problema hipotético:

Problema: *Uma mulher foi a uma olaria encomendar um vaso para colocar sobre um suporte de metal. Tal suporte é formado por três pedaços finos de ferro, sodados em formato de um triângulo acutângulo. Daí, ela pede ao oleiro que faça um vaso cuja base também seja triângular. Porém, cada ponta (vértice) do triângulo da base do jarro, deve ficar apoiada sobre um lado do triângulo do suporte. Quais devem ser as dimensões mínimas para o triângulo formado na base do vaso atender essa condição?*

Note que obter as "dimensões mínimas" é equivalente a obter o perímetro mínimo. Essa situação descrita acima, remete a um famoso problema de otimização em geometria, conhecido como: "**O Problema de Fagnano**", que está relacionado ao estudo de triângulos. Outro problema de otimização famoso em geometria, é o Problema de Heron. Observando o contexto histórico do tempo em que esses temas foram estudados, temos uma diferença maior que 700 anos. Vale resaltar que o problema de Fagnano é um tipo de extensão ao problema de Heron. Isso mostra que na geometria euclidiana (que estudamos no ensino básico), existem conceitos que podem ser estendidos.

Dentre as motivações para essa dissertação, estão novos estudos, documentados das últimas duas décadas, envolvendo problema de otimização. Porém, dessa vez relacionado a quadriláteros (4). Tal problema, é uma extensão ao problema de Fagnano aplicado, sob algumas condições, a quadriláteros. Esse tema chamou atenção, pelos seguintes fatores: a relevância histórica dos problemas de otimização em geometria, por está pautado em geometria euclidiana do ensino básico (fundamental e médio) e por trazer resultados recentes, mostrando que a geometria ainda pode ser explorada.

Enquanto professor, já ouvi de muitos alunos que "Na matemática não há mais o que inventar (descobrir)". Em particular, os conceitos de geometria que utilizamos atualmente na educação básica, são contribuições de geômetras antigos como: Euclides,

Pitágoras, Tales de Mileto, Descartes, Arquimedes, etc. Essa visão equivocada, pode gerar desinteresse por essa área. Essa dissertação, é fruto de pesquisas iniciais sobre quadriláteros órticos no Brasil, e para tanto, fazendo uso de resultados da geometria básica ainda pouco difundidos. Vejamos a seguir duas competências específicas de matemática para o ensino fundamental, presentes no texto da BNCC (Base Nacional Comum Curricular).

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

BNCC, competências específicas de matemática para o ensino fundamental, pág. 267.

Nessas duas competências, é destacada a necessidade de reconhecer a matemática (em particular, a geometria) como uma ciência viva que contribui para descobertas e construções de novos conceitos, e o desenvolvimento da autoestima em buscar soluções. Esses dois pontos, endossam o interesse em realizar um pesquisa sobre quadriláteros órticos.

No primeiro capítulo, são apresentados resultados que utilizaremos ao longo da dissertação. Em sua maioria, tais resultados auxiliam diretamente na compreensão de demonstrações posteriores ou são extensões de definições, proposições e teoremas que encontraremos no decorrer do trabalho. Vale a pena o leitor acompanhar esses resultados para que o mesmo tenha uma melhor compreensão dos capítulos 2 e 3, onde se desenrolam os principais resultados.

No segundo capítulo, iniciamos os estudos sobre triângulos órticos de triângulos acutângulos e obtusângulos. Tomamos como referência para esse tema as dissertações (3) e (1). Apresentaremos definições e mostraremos algumas propriedades sobre o tema. É neste capítulo que introduziremos os primeiros problemas de otimização. Inicialmente, o problema de Heron que consiste em determinar qual é a medida da menor poligonal aberta ABX , onde X pertence a uma reta r que não contém os pontos A e B (pontos distintos do mesmo semiplano determinado por r). Esse resultado, por exemplo, tem aplicações ao jogo de bilhar (acerta uma bola usando a tabelada mesa). Outro problema, é o de Fagnano (já citado) que consiste em determinar qual o triângulo inscrito em um triângulo acutângulo, cujo perímetro seja mínimo.

No terceiro capítulo, apresentaremos o tema principal que é também, o título do trabalho. Neste, constam definição, proposições e teoremas relacionados a quadriláteros órticos. Tomamos como referência para esse tema os artigos (4) e (6). Uma diferença entre triângulos órticos e quadriláteros órticos é que o primeiro é único. Já os quadriláteros órticos são infinitos. Muitos assuntos desse capítulo são temas recentes em geometria. É aqui que apresentaremos um problema de otimização, que sob algumas condições, é uma extensão ao problema de Fagnano (apresentado para triângulos). Mostraremos que dado um quadrilátero convexo, com a condição de ser cíclico e ter diagonais perpendiculares, o quadrilátero de menor perímetro inscrito no quadrilátero dado, são os órticos, pois todos esses, nessas condições, têm o mesmo perímetro.

No trabalho de pesquisa e investigação de resultados presentes aqui, bem como em todas as figuras produzidas, foi utilizado o software geométrico GeoGebra Classic 5.

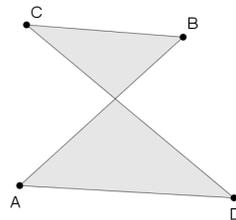
1 Conceitos e resultados preliminares

Nesse capítulo apresentaremos os conceitos, proposições e teoremas que serão utilizados para demonstrar e compreender resultados posteriores. Aqui vamos admitir que o leitor já possua conhecimentos de geometria básica tais como: teorema de Tales, ângulos na circunferência, congruência e semelhança de triângulos, desigualdade triangular, dentre outros. Caso o leitor tenha a necessidade de estudar ou relembrar alguns desses assuntos, poderá encontrar tais temas em (7).

Vamos fazer uma classificação de quadriláteros. Inicialmente, apresentaremos algumas definições.

Definição 1.1. (Quadriláteros simples e não-simples) Um quadrilátero é dito simples quando não possui autointersecção. Do contrário, será chamado de entrecruzado ou estrelado.

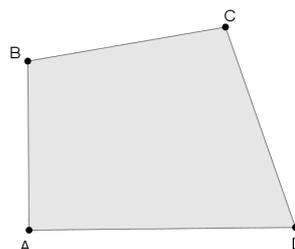
Figura 1 – Quadrilátero entrecruzado



Fonte: Autor

Definição 1.2. (Quadrilátero convexo) Um quadrilátero simples é convexo quando todos os pontos de um segmento cujas extremidades estão no interior do quadrilátero, também pertencem ao interior desse quadrilátero. (figura 2).

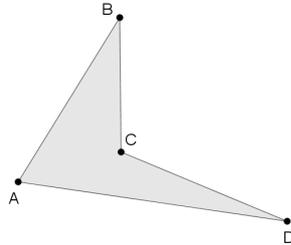
Figura 2 – Quadrilátero convexo



Fonte: Autor

Definição 1.3. (Quadrilátero concavo) Um quadrilátero simples é concavo quando não é convexo (figura 3).

Figura 3 – Quadrilátero concavo



Fonte: Autor

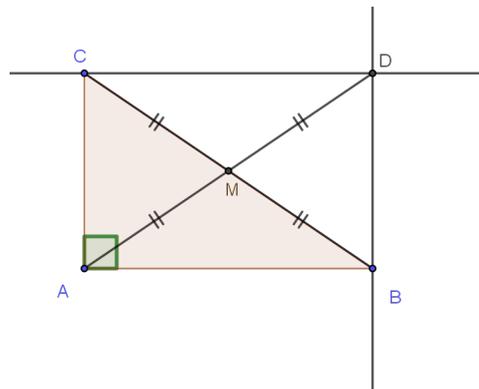
Proposição 1.4. (Paralelogramos) As seguintes afirmações são equivalentes para um quadrilátero convexo.

- (i) Os pares de lados opostos são paralelos;
- (ii) As diagonais são concorrentes em seus respectivos pontos médios;
- (iii) Os ângulos opostos são congruentes;
- (iv) os lados opostos são congruentes;
- (v) Dois ângulos consecutivos são sempre suplementares;
- (vi) Um par de lados opostos são paralelos e de mesma medida.

Teorema 1.5. (Mediana Relativa à hipotenusa)

Em qualquer triângulo retângulo a mediana relativa à hipotenusa tem medida igual à metade dessa.

Figura 4 – Mediana Relativa à hipotenusa



Fonte: Autor

Demonstração. Considere um triângulo retângulo ABC , reto em A . Traçando uma reta paralela a AC passando por B e uma outra paralela a AB passando por C , obtemos um ponto D como intersecção dessas retas. Dessa forma, obtemos o retângulo $ABCD$. Como os retângulo possuem as diagonais congruentes, pela Proposição 1.4(ii), essas são concorrentes em seu ponto médio M (figura 1). Daí, concluímos que

$$AM = \frac{1}{2}BC.$$

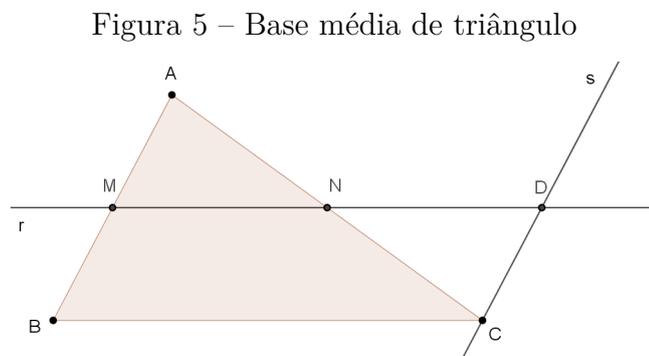
□

Definição 1.6. A base média de um triângulo relativa a um lado é o segmento que une os pontos médios dos outros dois lados.

Teorema 1.7. (*Base média de triângulo relativa a um lado*)

Dado um triângulo qualquer, a base média relativa a um lado é paralela a esse lado, e sua medida é igual a metade desse. De outro modo, se pelo ponto médio de um dos lados traçarmos uma paralela a outro lado, o ponto de intersecção dessa paralela com o terceiro lado será em seu ponto médio, e portanto determinará uma base média.

Demonstração. Dado um triângulo ABC qualquer, sendo M ponto médio de AB e N o ponto médio de AC , mostraremos que $MN \parallel BC$ e ainda $MN = \frac{1}{2}BC$.



Fonte: Autor

Sabemos que $AM = MB$ e $AN = NC$ (definição de ponto médio). Traçando uma reta s paralela a AB passando por C e uma reta r que contém MN , obtemos o ponto D , como intersecção dessas paralelas (figura 5). Note porém que os triângulos AMN e CDN são congruentes pelo caso LAA_o (lado, ângulo, ângulo oposto):

- $AN = CN$, pela definição de ponto médio;
- $\angle ANM \equiv \angle CND$, pois são oposto pelo vértice;
- $\angle AMN \equiv \angle CDN$, pois são alternos internos.

Desse resultado, temos $CD = AM = BM$, $MN = ND$, $\angle MAN \equiv \angle DCN$ e $\angle AMN \equiv \angle CDN$. Como $CD \parallel BM$ e também $CD = BM$, pela Proposição 1.4(vi), podemos afirmar que o quadrilátero $BMDC$ é um paralelogramo. Portanto, $MN \parallel BC$, e sendo N o ponto médio de MD concluímos que

$$MN = \frac{1}{2}BC.$$

Para mostrar ainda que, se traçarmos uma paralela a BC passando por M , a intersecção dessa paralela com o outro lado deve ser no ponto N , basta usar a unicidade das paralelas, pois só existe uma reta paralela ao lado BC , que passa por M . Portanto, essa paralela deve ser MN .

□

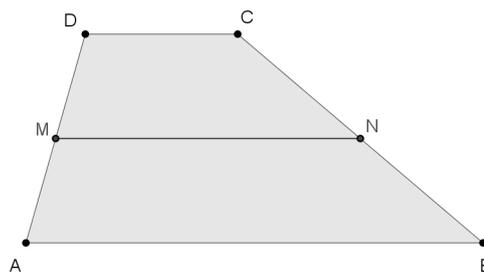
Definição 1.8. O segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é a sua base média.

Proposição 1.9. (*Base média de trapézios*) Dado um trapézio qualquer, sua base média tem medida igual à metade da soma das medidas bases do trapézio, e é paralela essas.

Demonstração. Considerem o trapézio $ABCD$ onde M é o ponto médio de AD e N o ponto médio de BC (figura 6). Queremos mostrar que, $AB \parallel MN$ e

$$MN = \frac{AB + CD}{2}.$$

Figura 6 – Base média do trapézio I

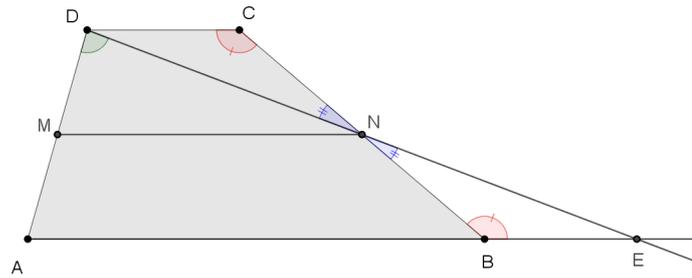


Fonte: Autor

Traçando as semirretas DN e AB , chamemos de E ao ponto de intersecção dessas semirretas. Os triângulos DCN e EBN são congruentes pelo caso ALA (ângulo - lado - ângulo) (figura 7).

- $\angle DNC \equiv \angle ENB$, pois são opostos pelo vértice.
- $BN \equiv NC$, pois N é ponto médio de BC .
- $\angle EBN \equiv \angle DCN$, pois são alternos internos em relação as paralelas AB e CD .

Figura 7 – Base média do trapézio II



Fonte: Autor

Daí, temos

$$BE = CD \quad (1.1)$$

e $DN = NE$ (ou seja, N é ponto médio de DE). Com esse resultado, pelo Teorema 1.7, temos que MN é base média do triângulo ADE . Logo, $MN \parallel AB$ e

$$MN = \frac{AE}{2} = \frac{AB + BE}{2}.$$

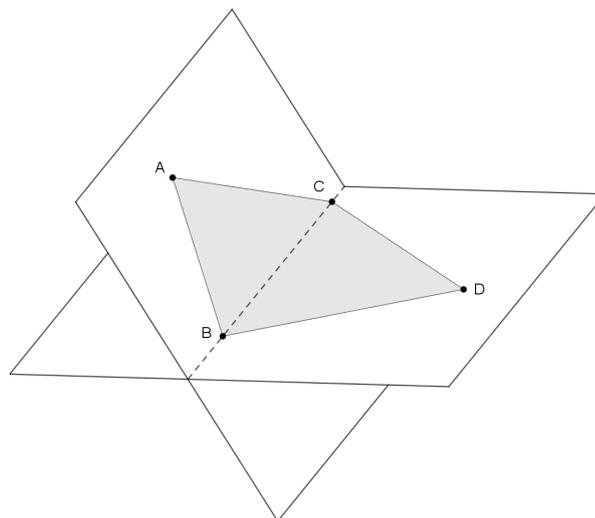
Pela igualdade (1.1), chegamos a

$$MN = \frac{AB + CD}{2}.$$

□

A partir de agora, no contexto do nosso trabalho, chamaremos de *quadriláteros*, a todos os quadriláteros planos, ou seja, aos que possuem os quatro vértices coplanares. Do contrário, o chamaremos de *quadrilátero reverso* (figura 8).

Figura 8 – Quadrilátero Reverso



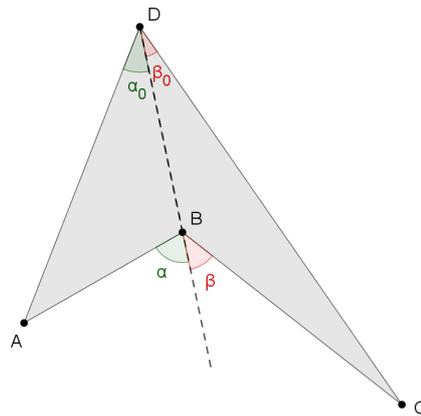
Fonte: Autor

O lema a seguir será usado na demonstração na proposição seguinte sobre arco capaz.

Lema 1.10. *Em qualquer quadrilátero concavo, a medida do replementar do ângulo interno maior que 180° , é sempre maior que a medida do ângulo interno oposto.*

Demonstração. Considere um quadrilátero concavo $ABCD$ cujo ângulo B seja o que tem medida maior que 180° . Tracemos a semirreta BD dividindo o quadrilátero em dois triângulos e gerando os ângulos α e β (replementar do ângulo interno $\angle B$), e também α_0 e β_0 (cuja soma é igual a medida $\angle D$) (figura 9).

Figura 9 – Quadrilátero Concavo



Fonte: Autor

O teorema do ângulo externo afirma que o ângulo externo de um triângulo é maior que os ângulos internos não adjacentes, logo, em ABD temos que o ângulo α é maior que α_0 . Analogamente no triângulo BCD temos β maior que β_0 . Sendo $\alpha + \beta$ o ângulo replementar do ângulo interno B e $\alpha_0 + \beta_0$ o ângulo interno oposto ao ângulo B , concluímos que

$$\alpha + \beta > \alpha_0 + \beta_0.$$

□

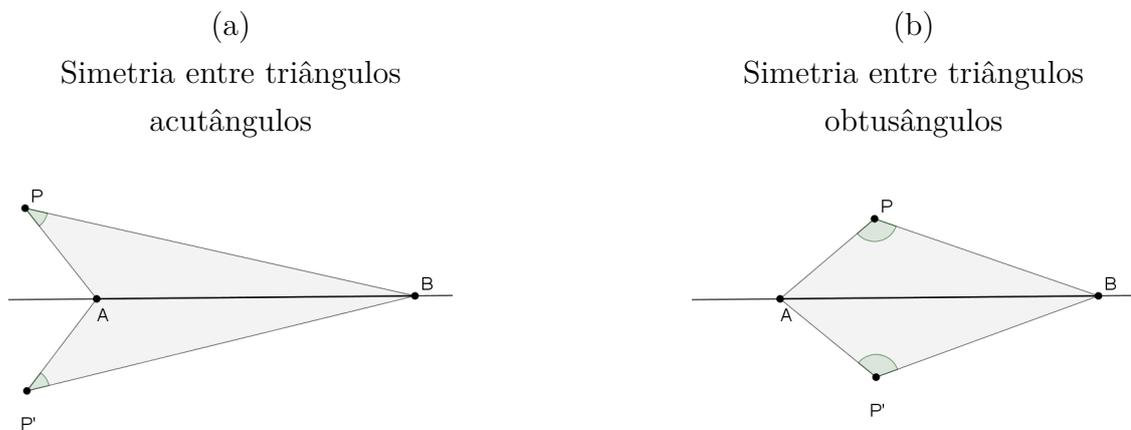
Proposição 1.11. *Dado um segmento AB e um ângulo α , tal que $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\angle APB = \alpha$ é a união de dois arcos de círculo, simétricos em relação a uma reta AB onde os pontos A e B são extremos desse arco. Cada um dos arcos é chamado de **arco capaz** de α em relação a AB .*

Demonstração. A presente demonstração, está inspirada no texto encontrado em (8).

Primeiramente, mostraremos um argumento para justificar que é suficiente restringir o estudo a um dos arcos em um semiplano determinado por AB .

Seja $P \notin AB$ tal que $\angle APB = \alpha$, com $0 < \alpha < 180^\circ$. Tomemos P' o simétrico do ponto P em relação à reta AB , onde essa reta será a mediatriz de PP' , e assim teremos $AP = AP'$ e $BP = BP'$. Feito isso, percebemos que os triângulos APB e $AP'B$ são congruentes pelo caso LLL, e conseqüentemente, $\angle APB = \angle AP'B = \alpha$ (figura 10).

Figura 10 – Triângulos simétricos em relação à mediatriz de PP'



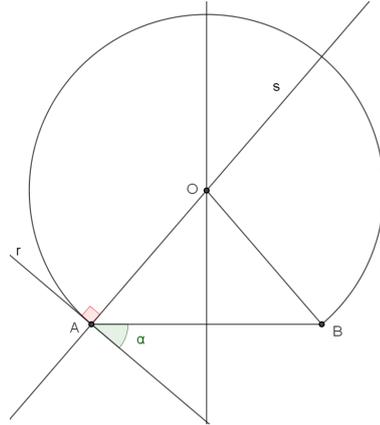
Fonte: Autor

Dessa forma, para estudarmos o lugar geométrico, basta considerar apenas um dos semiplanos determinados por AB .

Vamos mostrar a construção de um arco capaz, dados um segmento AB e um ângulo α agudo ou obtuso.

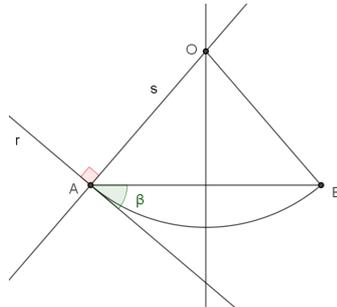
Considere α um ângulo agudo. Tracemos uma reta r passando por A , tal que o ângulo formado por r e AB no semiplano contrário ao que irá conter o arco capaz, tenha medida α (figura 11). Em seguida, construa uma reta s perpendicular a r passando pelo ponto A . Agora, tracemos também, a mediatriz do segmento AB . Feito isso, obtemos o ponto O (intersecção da reta r com a mediatriz de AB). Dessa forma, construímos um triângulo isósceles AOB , tal que $\angle AOB = 2\alpha$. Tomando $OA = OB = R$, a medida do raio da circunferência Γ e centro O . O arco determinado no semiplano contrário a α é um lugar geométrico dos pontos que enxergam AB sobre um ângulo α . Caso α seja obtuso, faremos a mesma construção para o seu suplementar $\beta = 180^\circ - \alpha$ (agudo), e por fim tomamos um arco de Γ no semiplano que contém o ângulo β (figura 12).

Figura 11 – Construção de arco capaz para ângulo agudo



Fonte: Autor

Figura 12 – Construção de arco capaz para ângulo obtuso



Fonte: Autor

Para o caso $\alpha = 90^\circ$, o ponto O , intersecção da reta r com a mediatriz de AB , coincide com o ponto médio de AB . Portanto seu arco capaz será um semicírculo de raio $AO = OB$.

Assim, todo ponto do semicírculo de diâmetro AB situado no semiplano superior pertence ao lugar geométrico dos pontos que enxergam AB por um ângulo α reto. Reciprocamente, se P pertence ao semiplano superior, tal que $\angle APB = 90^\circ$, e O é o ponto médio de AB , então PO é a mediana relativa a hipotenusa do triângulo retângulo ABP (Teorema 1). Isso implica que

$$PO = \frac{1}{2}AB = OA = OB.$$

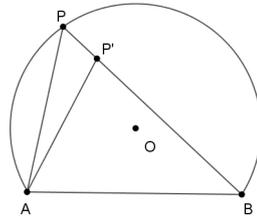
Portanto, pertence ao semicírculo de diâmetro AB .

Vamos mostrar agora o arco capaz como um lugar geométrico de modo geral.

Seja P' o ponto pertencente ao arco capaz de AB associado a um ângulo α . Por construção, a medida do ângulo $\angle AP'B = \alpha$. No entanto, se P' pertença à região interna delimitada por Γ e o segmento AB , temos $\angle AP'B > \alpha$. Para perceber isso, basta prolongar, por exemplo, o lado BP' , tal que sua intersecção com Γ seja o ponto P

(figura 13). Pela propriedade do ângulo externo, $\angle AP'B = \angle APB + \angle PAP'$, portanto $\angle AP'B > \angle APB = \alpha$. Logo P' não pertence ao lugar geométrico dos pontos que enxergam AB sobre um ângulo α .

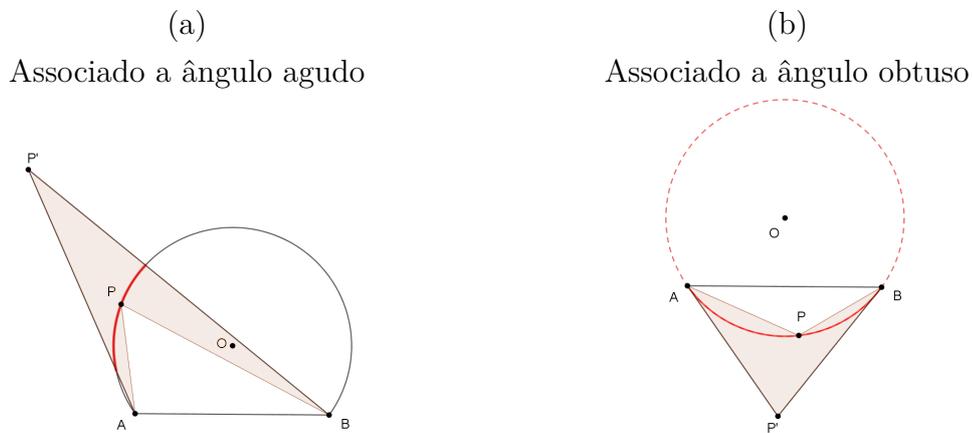
Figura 13 – Arco capaz superior do segmento AB



fonte: Autor

Considere agora o ponto P' externo à Γ e pertencente ao mesmo semiplano do arco capaz. Nesse caso, podemos escolher um ponto P pertencente a intersecção do arco capaz com a região interna do triângulo $AP'B$. Feito isso, obtemos um quadrilátero $AP'BP$, côncavo (figura 14). Pelo Lema 1.10, concluímos que $\angle AP'B < \angle APB = \alpha$.

Figura 14 – Quadrilátero côncavo para um arco capaz



Fonte: Autor

Portanto, os únicos pontos que enxergam o segmento AB sobre um ângulo α (agudo, reto ou obtuso), são os pontos pertencentes ao arco capaz.

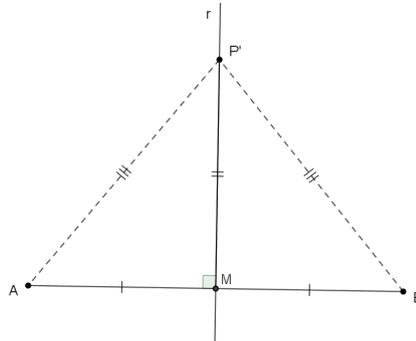
□

Proposição 1.12. (*Mediatriz como lugar geométrico*) O lugar geométrico do plano que é equidistante de dois pontos distintos A e B , é a reta mediatriz de AB .

Demonstração. Seja AB um segmento, M seu ponto médio e r a reta mediatriz de AB . Tome P um ponto de r . No triângulo APB , PM é mediana e altura (figura 15). Dessa forma, os triângulos retângulos AMP e BMP são congruentes pelo caso LAL (lado-ângulo

lado), pois: $AM = BM$ (M é ponto médio de AB); $\angle AMP \equiv \angle BMP$, são retos; MP , é comum. Daí, temos $PA = PB$, ou seja, P é equidistante de AB .

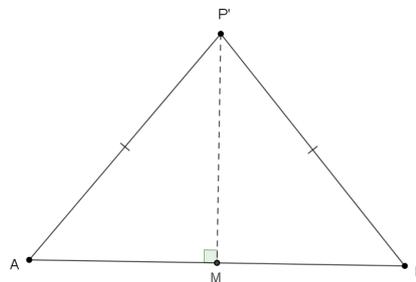
Figura 15 – Arco capaz superior do segmento AB



fonte: Autor

Reciprocamente, tome P' tal que $P'A = P'B$ e M o ponto médio de AB . O triângulo $AP'B$ é isósceles cuja base é AB . $AP'M$ e $BP'M$ são congruentes por LLL , resultando disso que $\angle AMP' = \angle BMP'$. Sendo $\angle AMP' + \angle BMP' = 180^\circ$, implica que $\angle AMP' = \angle BMP' = 90^\circ$ (figura 16). Dessa forma, a reta $P'M$ é mediatriz de AB .

Figura 16 – Arco capaz superior do segmento AB



fonte: Autor

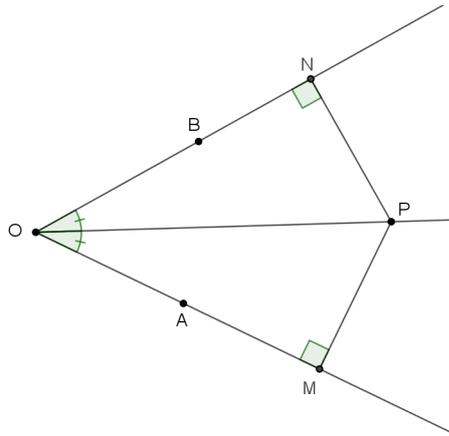
□

Proposição 1.13. (*Bissetriz como lugar geométrico*) Dado o ângulo $\angle AOB$, o lugar geométrico dos pontos, deste ângulo, equidistantes das semirretas OA e OB é a bissetriz desse ângulo.

Demonstração. Suponha P é um ponto da bissetriz do ângulo $\angle AOB$ agudo, sem perda de generalidade. Baixando perpendiculares de P às semirretas OA e OB , determinamos os pontos M e N , respectivamente (figura 17).

Note que os triângulos OPM e OPN são congruentes pelo caso LAA_O (lado - ângulo - ângulo oposto). O lado OP é comum, $\angle AOP \equiv \angle POB$ devido à bissetriz e

Figura 17 – Bissetriz 1



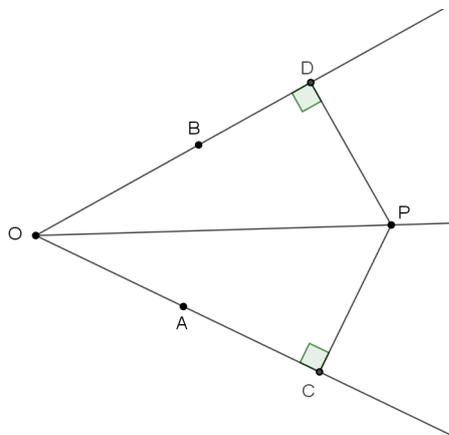
Fonte: Autor

$\angle OMP \equiv \angle ONP = 90^\circ$. Desse fato, temos que NP é congruente a MP , ou seja, P é equidistante das semirretas OA e OB .

Reciprocamente, considere agora o ponto P pertencente ao lugar geométrico dos pontos equidistantes das semirretas OA e OB , mostraremos que p pertence à bissetriz de $\angle AOB$.

De fato, sejam PC e PD os segmentos congruentes, onde C pertence a semirreta OA e D pertence a semirreta OB (figura 18). Os triângulos OPC e OPD são congruentes pelos caso hipotenusa-cateto, pois OP é hipotenusa comum e os segmentos CP e DP são os catetos. Daí, concluímos $\angle COP \equiv \angle DOP$, e portanto P pertence à bissetriz de $\angle AOB$.

Figura 18 – Bissetriz 2



Fonte: Autor

Definição 1.14. (Quadrilátero cíclico) Um quadrilátero qualquer é dito cíclico quando o mesmo é inscrito em uma circunferência, ou ainda, quando seus vértices pertencem a uma circunferência.

A próxima proposição vai tratar sobre as condições para que um quadrilátero convexo seja cíclico.

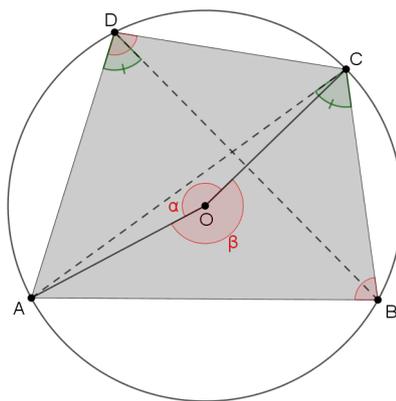
Proposição 1.15. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. As seguintes afirmações são equivalentes acerca deste quadrilátero:*

- (i) $ABCD$ é cíclico;
- (ii) Possui um par de ângulos opostos suplementares;
- (iii) Possui um ângulo interno congruente ao seu ângulo externo oposto;
- (iv) O ângulo formado por um dos lados e uma diagonal de $ABCD$ é congruente ao ângulo formado pela outra diagonal e o lado oposto ao primeiro.
- (v) as mediatrizes relativas aos lados de $ABCD$ são concorrentes em um ponto.

Demonstração. (i) \Leftrightarrow (ii)

Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. Mostraremos essa equivalência para o par de ângulos opostos B e D (figura 19). Para o outro par de ângulos opostos, a demonstração é análoga.

Figura 19 – Quadrilátero cíclico I



Fonte: Autor

Sejam α e β a medida dos arco ADC e ABC respectivamente. Temos que os ângulos $\angle B$ e $\angle D$ do quadrilátero $ABCD$ (ângulos inscritos da mesma circunferência), tem medidas $\frac{\alpha}{2}$ e $\frac{\beta}{2}$, respectivamente. Como $\alpha + \beta = 360^\circ$, temos

$$\angle ABC + \angle ADC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Reciprocamente, suponha

$$\angle B + \angle D = 180^\circ, \quad (1.2)$$

e considere o círculo que passa pelos pontos A , B e C . Dessa maneira, $\angle B$ está inscrito nesse círculo. Daí, a medida do arco AC que não contém o ponto B é igual a $2\angle B$. Por sua vez, a medida do arco ABC é igual a

$$360^\circ - 2\angle B.$$

Perceba que o arco AC que não contém o ponto B , é o arco capaz do segmento AC associado ao ângulo

$$\frac{360^\circ - 2\angle B}{2} = 180^\circ - \angle B.$$

Mas pela igualdade (1.2), temos

$$\angle D = 180^\circ - \angle B.$$

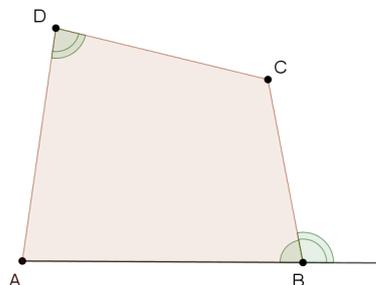
Logo, pela Proposição 1.11, o ponto D deve estar contido no arco capaz AC que não contém o ponto B .

$$(ii) \Leftrightarrow (iii)$$

Suponha o par de ângulos opostos $\angle ABC$ e $\angle ADC$ suplementares. O ângulo externo de $\angle ABC$ é seu suplementar, logo é congruente ao ângulo $\angle ADC$ (figura 20).

Reciprocamente, se o ângulo $\angle ADC$ é congruente ao ângulo externo de $\angle ABC$, temos o ângulo interno $\angle ABC$ como suplementar desse externo, e conseqüentemente suplementar de $\angle ADC$.

Figura 20 – Quadrilátero e ângulo externo



Fonte: Autor

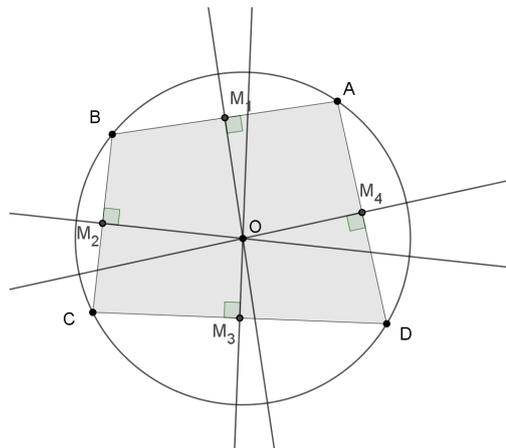
$$(i) \Leftrightarrow (iv)$$

Esse resultado decorre imediatamente da Proposição 1.11.

$$(i) \Leftrightarrow (v)$$

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que as mediatrizes relativas a cada lado de $ABCD$ sejam concorrentes no ponto O . Daí, temos que O é equidistante de todos os vértices de $ABCD$, logo existe um círculo de centro O e raio $AO = OB = OC = OD$ que circunscreve o quadrilátero $ABCD$ (figura 21).

Figura 21 – Mediatrizes relativas aos lados de um quadrilátero cíclico



Fonte: Autor

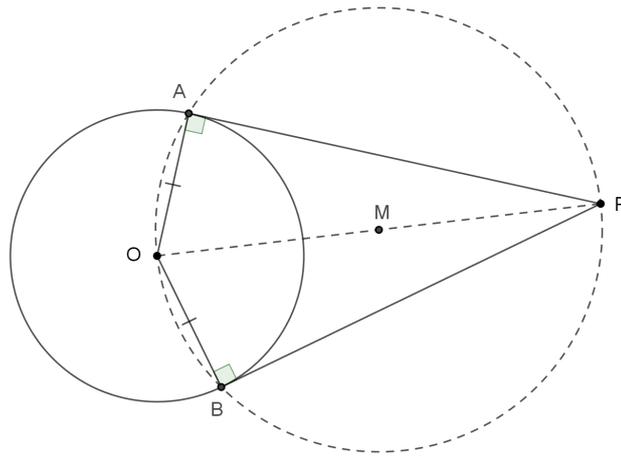
Reciprocamente, se $ABCD$ é inscritível em um círculo de centro O , temos O é equidistante de todos os vértices de $ABCD$. Pela de Proposição 1.12, o ponto O deve pertencer a todas as mediatrizes relativas aos lados de $ABCD$.

□

Lema 1.16. *Seja P um ponto externo ao círculo Γ . Existem A e B pontos distintos de Γ , tal que PA e PB sejam tangentes a esse círculo, e além disso $PA = PB$.*

Demonstração. Seja O o centro do círculo Γ . Sejam A e B os pontos de intersecção de Γ com o círculo de centro M (ponto médio de OP), e raio MP . Daí, temos $\angle OAP \equiv \angle OBP = 90^\circ$, pois são ângulos cujos vértices pertencem a arcos capazes simétricos associados ao diâmetro OP (figura 22).

Figura 22 – Segmentos tangentes à circunferência



fonte: Autor

Os triângulos OAP e OBP são congruentes pelo caso hipotenusa cateto. Daí, segue o resultado que $PA = PB$ \square

Definição 1.17. (Quadriláteros circunscritível) Um quadrilátero convexo é dito circunscritível quando existe um círculo que tangencia todos os seus lados.

A proposição a seguir tratar sobre as condições para que um quadrilátero convexo seja circunscritível.

Proposição 1.18. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. As seguintes afirmações são equivalentes a cerca de $ABCD$:*

- (i) $ABCD$ é circunscritível;
- (ii) As bissetrizes de $ABCD$ são concorrentes no mesmo ponto;
- (iii) A soma das medidas dos lados opostos de $ABCD$ são iguais;

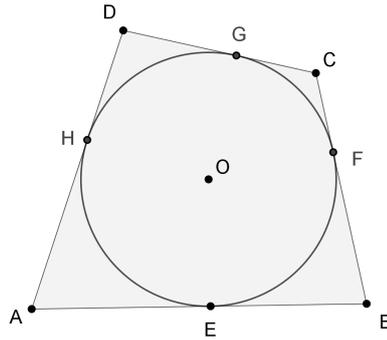
Demonstração. (i) \Leftrightarrow (ii)

Esse resultado segue imediatamente da Proposição 1.13.

(i) \Leftrightarrow (iii)

Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo, Γ o círculo inscrito nesse quadrilátero e os pontos E , F , G e H , respectivamente, as intersecções de Γ com o lados AB , BC , CD e AD do quadrilátero (figura 23).

Figura 23 – Quadrilátero circunscritível III



fonte: Autor

Pelo Lema 1.16, temos

$$AE = AH,$$

$$BE = BF,$$

$$CG = CF,$$

$$DG = DH.$$

Somando essas igualdades, membro a membro, obtemos

$$AE + BE + CG + DG = AH + BF + CF + DH$$

$$AB + CD = BC + AD.$$

Reciprocamente, seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cuja soma das medidas dos lados opostos é constante, isso é,

$$AB + CD = BC + AD. \quad (1.3)$$

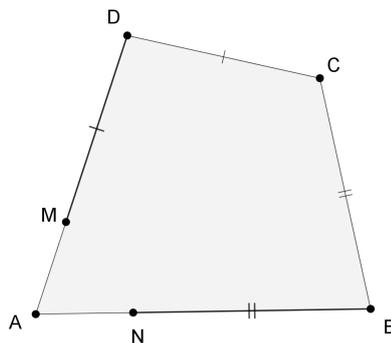
Vamos supor nessa última igualdade, que $AD \geq CD$ (poderíamos fazer essa suposição para quaisquer dois lados consecutivos e distintos de $ABCD$). Sendo assim, temos que $AB \geq BC$. Sendo $AD \geq CD$, podemos escolher um ponto M em AD , tal que

$$CD = DM. \quad (1.4)$$

De $AB \geq BC$, podemos escolher um ponto N em AB (figura 24), tal que

$$BC = BN. \quad (1.5)$$

Figura 24 – Quadrilátero circunscritível IV



fonte: Autor

Podemos reescrever a igualdade (1.3), como sendo

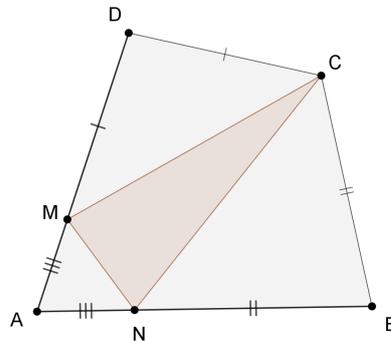
$$(AN + BN) + CD = BC + (AM + DM).$$

Aplicando a essa última igualdade os resultados de (1.4) e (1.5), temos

$$AN = AM.$$

Geramos três triângulos isósceles DMC , ANM e BCN (figura 25).

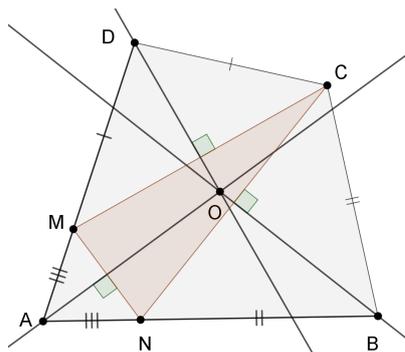
Figura 25 – Quadrilátero circunscritível V



fonte: Autor

Sabemos que nos triângulos isósceles a bissetriz relativa ao lado não congruente, é também mediana e altura relativa. Tracemos portanto, as bissetrizes dos triângulos DMC , ANM e BCN , relativas aos respectivos lados não congruentes, CM , MN e CN . Dessa forma, temos que tais bissetrizes, respectivamente, são mediatrizes relativas aos lados CM , MN e CN do triângulo CMD , e portanto são concorrentes no ponto O (figura 26) .

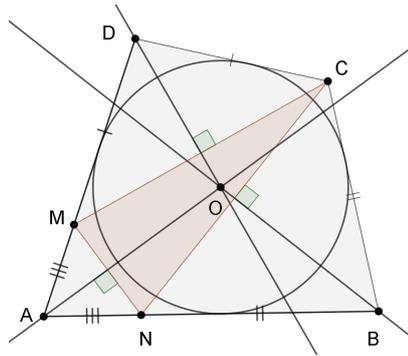
Figura 26 – Quadrilátero circunscritível VI



fonte: Autor

Como o ponto O é comum a essas bissetrizes (mediatrizes), pela Proposição 1.13, temos que O é equidistante dos lados do quadrilátero $ABCD$. Logo existe uma circunferência inscrita em $ABCD$ (figura 27).

Figura 27 – Quadrilátero circunscritível VII



fonte: Autor

□

Observação 1.19. A equivalência $(i) \Leftrightarrow (iii)$, da proposição anterior corresponde ao teorema de **Pitot**¹.

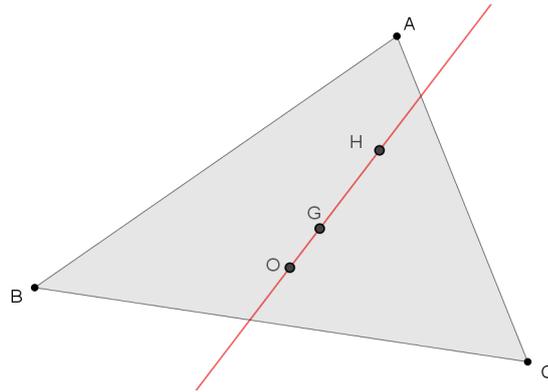
As proposições a seguir nos mostram resultados sobre a **reta de Euler** para triângulos não equiláteros e o **círculo de nove pontos**. Ambas as demonstrações o leitor interessado poderá encontrá-las em (5).

Proposição 1.20. (*Reta de Euler*) *O ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo, não equilátero, são colineares. A reta determinada por esses pontos é chamada de reta de Euler.*

A figura a seguir mostra a reta de Euler em vermelho, que contém o *ortocentro* (ponto H), o *baricentro* (ponto G) e o *circuncentro* (ponto O).

Figura 28 – Reta de Euler

¹ Engenheiro francês, viveu entre 1695 e 1771. Além do teorema que leva seu nome, inventou um instrumento para medir a velocidade dos fluidos e que é conhecido hoje pelo seu nome, o tubo de Pitot.

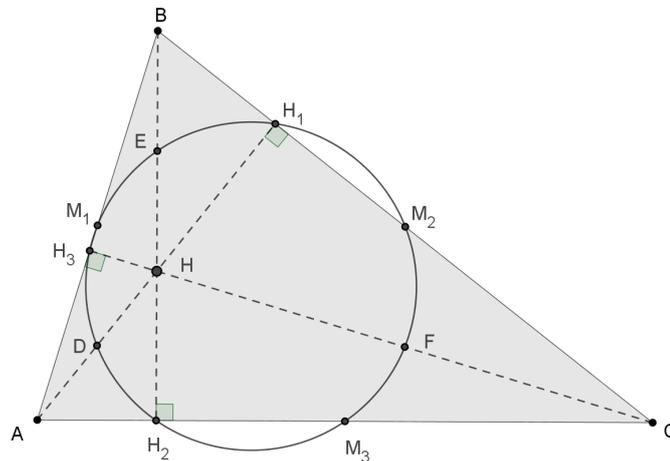


Fonte: Autor

Proposição 1.21. *Os pés das três alturas de um triângulo qualquer, os pontos médios de seus três lados e os pontos médios dos segmentos formados pelo ortocentro e os vértices, pertencem ao mesmo círculo, denominado **círculo de 9 pontos**.*

Seja H o ortocentro de triângulo ABC . Os pontos H_1 , H_2 e H_3 são os pés das alturas de ABC . Os pontos M_1 , M_2 e M_3 são os pontos médios dos lados de ABC . E, por fim, Os pontos D , E e F são os pontos médios dos segmentos AH , BH e CH , respectivamente. Todos esses pontos estão contidos e determinam o círculo de 9 pontos (figura 29).

Figura 29 – Círculo de 9 pontos



Fonte: Autor

2 O triângulo órtico e suas propriedades

Os triângulos desempenham um papel muito importante no desenvolvimento da geometria. Essa forma geométrica possui propriedades muito ricas, tanto que influenciam, até os dias atuais, a criação de objetos que nos cercam. Seja no tripé de uma câmera fotográfica, nas velas de um barco, um jarro ou um simples objeto de sinalização veicular, vemos essa forma geométrica por toda parte.

Muitos matemáticos dedicaram-se a estudar propriedades e curiosidades acerca da forma geométrica do triângulo. Uma característica interessante dessa forma geométrica é a rigidez. Os objetos que tem formato triangular são, muitas vezes, usados como suporte ou apoio. Tal rigidez deve-se ao fato de que quando um triângulo é construído, torna-se impossível modificar os seus ângulos. Dentre os matemáticos que tiveram grandes progressos com o estudo do polígono triangular, podemos destacar: Euclides, Pitágoras, Tales de Mileto, etc.

Sabendo da importância do estudo dos triângulos em geometria, podemos destacar alguns pontos notáveis do triângulo: o baricentro, o incentro, o ortocentro e o circuncentro.

O Baricentro é o ponto de intersecção das medianas relativas aos lados de um triângulo; O incentro é o ponto de intersecção das bissetrizes relativas aos ângulos internos de um triângulo; O ortocentro é o ponto de intersecção das alturas relativas aos vértices dos triângulo e por fim o circuncentro que é o ponto de encontro das mediatrizes relativas a cada lado do triângulo.

Nesse capítulo vamos ter um olhar mais atento aos triângulos órticos (Definição 2.1). A abordagem desse assunto é motivada pela relação com o tema principal dessa dissertação, os quadriláteros órticos, e estará baseada em (3) e (1).

2.1 Definição de triângulo órtico e propriedades

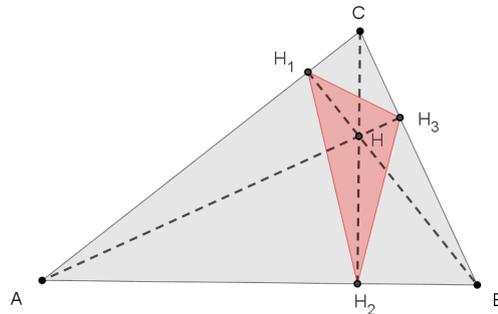
2.1.1 Definição de triângulo órtico

Definição 2.1. O triângulo órtico de um triângulo ABC é aquele cujos vértices são os pés dessas alturas relativas aos lados de ABC .

O triângulo órtico é assim chamado porque sua construção está diretamente ligada à construção utilizada para se obter o ortocentro de um triângulo. Uma observação é que

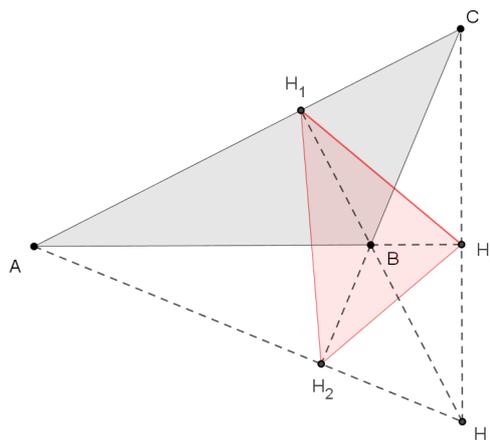
o ortocentro pode ser obtido em qualquer triângulo, enquanto o triângulo órtico existe apenas em triângulos acutângulos e obtusângulos (figuras 30 e 31).

Figura 30 – Triângulo órtico de um triângulo acutângulo



Fonte: autor

Figura 31 – Triângulo órtico de um triângulo obtusângulo



Fonte: autor

Proposição 2.2. *Os vértices de um triângulo ABC e seu ortocentro H , distinto desses vértices, possuem a propriedade de que cada um desses pontos é ortocentro do triângulo formado pelos outros três pontos.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, consideremos ABC acutângulo (figura 30). Como o ponto H já é ortocentro de ABC , basta mostrar que qualquer vértice de ABC é ortocentro do triângulo formado pelos outros três pontos.

No triângulo AHB , AH_1 e BH_3 são alturas relativas aos lados BH e AH , respectivamente. Porém as retas determinadas por AH_1 e BH_3 são concorrentes em C . Logo C é ortocentro de AHB . Para os demais triângulos, o procedimento é análogo.

□

Observação 2.3. Nessa proposição, percebemos que qualquer triângulo formado por três desses quatro pontos (os vértices de ABC e seu ortocentro), possui o mesmo triângulo órtico ($H_1H_2H_3$). Além disso, qualquer triângulo órtico, é o triângulo órtico de algum triângulo acutângulo. Portanto, nas proposições seguintes, vamos considerar apenas os triângulos órticos de triângulo acutângulo.

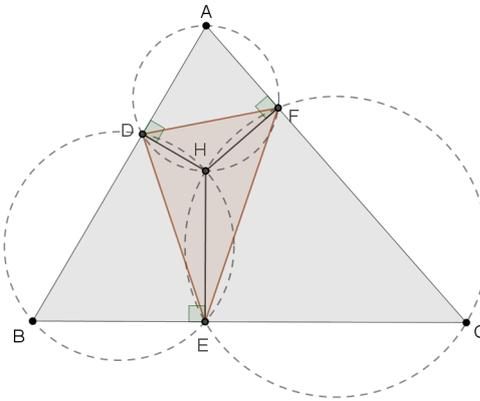
2.1.2 Propriedades do triângulo órtico

Nessa seção, vamos mostrar algumas propriedades dos triângulos órticos. Algumas dessas, nos permitirá compreender resultados mais adiante, bem como estabelecer algumas conexões (paralelos) com os quadriláteros órticos (capítulo seguinte).

Lema 2.4. *Seja DEF o triângulo órtico de um triângulo acutângulo ABC e o ponto H , ortocentro de ABC . Os quadriláteros $ADHF$, $BEHD$ e $CFHE$ são, cada um, inscritíveis em uma circunferência.*

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para o quadrilátero $ADHF$ (figura 32). Nesse quadrilátero, $\angle ADH \equiv \angle HFA = 90^\circ$, pois são pés das alturas CD e BF , respecti-

Figura 32 – Quadriláteros inscritíveis no triângulo



Fonte: Autor

vamente. Como o quadrilátero $ADHF$ tem um par de ângulos opostos suplementares, pela Proposição 1.15, ele é cíclico. Para os demais quadriláteros $BEHD$ e $CFHE$, o resultado é análogo.

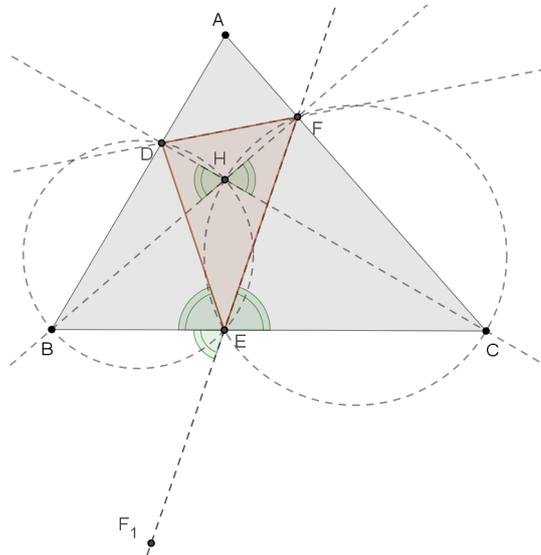
□

Proposição 2.5. *Dado um triângulo acutângulo e seu triângulo órtico, os lados do triângulo dado são bissetrizes externa dos ângulos externos do triângulo órtico.*

Demonstração. Sejam DEF o triângulo órtico de um triângulo acutângulo ABC e H ortocentro de ABC . Seja F_1 (reflexão de F em relação a E) pertencente à semirreta FE .

Vamos mostrar que $\angle BED \equiv \angle BEF_1$, ou seja, o lado BC é uma bissetriz externa do ângulo $\angle DEF_1$ (figura 33).

Figura 33 – Bissetrizes dos ângulos externos do triângulo órtico



Fonte: Autor

Pelo Lema 2.4, o quadrilátero $BDHE$ é inscritível. Daí, $\angle BED \equiv \angle BHD$, pois são ângulos inscritos associados ao mesmo arco BD . Por sua vez, $\angle BHD \equiv \angle CHF$ (opostos pelo vértice H). Pelo mesmo lema, o quadrilátero $CFHE$ também é inscritível. Daí, $\angle CHF \equiv \angle CEF$, por serem ângulos inscritos associados ao mesmo arco FC . Por último, temos $\angle CEF \equiv \angle EBF_1$ (postos pelo vértice E). Por transitividade, conseguimos chegar a conclusão de que

$$\angle BED \equiv \angle BEF_1.$$

Segue o resultado que o lado BC do triângulo dado é uma bissetriz externa do ângulo $\angle DEF_1$. Para os demais ângulos externos, a demonstração é análoga. □

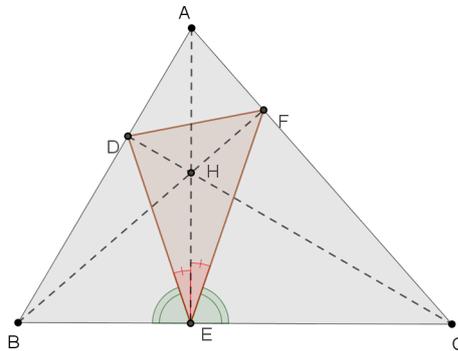
O corolário a seguir é um resultado imediato da Proposição 2.5.

Corolário 2.6. *Dado um triângulo acutângulo e seu triângulo órtico, os vértices do triângulo dado são intersecções de duas bissetrizes externas do triângulo órtico.*

Proposição 2.7. *Dado um triângulo acutângulo e seu triângulo órtico, as alturas do triângulo dado são bissetrizes internas do triângulo órtico.*

Demonstração. Sejam DEF o triângulo órtico de um triângulo acutângulo ABC e H ortocentro de ABC . Vamos mostrar que a altura AE é bissetriz do ângulo $\angle DEF$.

Figura 34 – Bissetrizes internas do triângulo órtico



Fonte: Autor

Pela demonstração da Proposição 2.5, temos

$$\angle DEB \equiv \angle FEC. \quad (2.1)$$

Por sua vez, $\angle AEF = 90^\circ - \angle FEC$ e $\angle AED = 90^\circ - \angle DEB$. Substituindo nessas últimas igualdades o resultado (2.1), concluímos que $\angle AEF \equiv \angle AED$. As demonstrações para as outras bissetrizes internas de DEF são análogas.

□

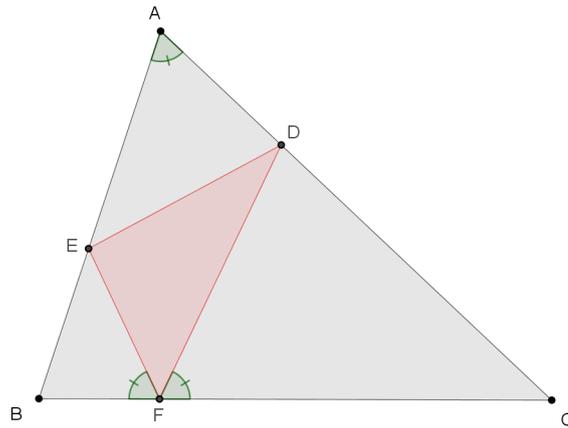
O corolário a seguir, segue imediatamente da Proposição 2.7.

Corolário 2.8. *Dado um triângulo acutângulo e seu triângulo órtico, o ortocentro desse triângulo é o incentro do triângulo órtico.*

Proposição 2.9. *Consideremos um triângulo ABC acutângulo e seu triângulo órtico DEF . Os ângulos formados pelo lado de ABC com os lados do órtico que concorrem nesse mesmo lado de ABC são congruentes. Além disso, o ângulo de ABC oposto ao lado adjacente a tais ângulos, também é congruente a esses.*

Demonstração. Mostraremos que os ângulos $\angle BFE$, $\angle CFD$ e $\angle BAC$ são congruentes entre si (figura 35).

Figura 35 – Triângulo órtico de um triângulo acutângulo I



Fonte: autor

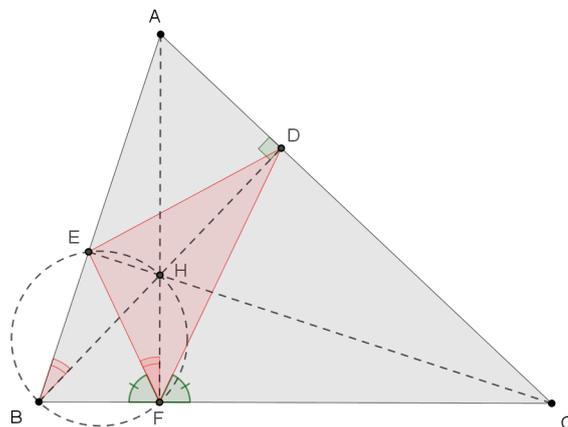
Pela demonstração da Proposição 2.5, concluímos que

$$\angle BFE \equiv \angle CFD.$$

Basta mostrar agora que $\angle BFE$ e $\angle CFD$ também são congruentes ao ângulo $\angle BAC$.

Pelo Lema 2.4, o quadrilátero $FHEB$ é inscritível em uma circunferência de diâmetro BH (H é o ortocentro de ABC). Daí, temos $\angle EBH \equiv \angle EFH$, pois são ângulos inscritos associados ao mesmo arco EH (figura 36).

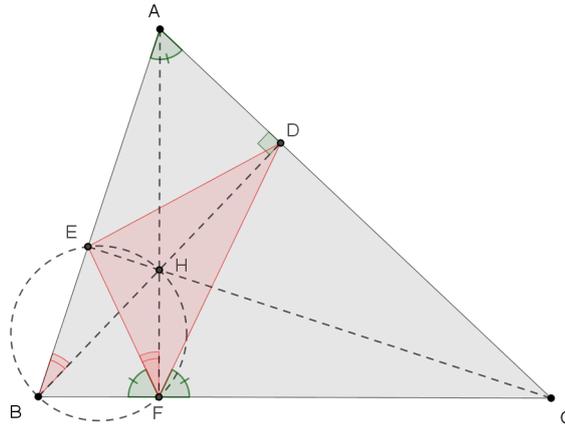
Figura 36 – Triângulo órtico de um triângulo acutângulo II



Fonte: autor

No triângulo retângulo AFB , note que $\angle BFE$ é complementar de $\angle EFH$, portanto também é complementar de $\angle EBH$. Por sua vez, no triângulo retângulo BDA , temos $\angle BAD = \angle BAC$ é o complementar de $\angle ABD = \angle EBH \equiv \angle EFH$. Logo $\angle BFE \equiv \angle BAC$ (figura 37).

Figura 37 – Triângulo órtico de um triângulo acutângulo III



Fonte: autor

Para mostrar o resultado acima para os outros ângulos relacionados aos outros vértices de DEF , o procedimento é análogo.

□

2.2 Problemas de otimização em geometria

Em matemática, o termo otimização refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma grandeza. Devido a isso os problemas de otimização são muito importantes na geometria, assim como em outras áreas da matemática.

Vejamos alguns problemas de otimização em geometria.

2.2.1 O problema de Heron

Heron de Alexandria¹ foi um matemático grego que também desenvolveu estudos na área da geometria. Ele utilizou o princípio do caminho mínimo para explicar a reflexão em espelhos planos e curvos.

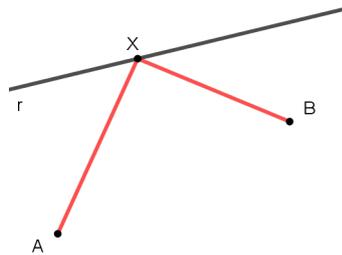
Em um de seus problemas Heron considerou dada uma reta r no plano, e os pontos distintos A e B pertencentes a um mesmo semiplano determinado por r , de tal forma que não exista nenhuma reta perpendicular a r que contenha exatamente esses dois pontos. Em seguida, determinou um ponto X pertencente a r tal que a soma $AX + XB$ fosse a menor possível (figura 38).

Uma solução desse problema é feita usando reflexões em torno da reta r .

Considere a reflexão do ponto B em torno de r determinando seu simétrico B' (figura 39). Trace agora o segmento AB' . O ponto X é a intersecção de AB' com a reta r .

¹ Esse matemático viveu cerca de 65 anos. Não se sabe ao certo o ano de nascimento e de morte do geômetra, mas acredita-se que ele viveu entre 126 A.C e 60 A.C.

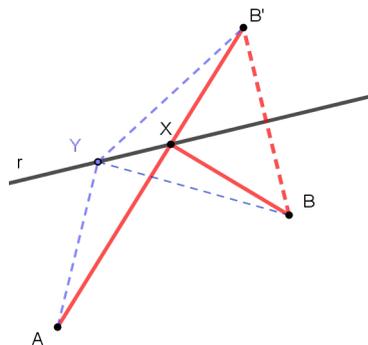
Figura 38 – Reflexão de Heron I



Fonte: autor

Como a reta r é mediatriz do segmento BB' , o triângulo BXB' é isósceles e os lados BX e $B'X$ são congruentes. Daí, temos que $AX + XB = AX + XB'$. Por último, considere um ponto Y , em r distinto de X . Note que $AY + YB = AY + YB'$. Mas, pela desigualdade triangular $AY + YB' > AB' = AX + XB' = AX + XB$. Logo $AY + YB > AX + XB$, pois A , X e B são pontos alinhados (pertencem ao segmento AB').

Figura 39 – Reflexão de Heron II



Fonte: autor

O problema de Heron apresenta outros desdobramentos, inclusive, foi usado por outro matemático chamado *Lipót Fejer*² para resolver um outro problema de otimização que apresentaremos a seguir.

2.2.2 O problema de Fagnano

Giulio Carlo Fagnano dei Toschi³ foi responsável por provar que as alturas de um triângulo são as bissetrizes de um triângulo órtico (Proposição 2.7). Mais tarde, um de seus problemas que consiste em **determinar qual o triângulo de perímetro mínimo que pode ser inscrito em um triângulo acutângulo**, ficou conhecido como: "*o problema*

² Matemático Húngaro nascido em fevereiro de 1880 e morreu em outubro de 1959

³ Importante matemático italiano que nasceu em janeiro de 1682 e morreu em 1766.

de Fagnano". Ele mostrou que tal problema tinha solução, mas foi o seu filho Giovanni Francesco Fagnano⁴ que completou a demonstração.

O triângulo órtico, além das propriedades abordadas na seção anterior, ganha mais um destaque, pois ele é a solução ao problema de Fagnano.

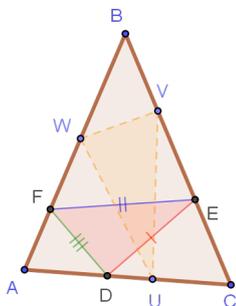
Teorema 2.10. (O problema de Fagnano) *O triângulo de menor perímetro que pode ser inscrito em um triângulo acutângulo é o triângulo órtico.*

Existem duas demonstrações conhecidas para esse teorema. Uma feita por Schwarz⁵ e outra por Fejér. Aqui faremos apenas a demonstração de Schwarz devido à riqueza de detalhes, bem como os métodos empregados que serão usados para uma demonstração equivalente no capítulo dos quadriláteros órticos.

Demonstração. (Demonstração Schwarz)

Considere o triângulo acutângulo ABC e seu respectivo triângulo órtico DEF , bem como um triângulo UVW qualquer, também inscrito no triângulo ABC (figura 40).

Figura 40 – Reflexões do triângulo órtico I



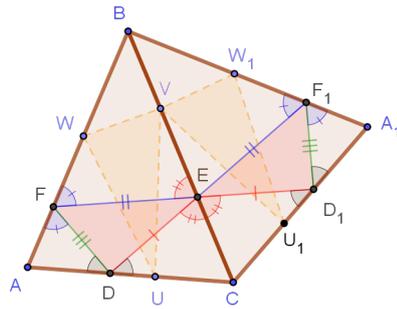
Fonte: autor

Pela proposição 2.9, temos os ângulos $\angle AFD \equiv \angle BFE$, $\angle ADF \equiv \angle CDE$ e $\angle CED \equiv \angle BEF$. Fazendo a reflexão do triângulo ABC e de seus respectivos triângulos inscritos, em torno de BC , obtemos o triângulo A_1BC e seus respectivos triângulos inscritos D_1EF_1 e U_1VW_1 (figura 41). Como os ângulos são preservados nas reflexões, temos $\angle BEF \equiv \angle CED_1$. Daí, garantimos que os pontos F , E e D_1 estão alinhados.

Figura 41 – Reflexões do triângulo órtico II

⁴ Matemático Italiano nascido em 1715 e morreu em 1797.

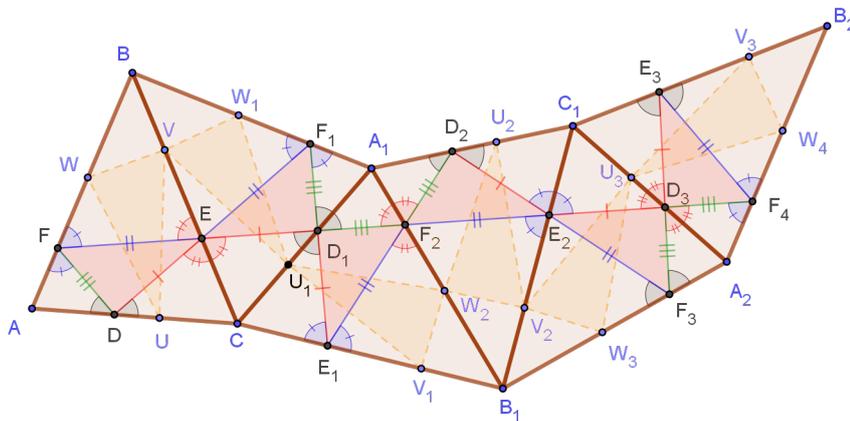
⁵ O matemático alemão Hermann Amandus Schwarz nascido em 1843 e morreu em 1921.



Fonte: autor

Agora, façamos a reflexão do triângulo A_1BC e de seus respectivos triângulos inscritos em torno de A_1C . Usando o argumento anterior, temos a congruência dos ângulos $\angle CD_1E$ e $\angle A_1D_1F_2$. Com isso, temos que os pontos E, D_1 e F_2 , estão alinhados. Em seguida, façamos sucessivas reflexões em torno de A_1B_1, B_1C_1 e A_2C_1 , respectivamente (figura 42), obtendo, ao todo, seis triângulos congruentes juntamente com seus respectivos triângulos inscritos. Por argumentos análogos, temos que os pontos F, E, D_1, F_2, E_2, D_3 e F_4 estão alinhados. Note que, após todas as reflexões, temos os ângulos alternos internos $\angle BFE \equiv \angle A_2F_4D_3$. Portanto, temos $AB \parallel A_2B_2$.

Figura 42 – Reflexões do triângulo órtico III



Fonte: autor

Como F é levado em F_4 pelas reflexões, assim como W é levado em W_4 , e $FW = F_4W_4$ (pois as distâncias são preservadas nas reflexões), a proposição 1.4(iv), garante que FWW_4F_4 é um paralelogramo. Resulta desse fato que FF_4 é paralelo e congruente a WW_4 (figura 43).

Note que $FF_4 = WW_4$ é um segmento cuja medida é o dobro da medida do perímetro do triângulo órtico (pelo alinhamento dos pontos F, E, D_1, F_2, E_2, D_3 e F_4), enquanto a linha poligonal aberta $(WVU_1W_2V_2U_3W_4)$ tem medida igual a dobro

3 Quadriláteros órticos e suas propriedades

Após o estudo dos triângulos órtico (Capítulo 2), vamos estender os conceitos e ideias adquiridos para o estudo dos quadriláteros.

A geometria é uma área da matemática que teve os seus primeiros estudos a muitos séculos. O seu desenvolvimento iniciou de forma descentralizada (em diferentes lugares do mundo) por volta do século VI a.c., com matemáticos como Tales de Mileto, Pitágoras e Euclides. Esse último, desenvolveu estudos que são suportes para a geometria básica até os dias atuais. Em seu famoso livro "*os elementos*", mostrou seus postulados em geometria que até hoje levam seu nome.

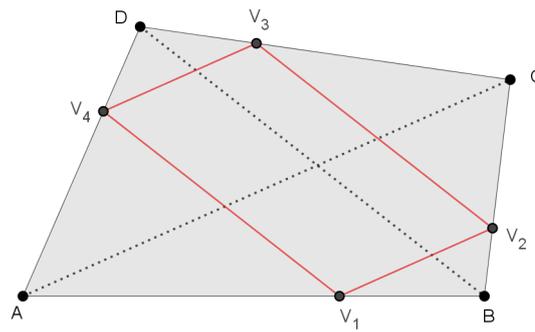
Apesar da geometria básica ser resultado de estudo de muitos séculos, ainda hoje é possível desenvolver trabalhos nessa área. Nesse capítulo vamos mostrar alguns estudos recentes sobre quadriláteros, e em particular, dos quadriláteros órticos. Endossando ainda mais esse tema, podemos fazer uma comparação cronológica entre os assuntos de triângulos órticos apresentados no Capítulo 2 e os de quadriláteros órticos que será explicitado nesse capítulo. Alguns estudos sobre triângulos órticos foram desenvolvidos por volta do séculos XIX d.c. por Fagnano e Schawarz, etc. Já o estudo dos quadriláteros órticos, estão documentados do ano de 2003, ou seja, das últimas décadas. Isso mostra que a geometria básica não é limitada, e que ainda pode ser explorada, pois suas ramificações são ilimitadas.

Estamos tomando como referência para esses estudos os artigo (4) e (6).

3.1 O V-paralelogramo

Definição 3.1. Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer. Escolhendo sobre o lado AB um ponto V_1 (distinto de A e B) e traçando a partir desse ponto uma reta paralela à diagonal AC , determinamos sobre o lado BC um ponto V_2 . A partir de V_2 , traçamos uma nova paralela à diagonal BD cuja intersecção com o lado CD determina o ponto V_3 . Por fim, a partir de V_3 trace uma paralela à diagonal AC e determine sobre o lado AD um ponto V_4 . Com isso, obtemos quadrilátero $V_1V_2V_3V_4$ (figura 44).

Figura 44 – Quadrilátero $V_1V_2V_3V_4$



Autor

A proposição a seguir mostra o quadrilátero $V_1V_2V_3V_4$ da Definição 3.1 sempre é um paralelogramo, e o denotamos por V-paralelogramo de $ABCD$.

Proposição 3.2. *Dado um quadrilátero $ABCD$ qualquer, o quadrilátero $V_1V_2V_3V_4$ obtido a partir de $ABCD$ é sempre um paralelogramo.*

Demonstração. Considere um quadrilátero $ABCD$ qualquer (convexo, côncavo ou cruzado), e o quadrilátero $V_1V_2V_3V_4$ construído conforme a Definição 3.1. Por construção temos os segmentos $V_1V_2 \parallel V_4V_3$, pois são segmentos paralelos à diagonal AC , e ainda assim $V_2V_3 \parallel BD$. Basta concluir que $V_1V_4 \parallel DB$. De fato, como V_1V_2 é paralelo a AC , pela semelhança dos triângulos ABC e V_1BV_2 , temos

$$\frac{V_1B}{V_1A} = \frac{V_2B}{V_2C}. \quad (3.1)$$

Analogamente, temos

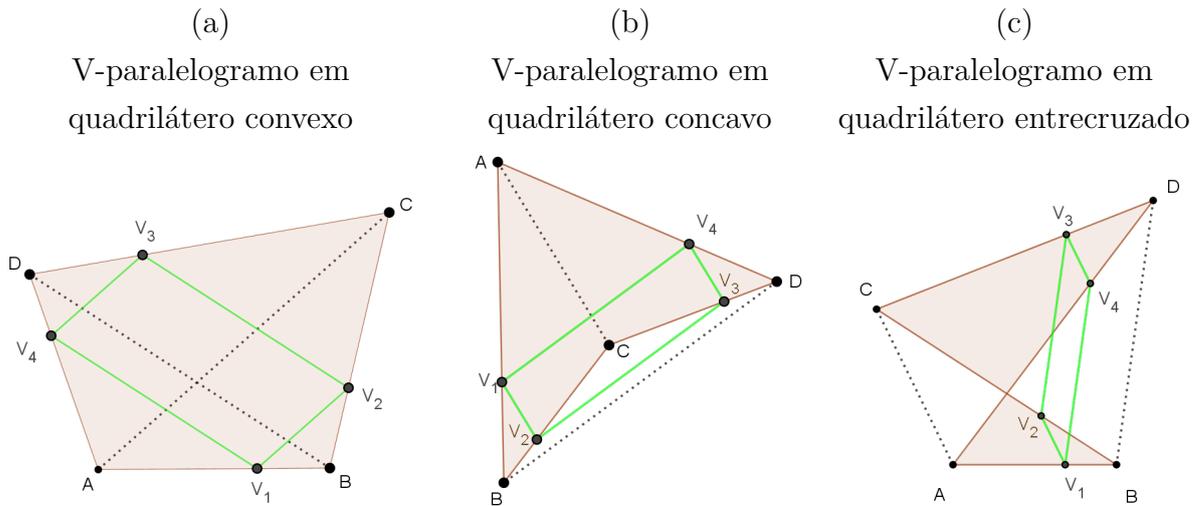
$$\frac{V_2B}{V_2C} = \frac{V_3D}{V_3C}. \quad (3.2)$$

$$\frac{V_3D}{V_3C} = \frac{V_4D}{V_4A}. \quad (3.3)$$

Note que a igualdade (3.1) é equivalente a (3.2), e essa por sua vez, equivalente a (3.3). Por transitividade, temos que a razão com que V_1 divide AB , é a mesma razão com que V_4 divide AD . Além disso, o ângulo $\angle A$ é contante nos triângulos AV_1V_4 e ABD . Daí, temos $V_1V_4 \parallel BD$. Como esse quadrilátero tem dois pares de lados opostos paralelos, ele é um paralelogramo.

□

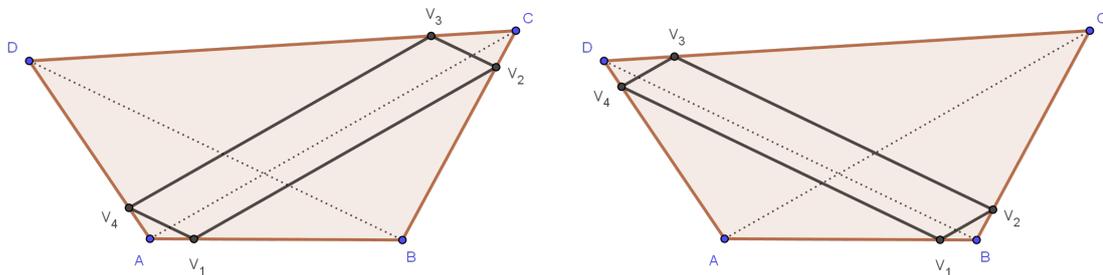
As figuras a seguir mostram os V-paralelogramos para os casos onde o quadrilátero $ABCD$ é convexo, concavo e entrecruzado, respectivamente. Para o paralelogramo reverso, também é possível obter o V-paralelogramo conforme a Definição 3.1.



Fonte: Autor

Observação 3.3. O V-paralelogramo foi construído a partir da escolha de V_1 . Se fizermos o ponto V_1 deslocar-se ao longo do segmento AB , iremos obter todos os possíveis V-paralelogramos do quadrilátero $ABCD$, ou seja, existem infinitos V-paralelogramos em um quadrilátero qualquer (figura 45).

Figura 45 – Variações do V-paralelogramo



fonte: Autor

3.2 O paralelogramo de Varignon ou M-paralelogramo

O que acontece quando um dos vértices desse V-paralelogramo é o ponto médio do lado ao qual está contido? A proposição a seguir nos mostra que, nesse caso, todos os outros vértices também serão os pontos médios de seus respectivos lados.

Proposição 3.4. *Quando o vértice V_1 é o ponto médio do lado AB os outros vértices do V-Paralelogramo também serão o ponto médio dos seus respectivos lados, isto é, $V_i = M_i$ para $i = 1, 2, 3$ ou 4 .*

Demonstração. Esse resultado não é difícil de ser visto. Para mostrá-lo, vamos tomar como base o quadrilátero da figura 46 e usar o teorema da base média (Teorema 1.7).

No triângulo ABC , temos $V_1 = M_1$ o ponto médio de AB , e o segmento M_1M_2 é, por construção, paralelo a AC . Sendo assim, pelo teorema da base média, é necessário que $M_2 = V_2$, ponto médio de BC . Fazemos o procedimento análogo, concluiremos que M_3 e M_4 são ponto médio dos lados CD e AD , respectivamente.

□

Observação 3.5. (Paralelogramo de Varignon) Quando o V-paralelogramo for obtido a partir dos pontos médio de seus respectivos lados, tal paralelogramo é chamado de **paralelogramo de Varignon** ou **M-paralelogramo**.

Sobre o paralelogramo de Varignon obtido a partir de um quadrilátero simples, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.6. *Dado um quadrilátero $ABCD$ simples, convexo ou concavo, são válidas as seguintes afirmações:*

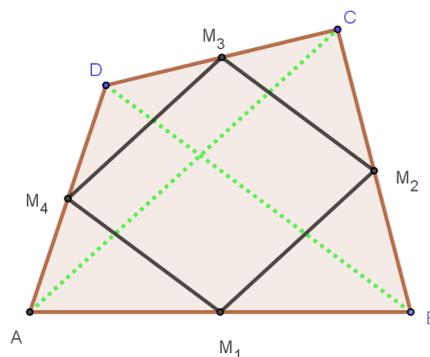
(i) *A área do paralelogramo de Varignon de $ABCD$ tem medida igual à metade da área do quadrilátero.*

(ii) *O perímetro do paralelogramo de Varignon de $ABCD$ tem medida igual à soma das medidas das diagonais do quadrilátero.*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em dois caso: quando $ABCD$ é convexo e quando $ABCD$ é concavo. Faremos agora o caso convexo.

Inicialmente demonstraremos (i). Considere o quadrilátero $ABCD$ cujo paralelogramo de Varignon, $M_1M_2M_3M_4$, associado a $ABCD$ está construído conforme na figura 46.

Figura 46 – M-paralelogramo



fonte: Autor

Considerando o triângulo ABC . A área desse triângulo pode ser expressa por

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{B}.$$

Pela definição de ponto médio, temos

$$M_1B = \frac{1}{2}AB \quad (3.4)$$

$$BM_2 = \frac{1}{2}BC. \quad (3.5)$$

Sabendo disso, podemos expressar a área do triângulo M_1BM_2 por

$$[M_1BM_2] = \frac{1}{2} \cdot M_1B \cdot BM_2 \cdot \sin \widehat{B}.$$

Aplicando as igualdades (3.4) e (3.5) nessa última igualdade, temos

$$[M_1BM_2] = \frac{1}{2} \cdot M_1B \cdot BM_2 \cdot \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AB\right) \cdot \left(\frac{1}{2}BC\right) \cdot \sin \widehat{B} = \frac{1}{8} \cdot (AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{B})$$

Com isso, concluímos que

$$[M_1BM_2] = \frac{1}{4}[ABC]$$

Analogamente, temos

$$[M_2CM_3] = \frac{1}{4}[BCD]$$

$$[M_3DM_4] = \frac{1}{4}[ACD]$$

$$[M_4AM_1] = \frac{1}{4}[ABD]$$

Perceba ainda que

$$[M_1BM_2] + [M_3DM_4] = \frac{1}{4}([ABC] + [ACD])$$

$$[M_1BM_2] + [M_3DM_4] = \frac{1}{4}[ABCD] \quad (3.6)$$

Analogamente, temos

$$[M_2CM_3] + [M_4AM_1] = \frac{1}{4}([BCD] + [ABD])$$

$$[M_2CM_3] + [M_4AM_1] = \frac{1}{4}[ABCD]. \quad (3.7)$$

Por (3.6) e (3.7), conclui-se

$$[M_1BM_2] + [M_2CM_3] + [M_3DM_4] + [M_4AM_1] = \frac{1}{2}[ABCD]$$

Para provar a parte (ii), vamos usar o Teorema 1.7. Já sabendo que

$$M_1M_2 = \frac{1}{2}AC = M_3M_4$$

e

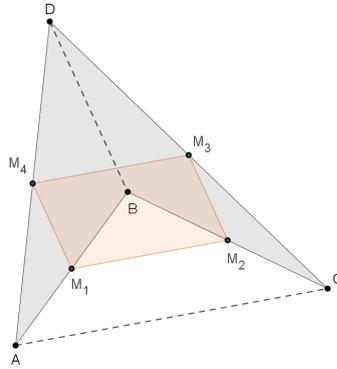
$$M_2M_3 = \frac{1}{2}BD = M_1M_4.$$

A expressão do perímetro do paralelogramo de Varignon, é

$$M_1M_2 + M_2M_3 + M_3M_4 + M_4M_1 = \frac{1}{2}(2AC + 2BD) = AB + AC$$

Faremos agora a demonstração para o caso que $ABCD$ é concavo (figura 47). Parte (i)

Figura 47 – Quadrilátero Concavo



Fonte: Autor

Percebemos que a área do paralelogramo de Varignon pode ser expressa por:

$$[M_1M_2M_3M_4] = [ADC] - [M_1AM_4] - [M_3DM_4] - [M_2CM_3] - [AM_1M_2C]. \quad (3.8)$$

Fazendo o uso do Teorema 1.7, percebemos que

$$[M_1AM_4] = \frac{1}{4}[ABD]$$

$$[M_3DM_4] = \frac{1}{4}[ADC]$$

$$[M_2CM_3] = \frac{1}{4}[BCD]$$

$$[AM_1M_2C] = \frac{3}{4}[ABC]$$

Substituindo as igualdades acima, na igualdade (3.8), temos

$$[M_1M_2M_3M_4] = [ADC] - \frac{1}{4}[ABD] - \frac{1}{4}[ADC] - \frac{1}{4}[BCD] - \frac{3}{4}[ABC]$$

$$[M_1M_2M_3M_4] = \frac{3}{4}[ADC] - \frac{1}{4}[ABD] - \frac{1}{4}[BCD] - \frac{3}{4}[ABC]$$

$$[M_1M_2M_3M_4] = \frac{1}{4}(3[ADC] - [ABD] - [BCD] - 3[ABC])$$

$$[M_1M_2M_3M_4] = \frac{1}{4}(3([ADC] - [ABC]) - ([ABD] + [BCD]))$$

$$[M_1M_2M_3M_4] = \frac{1}{4}(3([ABCD]) - ([ABCD]))$$

$$[M_1M_2M_3M_4] = \frac{1}{4}(2[ABCD])$$

$$[M_1M_2M_3M_4] = \frac{1}{2}[ABCD]$$

Parte (ii)

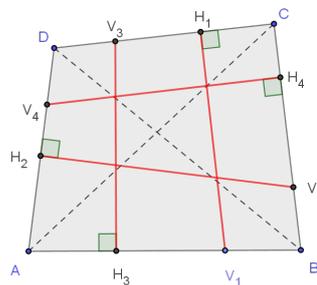
Essa etapa é análoga a demonstração da parte (ii) para caso em que $ABCD$ é convexo.

□

3.3 V-alturas e alturas médias de um quadrilátero simples

Considere um V-paralelogramo de um quadrilátero $ABCD$ convexo, conforme a Definição 3.1. Chamemos de H_i , ao ponto de intersecção entre a perpendicular baixada de V_i sobre o lado oposto ao que contém V_i (figura 48). Cada segmento V_iH_i , onde $i = 1, 2, 3$ e 4 , será chamado de **V-altura** de $ABCD$. Se as alturas estiverem associadas ao paralelogramo de Varignon, denotaremos por **altura média** de $ABCD$ ou **M-altura**.

Figura 48 – Alturas Relativas aos pontos V_i

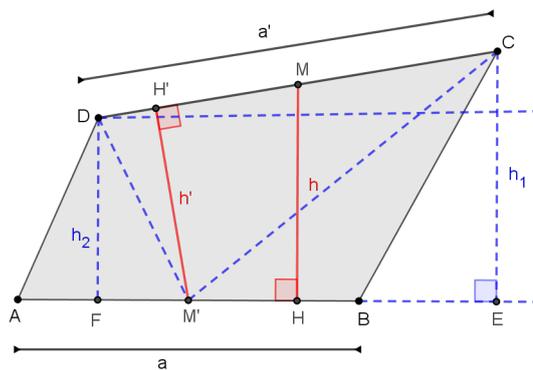


fonte: Autor

A proposição a seguir mostra como obter a área de um quadrilátero convexo em função de sua altura média.

Proposição 3.7. *Dado um quadrilátero convexo qualquer, a área dele é igual à metade da soma do produto de dois lados opostos pela suas respectivas M-alturas.*

Figura 49 – M-alturas e área



fonte: Autor

Demonstração. Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo, AB e CD lados opostos de $ABCD$, M e M' os pontos médio desses lados, respectivamente. Considere também $MH = h$ a M-altura relativa ao lado AB , $M'H' = h'$ a M-altura relativa ao lado CD , $AB = a$ e $CD = a'$. Por fim, sejam $CE = h_1$ e $DF = h_2$ as perpendiculares baixada dos respectivos pontos C e D sobre o lado AB (figura 49).

O resultado ao qual queremos concluir é

$$[ABCD] = \frac{ah + a'h'}{2}.$$

A área do quadrilátero $ABCD$ pode ser expressa pela soma das áreas dos triângulos ADM' , $DM'C$ e $M'CB$.

$$[ABCD] = [ADM'] + [DM'C] + [M'CB]$$

$$[ABCD] = \frac{1}{2}a h_2 + \frac{1}{2}a'h' + \frac{1}{2}a h_1$$

$$[ABCD] = \frac{1}{2}a \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) + \frac{1}{2}a'h' \quad (3.9)$$

Entretanto, como DF e CE são paralelos (pois são perpendiculares a FE), pelo teorema de Tales segue:

$$\frac{DM}{MC} = \frac{FH}{HE}.$$

Sendo M o ponto médio de DC , temos $FH = HE$, ou seja, H é o ponto médio de FE (proposição 1.9). Logo, no trapézio retângulo $ECDF$, temos que MH é sua base média, ou ainda,

$$MH = h = \frac{h_1 + h_2}{2}. \quad (3.10)$$

Substituindo a equação 3.10 em 3.9, chegamos que a área de $ABCD$ é equivalente a

$$[ABCD] = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}a'h' = \frac{ah + a'h'}{2}$$

□

Não é difícil perceber que a área de um trapézio é um caso particular do Proposição 3.7. Basta tomar $AB \parallel CD$ e notar que $h = h'$.

Um outro caso ocorre se os lados opostos AB e CD possuírem medidas congruentes, isso é, $a = a'$, a área desse quadrilátero convexo será dada pelo produto da base pela média da soma das M-alturas.

$$[ABCD] = a \frac{h + h'}{2}$$

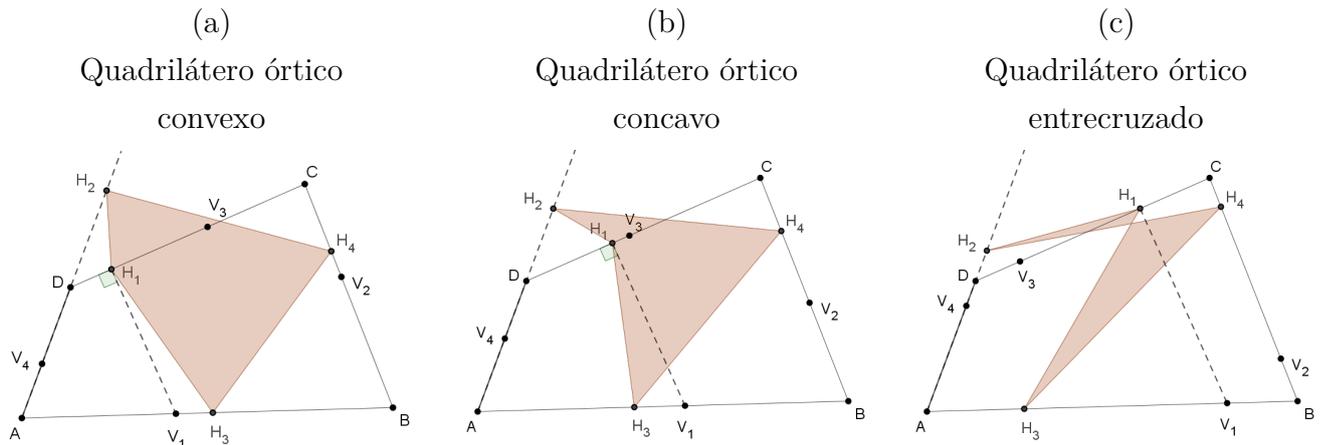
3.4 Quadriláteros órticos

Definição 3.8. Chamamos de quadrilátero órtico de um quadrilátero convexo $ABCD$, ao quadrilátero formado pelos pés das V-alturas. O denotamos por Q_o .

Definição 3.9. (Quadrilátero órtico principal) Chamamos de quadrilátero órtico principal de um quadrilátero convexo $ABCD$, ao quadrilátero formado pelos pés das alturas médias. O denotamos por Q_{op} .

Observação 3.10. Como cada V-altura está associada ao V-paralelogramo, e esses são infinitos, pois dependem da escolha de V_1 , as V-alturas também variam. Consequentemente, existem infinitos quadriláteros órticos associados a $ABCD$.

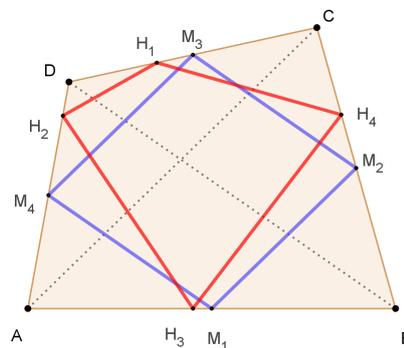
As figuras a seguir, mostram que os quadriláteros órticos de $ABCD$ podem ser convexo, concavo ou entrecruzado.



Fonte: Autor

Observação 3.11. O quadrilátero órtico de um quadrilátero $ABCD$ convexo, nem sempre será inscrito no quadrilátero $ABCD$. Por exemplo, em nenhuma das figuras (a), (b) e (c) acima, o quadrilátero órtico de $ABCD$ é inscrito em $ABCD$. O contrário ocorre na figura 50, onde o quadrilátero órtico (em vermelho) de $ABCD$ está inscrito em $ABCD$.

Figura 50 – Quadrilátero órtico Principal



fonte: Autor

Observação 3.12. Nessa figura o quadrilátero órtico principal Q_{op} , está representado na cor vermelha, enquanto o paralelogramo de Varignon está representado na cor azul.

Os resultados a seguir são válidos apenas para quadriláteros convexos.

3.5 Pontos notáveis de um quadrilátero

Definição 3.13. (Circuncentro) O circuncentro de um quadrilátero cíclico $ABCD$, é o ponto de encontro das mediatrizes relativas a cada lado.

A Proposição 1.15, garante que o circuncentro está definido.

Observação 3.14. Há uma semelhança entre o circuncentro de triângulos e o de quadriláteros. Ambos são determinados pelo ponto comum das mediatrizes relativas aos lados do polígono, e tal ponto é centro de uma circunferência circunscrita a esse polígono. Para garantir a existência do circuncentro para os quadriláteros, é necessário que o mesmo seja cíclico. Já para triângulos, o circuncentro sempre existe.

Denotaremos o circuncentro de um quadrilátero por \mathbf{O} .

Definição 3.15. (Centróide) O centróide de um quadrilátero é o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo de Varignon.

Denotaremos o centróide de um quadrilátero por \mathbf{V} .

Definição 3.16. (Anticentro) Anticentro de um quadrilátero cíclico é o ponto de encontro das alturas médias.

Observação 3.17. Pela definição o anticentro está definido para quadriláteros cíclicos. O Teorema 3.22, garante a existência deste ponto.

Denotaremos o anticentro de um quadrilátero cíclico por \mathbf{T} .

Definição 3.18. (Incentro) O incentro de um quadrilátero convexo $ABCD$ é o ponto comum das bissetrizes internas dos ângulo de $ABCD$ e é centro da circunferência inscrita em $ABCD$.

Observação 3.19. A Proposição 1.18 garante a existência do incentro quando o quadrilátero é circunscritível.

Denotaremos o incentro de um quadrilátero pela letra \mathbf{I} .

Definição 3.20. (Quadriláteros ortodiagonais) Um quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares é chamado de **ortodiagonal** ou **pseudolosango**.

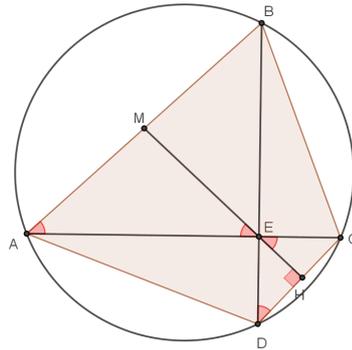
O teorema a seguir é atribuído ao matemático Brahmagupta¹. Sua demonstração está relacionada com um dos pontos notáveis (o anticentro) e usa a hipótese do quadrilátero ser ortodiagonal.

Teorema 3.21. (*Teorema de Brahmagupta*) *Em qualquer quadrilátero cíclico e ortodiagonal, as alturas médias são concorrentes no ponto de encontro das diagonais de quadrilátero.*

Demonstração. Considere um quadrilátero $ABCD$ cíclico e ortodiagonal, tal que E seja o ponto de encontro das diagonais, M o ponto médio de AB e H um ponto de CD (lado oposto a AB), de maneira que EH seja perpendicular a CD (figura 51). Vamos mostrar que os pontos M , E e H estão alinhados, isso é, MH é uma altura média do quadrilátero.

¹ Matemático e astrônomo indiano, nasceu no ano de 598 e faleceu no ano de 668. Desenvolveu trabalhos em geometria, álgebra e aritmética.

Figura 51 – Quadrilátero Inscritível



fonte: Autor

Pelo teorema 1 da mediana relativa à hipotenusa, temos no triângulo retângulo ABE que $AM = ME = MB$ e $\angle MEA \equiv \angle EAM$. Por sua vez $\angle BAC$ é um ângulo inscrito relativo ao arco BC , assim como $\angle BDC$. Isso nos leva a concluir que

$$\angle BDC \equiv \angle BAC.$$

É possível perceber também que os triângulos DEC e DEH são semelhantes pelo caso AA , pois $\angle EDC \equiv \angle EDH$ (são comuns) e $\angle DHE$ e $\angle DEC$ são retos. Daí, decorre que

$$\angle EDH \equiv \angle HEC.$$

Por fim, como $\angle AEM \equiv \angle HEC$, chegamos a conclusão que os segmentos ME e EH estão alinhados, e portanto MH é uma altura média.

Para mostrar o resultado para as outras alturas médias o procedimento é análogo.

□

É importante perguntar se as alturas médias são concorrentes nos casos em que o quadrilátero convexo não seja cíclico ou não seja ortodiagonal. Entretanto, Honsberger² provou em (2) um resultado mais geral acerca da concorrência das alturas médias, sem a necessidade do quadrilátero ser ortodiagonal, bastando apenas ser cíclico. Veremos que para o quadrilátero possuir as alturas médias concorrentes, é uma condição necessária e suficiente que esse seja cíclico. Além disso, provaremos que nos quadriláteros cíclicos o circuncentro (\mathbf{O}) é sempre simétrico do anticentro (\mathbf{T}) em relação ao centróide (\mathbf{V}).

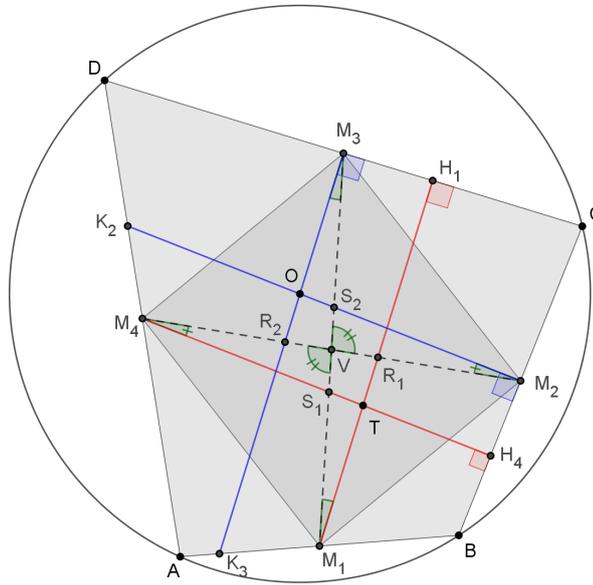
Teorema 3.22. *As alturas médias de um quadrilátero convexo $ABCD$ são concorrentes se, e somente se o quadrilátero $ABCD$ for cíclico.*

Demonstração. Vamos considerar as alturas médias M_1H_1 e M_4H_4 , respectivamente relativas aos lados CD e BC do quadrilátero convexo $ABCD$ (figura 52). Em seguida, tracemos

² Matemático canadense, viveu entre os anos de 1929 e 2016. Escreveu vários livros sobre matemática elementar e matemática recreativa.

as mediatrizes de BC e CD , e determinamos os seguintes segmentos M_2K_2 e M_3K_3 , tal que os pontos K_2 e K_3 são as interseções dessas mediatrizes com o lado oposto.

Figura 52 – Anticentro, circuncentro e centróide



fonte: Autor

Chamemos de T ao ponto de encontro das referidas M -alturas e O ao ponto de encontro das referidas mediatrizes.

Observando os segmentos paralelos M_1H_1 e M_3K_3 , o segmento M_2M_4 (transversal a tais paralelas), determinam-se respectivamente os pontos de intersecção R_1 e R_2 . Analogamente, nos segmentos paralelos M_4H_4 e M_2K_2 , o segmento M_1M_3 (transversal a tais paralelas), determinam-se respectivamente os pontos de intersecção S_1 e S_2 .

O segmento M_1M_3 e M_2M_4 , diagonais do paralelogramo de Varignon, são concorrentes no ponto V (Centróide). Desse fato, pelas propriedades dos paralelogramos, temos $M_1V = M_3V$ e $M_4V = M_2V$.

Note que os triângulos R_1M_1V e R_2M_3V são congruentes pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo), pois $\angle R_1M_1V \equiv \angle R_2M_3V$ (alternos internos), $M_1V = M_3V$ e $\angle R_1VM_1 \equiv \angle R_2VM_3$ (opostos pelo vértice). Analogamente, podemos perceber que os triângulos M_4S_1V e M_2S_2V também são congruentes pelo mesmo caso ALA, pois $\angle S_1M_4V \equiv \angle S_2M_2V$ (alternos internos), $M_2V \equiv M_4V$ e $\angle S_1VM_4 \equiv \angle S_2VM_2$ (opostos pelo vértice).

Tendo observado isso, realizando uma rotação 180° do plano, em torno do ponto V , percebemos que M_1 será transformado em M_3 e R_1 em R_2 , assim como M_2 em M_4 e S_1 em S_2 . Com isso, notamos que a reta M_1R_1 será transformada na reta M_3R_2 e vice-versa, ou seja, a reta que contém a altura média M_1H_1 será transformada na mediatriz M_3K_3 e vice-versa, bem como a reta M_4S_1 será transformada na reta M_2S_2 e vice-versa, ou seja, a

reta M_4H_4 será transformada na mediatriz M_2K_2 e vice-versa.

Essa rotação nos mostra que T , que é o ponto de concorrência das alturas médias de $ABCD$, está sendo transformado em O , que é o ponto de concorrência das mediatrizes de $ABCD$, e vice-versa. Assim mostramos que as alturas médias são concorrentes se, e somente se as mediatrizes forem concorrentes, ou seja, $ABCD$ é cíclico.

□

Do teorema acima, chegamos a conclusão do seguinte:

Corolário 3.23. *Em um quadrilátero $ABCD$ convexo e cíclico, o circuncentro \mathbf{O} é simétrico ao anticentro \mathbf{T} , em relação ao centróide \mathbf{V} .*

Vale destacar pelo corolário acima que os pontos \mathbf{O} , \mathbf{V} e \mathbf{T} estão alinhados, e a reta que contém esses três pontos é chamada de *reta de Euler*.

Observação 3.24. (Reta de Euler)

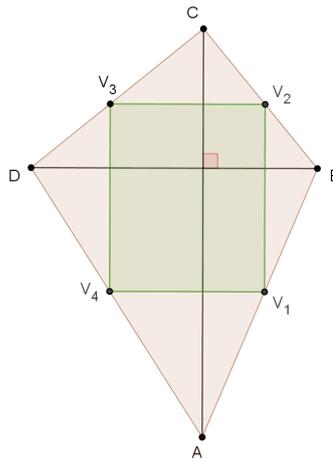
Nos triângulos, a reta de Euler é formada pelo baricentro (encontro das medianas), circuncentro (encontro das mediatrizes) e ortocentro (encontro das alturas relativas) (Proposição 1.20). Para os quadriláteros convexos e cíclicos, há uma semelhança em relação aos triângulos, pois nesse caso, a reta de Euler é determinada pelo circuncentro do quadrilátero (encontro das mediatrizes), o centróide (encontro das diagonais do paralelogramo de Varignon) e o anticentro (encontro das alturas médias).

3.6 Quadriláteros ortodiagonais

Nesta seção direcionaremos os estudos aos quadriláteros ortodiagonais.

Lema 3.25. *Seja $ABCD$ um quadrilátero ortodiagonal. Um par de V -alturas de $ABCD$ relativas a lados consecutivos são concorrentes em um ponto da diagonal que passa pelo vértice comum a tais lados.*

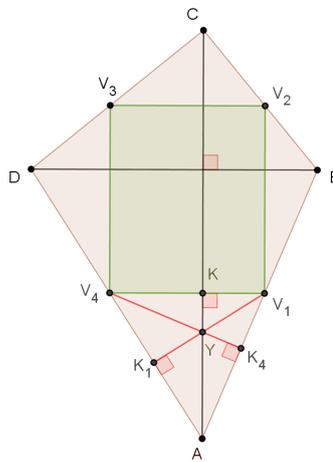
Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrilátero ortodiagonal, AC e BD suas diagonais e $V_1V_2V_3V_4$ um V -paralelogramo de $ABCD$, que é retângulo já que seus lados são paralelos às diagonais e essas são perpendiculares (figura 53).



fonte: Autor

Considere também o triângulo AV_1V_4 . Como $V_1V_4 \parallel BD$ (por definição) e só existe uma reta perpendicular a BD passando por A , a altura relativa ao vértice A do triângulo AV_1V_4 , está contido na diagonal AC , e K é o pé da perpendicular baixada de A sobre V_1V_4 . Traçando as outras alturas relativas V_1K_1 e V_4K_4 de AV_1V_4 , obtemos o ponto Y que é o ortocentro de AV_1V_4 e pertence a diagonal AC (figura 54).

Figura 54 – Quadrilátero ortodiagonal II

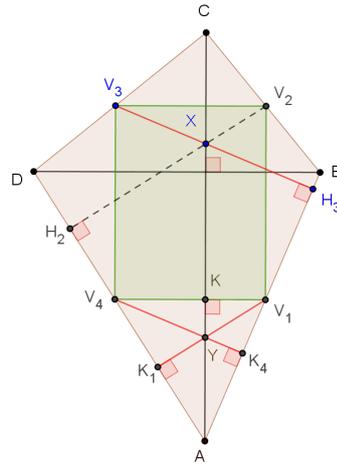


fonte: Autor

Tracemos agora a V -altura V_3H_3 , e chamemos de X ao ponto de intersecção dessa V -altura com a diagonal AC . Queremos mostrar que X também pertence a V -altura V_2H_2 , ou ainda, V_2 , X e H_2 são colineares (figura 55).

Vejamos que V_3X está contido em V_3H_3 que é uma V -altura relativa ao lado AB . Por sua vez, V_4Y está contido em V_4K_4 que também é perpendicular ao lado AB . Dessa maneira, $V_3X \parallel V_4Y$. E por definição, $XY \parallel V_3V_4$, já que XY está contido na diagonal AC . Logo, pela Proposição 1.4(i), V_3XYV_4 é um paralelogramo.

Figura 55 – Quadrilátero ortodiagonal III



fonte: Autor

Note que $XY \parallel V_3V_4 \parallel V_1V_2$ pela definição de V-paralelogramo, e $XY = V_3V_4 = V_1V_2$ decorrente do paralelogramo V_3XYV_4 . Assim, pela Proposição 1.4(vi), V_1V_2XY também é um paralelogramo.

Considere agora a V-altura V_2H_2 . Note que $V_1K_1 \parallel V_2H_2$, pois ambas são perpendiculares ao lado AD , e V_1Y está contido em V_1K_1 . Como V_2X é paralela a V_1K_1 , temos que V_2X está contido em V_2H_2 , ou seja, os pontos V_2 , X e H_2 estão alinhados.

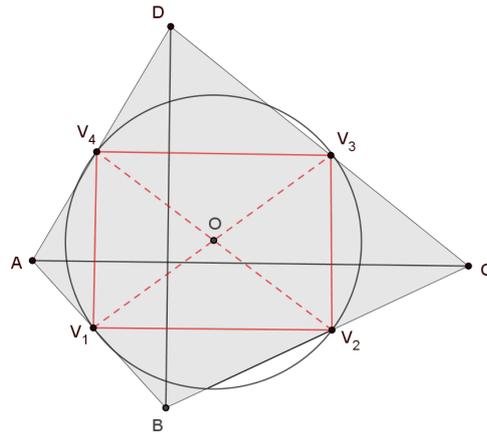
Para demonstrar para outras V-alturas relativas a lados consecutivos, o procedimento é análogo.

□

Teorema 3.26. *Sejam $ABCD$ um quadrilátero ortodiagonal, \mathbf{V} um V-paralelogramo de $ABCD$ e seja \mathbf{Q}_o o quadrilátero órtico de $ABCD$ associado a \mathbf{V} . Os vértices de \mathbf{V} e os de \mathbf{Q}_o pertencem a um mesmo círculo Γ .*

Demonstração. Sendo $ABCD$ um quadrilátero ortodiagonal, temos que \mathbf{V} é um retângulo, e por sua vez, existe um círculo Γ que contém seus vértices, cujo diâmetro mede $V_1V_3 = V_2V_4$ e possui centro no ponto O (figura 56).

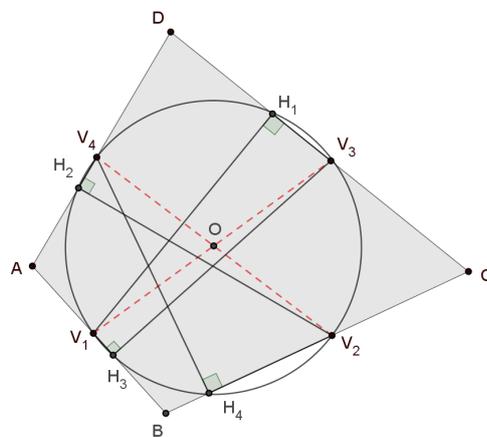
Figura 56 – Quadrilátero órtico e V-paralelogramo inscritos I



fonte: Autor

Para mostrar que os pés das V -alturas H_1, H_2, H_3 e H_4 , que determinam \mathbf{Q}_o associado a \mathbf{V} , também estão contidos no mesmo círculo Γ , note que os ângulos $\angle V_1H_1V_3$, $\angle V_2H_2V_4$, $\angle V_3H_3V_1$ e $\angle V_4H_4V_2$ são retos. Pela Proposição 1.11, os pontos H_1, H_2, H_3 e H_4 pertencem aos arcos capazes de 90° associados aos diâmetros V_1V_3 e V_2V_4 de Γ (figura 57).

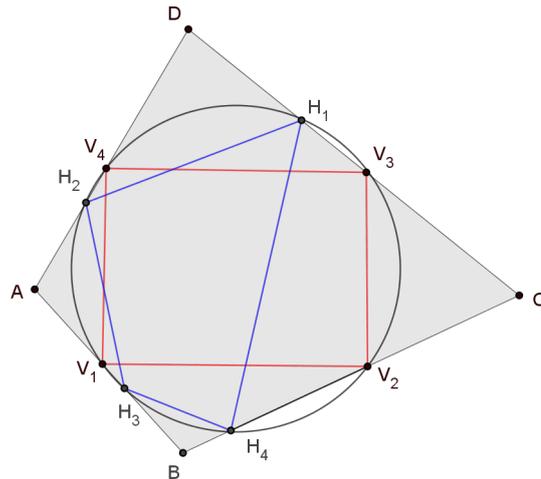
Figura 57 – Quadrilátero órtico e V -paralelogramo inscritos II



fonte: Autor

Logo podemos afirmar que \mathbf{V} (em vermelho) e \mathbf{Q}_o (em Azul) estão inscritos em Γ (figura 58).

Figura 58 – Quadrilátero órtico e V -paralelogramo inscritos III



fonte: Autor

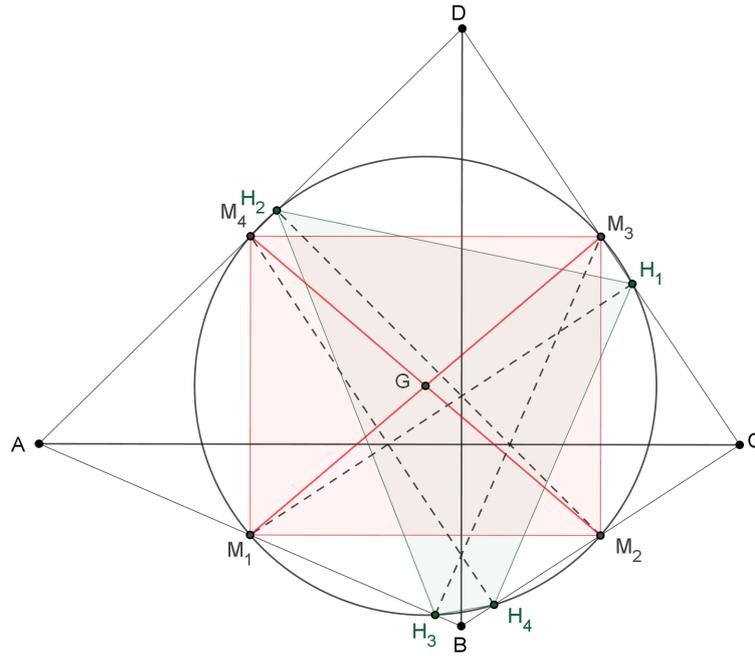
□

Observação 3.27. Se \mathbf{V} for o paralelogramo de Varignon, o círculo Γ é chamado de *círculo de oito pontos*. Vale lembrar que para os triângulos existe o círculo de nove pontos (proposição 1.21) que é determinado pelos pontos médios dos lados do triângulo dado e pelos pés das alturas desse triângulo. Para os quadriláteros convexo e ortodiagonal, temos o círculo de oito pontos que também é determinado pelos pés das alturas médias e pelos pontos médios dos lados do quadrilátero.

O próximo corolário é um resultado direto do Teorema 3.26.

Corolário 3.28. *Se $ABCD$ é um quadrilátero ortodiagonal, então todos os quadriláteros órticos de $ABCD$ são inscritíveis numa circunferência, em particular o quadrilátero órtico principal de $ABCD$.*

Figura 59 – Quadrilátero órtico e paralelogramo de Varignon inscritos



fonte: Autor

3.7 Quadriláteros órticos de um quadrilátero cíclico e ortodiagonal

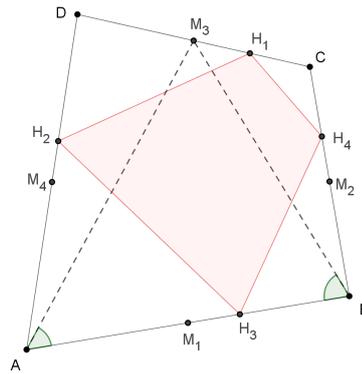
Continuaremos estudando os quadriláteros ortodiagonais, porém além disso, analisaremos os que também são cíclicos. Os resultados dessa seção são muito importantes, do ponto de vista dos quadriláteros órticos. Em vários momentos, faremos um paralelo entre o estudo dos triângulo órtico e dos quadriláteros órticos.

Os quadriláteros órticos de um quadrilátero dado, nem sempre são inscritíveis nesse quadrilátero. O teorema a seguir garante uma condição necessária e suficiente para o quadrilátero órtico principal de um quadrilátero dado ser inscritível.

Teorema 3.29. *O quadrilátero órtico principal Q_{op} de $ABCD$ é inscritível em $ABCD$ se, e somente se nos triângulos, formado por dois vértices consecutivos de $ABCD$ e o ponto médio do lado oposto ao que contém esses vértices, os ângulos internos adjacentes aos lados de $ABCD$ são agudos.*

Demonstração. Sejam $M_1M_2M_3M_4$ o paralelogramo de Varignon e $H_1H_2H_3H_4$ seu órtico principal inscritível em $ABCD$. Mostraremos que no triângulo ABM_3 , onde M_3 é ponto médio de CD , os ângulos adjacentes ao lado AB , $\angle M_3AB$ e $\angle M_3BA$ são agudos (figura 60).

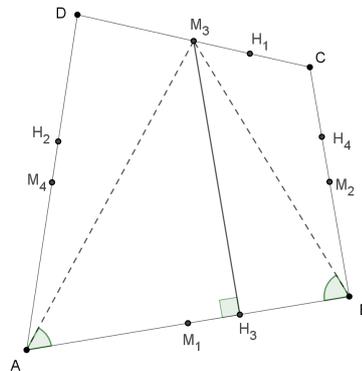
Figura 60 – Quadrilátero órtico principal inscritível I



fonte: Autor

Como M_3H_3 é uma altura média relativa ao lado AB , temos dois triângulos retângulos M_3AH_3 e M_3BH_3 , ambos retos em H_3 (figura 61). Nesses triângulos, conclui-se que $\angle M_3AH_3$ e $\angle M_3BH_3$ são obrigatoriamente agudos. Esse resultado é análogo para os triângulos BM_4C , CM_1D e AM_2D .

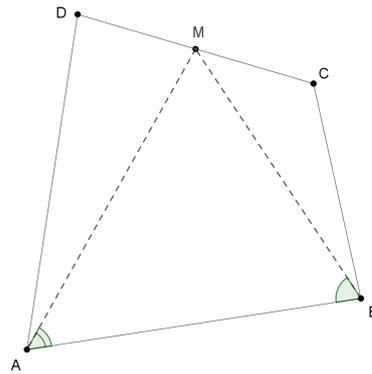
Figura 61 – Quadrilátero órtico principal inscrito II



fonte: Autor

Reciprocamente, consideremos um triângulo ABM inscrito em um quadrilátero $ABCD$, onde M é o ponto médio do lado oposto ao que contém os vértices A e B . Suponha que os ângulos $\angle MAB$ e $\angle MBA$ sejam agudos (figura 62).

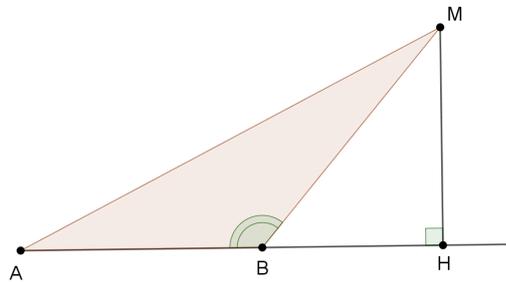
Figura 62 – Quadrilátero órtico principal inscrito III



fonte: Autor

Mostraremos que o pé da altura média baixada de M sobre o lado AB é interno a esse lado. Existem três possibilidades para o ponto H (pé dessa altura média): pertencer ao segmento AB , ser externo pertencendo a semirreta AB ou ser externo pertencendo a semirreta BA . Suponha por absurdo que o ponto H pertença a semirreta AB . Note que $\angle ABM$ é externo ao triângulo retângulo MBH (figura 63). Pelo teorema do ângulo externo, $\angle ABM$ deve ser obtuso. Absurdo! Analogamente para o caso que H é externo a AB e pertencente a semirreta BA . Portanto, Concluimos que o ponto H é interno a AB .

Figura 63 – Triângulo formado a partir da altura média



fonte: Autor

Os resultados para os triângulos relativos aos outros lados de $ABCD$, são análogos.

□

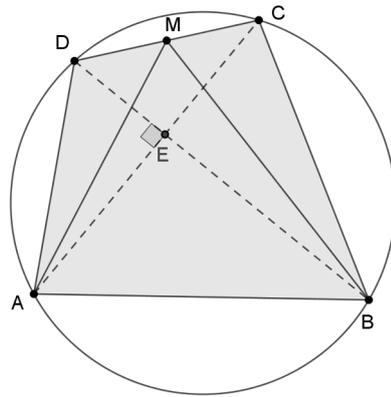
Corolário 3.30. *Se o quadrilátero $ABCD$ é cíclico e ortodiagonal, então seu órtico principal Q_{op} está inscrito em $ABCD$.*

Demonstração. Considere M o ponto médio do lado CD e E o ponto comum das diagonais de $ABCD$. Mostraremos que no triângulo AMB , os ângulos internos adjacentes ao lado AB são agudos (figura 64).

Consideremos o ângulo $\angle ABM$. A diagonal BD divide o ângulo $\angle ABM$ em $\angle ABD$ e $\angle DBM$. Note que

$$\angle ABD \equiv \angle ACD$$

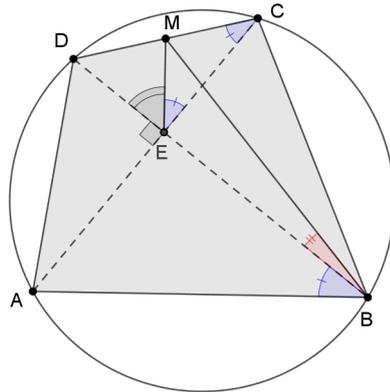
Figura 64 – Órtico principal inscriível em um quadrilátero cíclico I



fonte: Autor

por serem ângulos inscritos associados ao mesmo arco AD (figura 65).

Figura 65 – Órtico principal inscriível em um quadrilátero cíclico II



fonte: Autor

Por sua vez, do Teorema 1, temos no triângulo retângulo DEC

$$\angle ACD \equiv \angle MEC.$$

Pelo teorema do ângulo externo,

$$\angle DBM < \angle DEM \tag{3.11}$$

Por sua vez,

$$\angle DEM = 90^\circ - \angle MEC \tag{3.12}$$

Substituindo (3.12) em (3.11), obtemos

$$\angle DBM + \angle MEC = \angle ABM < 90^\circ$$

Esse resultado é análogo para $\angle BAM$, assim como para os outros triângulos formados por dois vértices consecutivos de $ABCD$ e o ponto médio do lado oposto ao que contém tais vértices. Logo pelo Teorema 3.29, o quadrilátero Q_{op} é inscrito em $ABCD$.

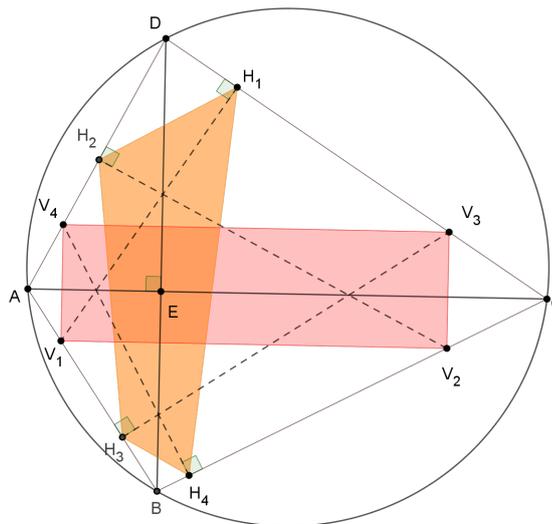
□

O teorema a seguir é uma extensão da Proposição 2.7, vista para triângulo órtico. Tal proposição diz que as alturas relativas de um triângulo acutângulo são bissetrizes internas do triângulo órtico. Sabemos que dado um triângulo, seu triângulo órtico associado, é único. Já para quadriláteros, existem infinitos quadriláteros órticos associados a um quadrilátero dado. Mesmo existindo infinitas V -alturas, o teorema a seguir mostra que, sob algumas condições, as V -alturas de um quadrilátero dado, são bissetrizes internas do quadrilátero órtico associado.

Teorema 3.31. *Sejam $ABCD$ um quadrilátero cíclico e ortodiagonal e Q_o um quadrilátero órtico de $ABCD$. Suponha Q_o inscrito em $ABCD$. As V -alturas que determinam Q_o são bissetrizes internas do mesmo.*

Demonstração. Sejam H_1, H_2, H_3 e H_4 vértices do quadrilátero órtico Q_o associado a um V -paralelogramo $V_1V_2V_3V_4$ de $ABCD$. Mostraremos que a V -altura V_1H_1 é bissetriz do ângulo interno $\angle H_2H_1H_4$ de Q_o (figura 66).

Figura 66 – Quadrilátero cíclico e ortodiagonal I



fonte: Autor

Como $ABCD$ é cíclico, temos

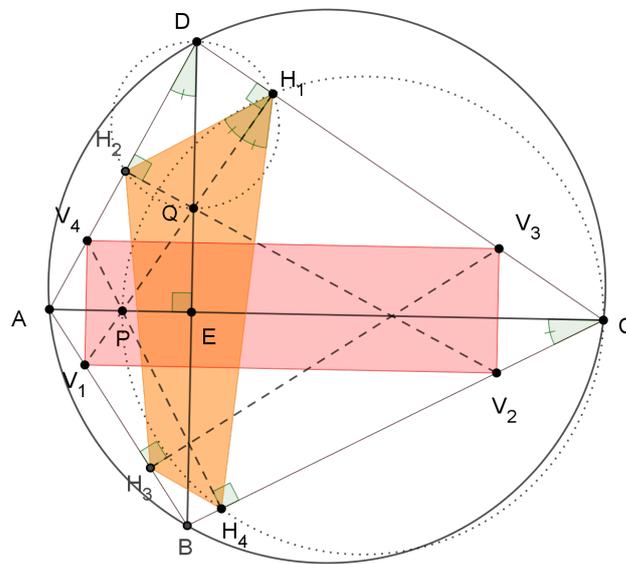
$$\angle ADB \equiv \angle ACB, \quad (3.13)$$

pois são inscritos associados ao mesmo arco AB . Chame de Q o ponto de intersecção das V-alturas V_1H_1 com V_2H_2 , e P o ponto de intersecção de das V-alturas V_1H_1 e V_4H_4 . Pelo Lema 3.25, Q pertence a BD e P pertence a AC . Note que o quadrilátero QH_1DH_2 é cíclico, pois possuem um par de lados de ângulos opostos suplementares (figura 67). Ainda no quadrilátero QH_1DH_2 , temos

$$\angle H_2DQ \equiv \angle H_2H_1Q,$$

pois são ângulos inscritos associados ao mesmo arco H_2D .

Figura 67 – Quadrilátero cíclico e ortodiagonal II



fonte: Autor

Analogamente para o quadrilátero CH_1PH_4 , temos

$$\angle PH_1H_4 \equiv \angle PCH_4.$$

As demonstrações para os outros ângulos internos de Q_o são análogas.

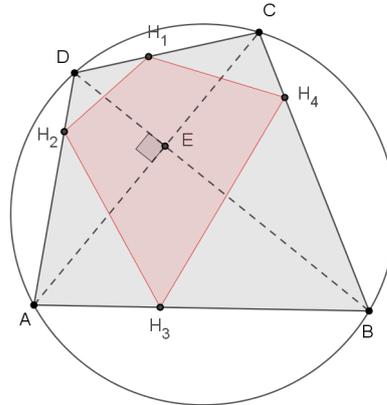
□

O corolário a seguir possui um resultado semelhante a Proposição 2.9 (aplicada a triângulos), porém para quadriláteros cíclicos e ortodiagonais. Vejamos.

Corolário 3.32. *Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico e ortodiagonal, e ainda $H_1H_2H_3H_4$ um de seus quadriláteros órtico inscrito em $ABCD$. Os ângulos formados entre o lado de $ABCD$ e os lados do quadrilátero órtico que concorrem nesse mesmo lado de $ABCD$ são congruentes.*

Demonstração. Considere o quadrilátero representado na figura (figura 68).

Figura 68 – Quadrilátero órtico principal circunscrito I

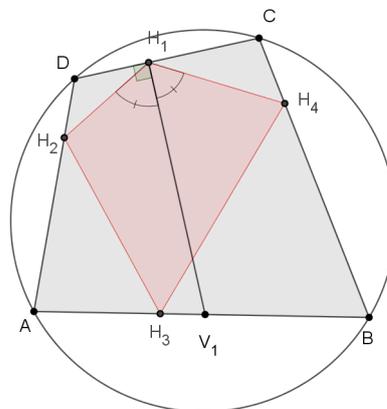


fonte: Autor

Pelo Teorema 3.31, a V-altura V_1H_1 é uma bissetriz interna do ângulo $\angle H_2H_1H_4$ (figura 69). Daí temos

$$\angle V_1H_1H_2 \equiv \angle V_1H_1H_4. \quad (3.14)$$

Figura 69 – Quadrilátero órtico principal circunscrito II

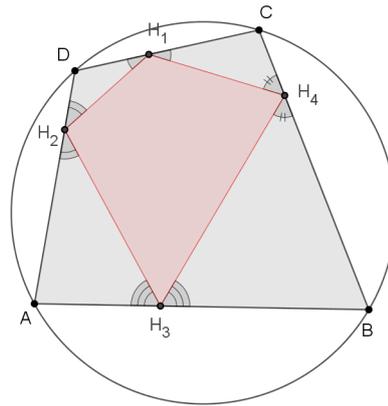


fonte: Autor

Note que $\angle CH_1H_4$ é o complementar de $\angle V_1H_1H_4$, assim como $\angle DH_1H_2$ é o complementar de $\angle V_1H_1H_2$. Pela igualdade 3.14, esses ângulos complementares $\angle CH_1H_4$ e $\angle DH_1H_2$ são congruentes.

Para os ângulos associados aos outros vértices de H_2 , H_3 e H_4 , o procedimento é análogo (figura 70).

Figura 70 – Quadrilátero órtico principal circunscrito III



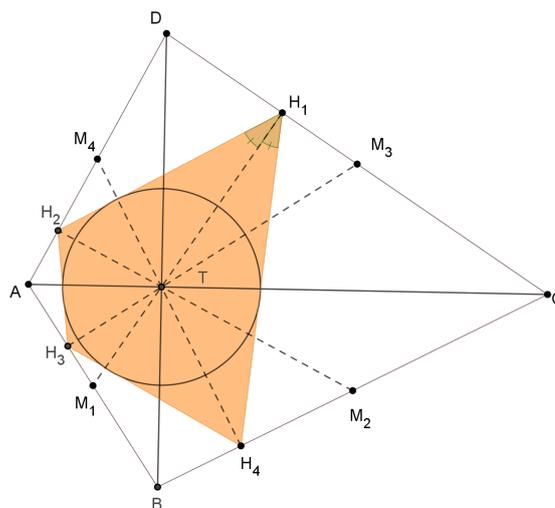
fonte: Autor

□

Corolário 3.33. *Se $ABCD$ é um quadrilátero cíclico e ortodiagonal, então o seu quadrilátero órtico principal é inscritível e circunscritível, e seu circuncentro e incentro são o centróide e o anticentro de $ABCD$, respectivamente.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.21, as alturas médias são concorrentes no anticentro de $ABCD$ (Definição 3.16). Pelo Corolário 3.30, o quadrilátero órtico principal de $ABCD$ é inscritível em $ABCD$. Daí, pelo Teorema 3.31, segue que as alturas médias são bissetrizes do quadrilátero órtico principal Q_{op} . Logo o anticentro de $ABCD$ é incentro de Q_{op} (figura 71).

Figura 71 – Incentro e anticentro coincidentes

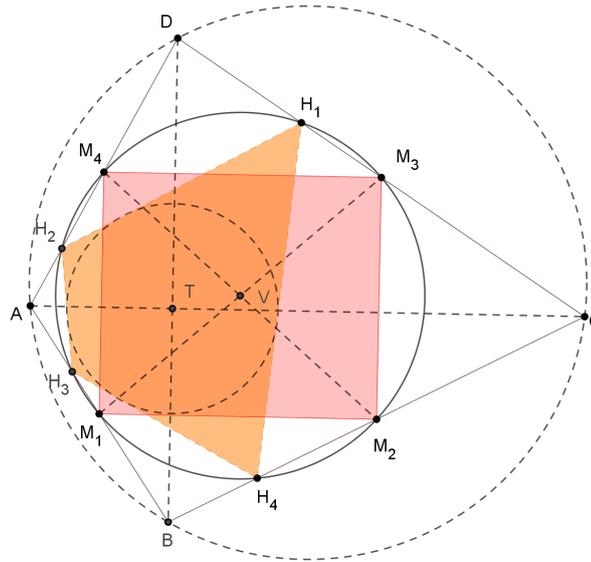


fonte: Autor

Vamos mostrar agora que o circuncentro de Q_{op} é o centróide $ABCD$. Pelo Teorema 3.26, temos que o V-paralelogramo (que é um retângulo por $ABCD$ ser ortodiagonal) e o

quadrilátero órtico associado estão inscritos no mesmo círculo. Em particular, esse teorema também é válido para o paralelogramo de Varignon e o quadrilátero órtico principal. O centro desse círculo é o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo de Varignon (retângulo), centróide de $ABCD$, e também é o circuncentro do Q_{op} que está inscrito nesse círculo.

Figura 72 – Circuncentro e centróide coincidentes



fonte: Autor

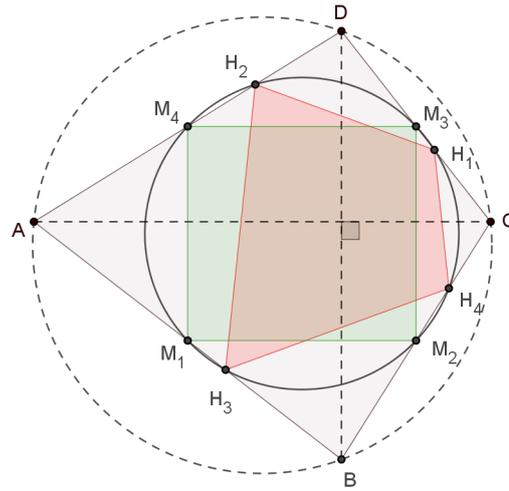
□

Definição 3.34. (Bimediana) Dizemos que um segmento é bimediana de um quadrilátero quando seus extremos são pontos médios de lados opostos desse quadrilátero.

Teorema 3.35. *Se $ABCD$ é cíclico e ortodiagonal, as bimediana de $ABCD$ são mediatrizes das diagonais do quadrilátero órtico principal de $ABCD$.*

Demonstração. Seja $H_1H_2H_3H_4$ o quadrilátero órtico principal associado ao paralelogramo de Varignon $M_1M_2M_3M_4$ (retângulo). Pela observação 3.27 os vértices do paralelogramo de Varignon e os vértices do quadrilátero órtico principal Q_{op} de $ABCD$ determinam o círculo de oito pontos (figura 73). Vamos mostrar que a bimediana M_1M_3 é uma mediatriz da diagonal H_2H_4 do quadrilátero órtico principal de $ABCD$.

Figura 73 – Bimediana como mediatriz I



fonte: Autor

Nesse círculo temos

$$\angle H_2 M_1 M_3 \equiv \angle H_2 H_3 M_3, \tag{3.15}$$

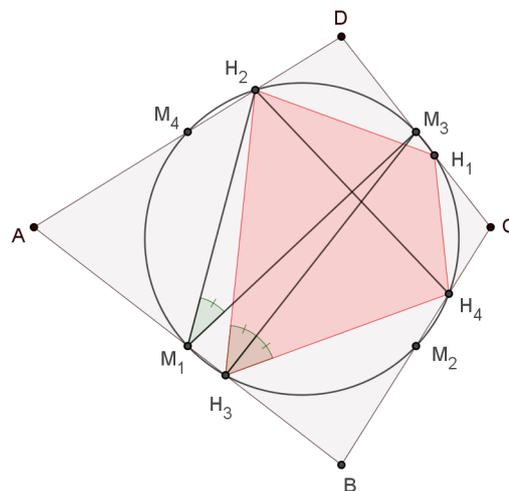
pois ambos são ângulos inscritos associados ao arco $H_2 M_3$. Já pelo Corolário 3.30 e pelo Teorema 3.31, temos

$$\angle H_2 H_3 M_3 \equiv \angle M_3 H_3 H_4, \tag{3.16}$$

pois a altura $M_3 H_3$ é bissetriz interna de $\angle H_2 H_3 H_4$ (figura 74). Dos resultados das igualdades (3.15) e (3.16), chegamos

$$\angle H_2 M_1 M_3 \equiv \angle M_3 H_3 H_4.$$

Figura 74 – Bimediana como mediatriz II



fonte: Autor

Por isso, temos que M_3 é ponto médio do arco H_2H_4 . Temos ainda, pelo mesmo argumento de ângulos inscritos

$$\angle M_3H_3H_4 \equiv \angle M_3M_1H_4.$$

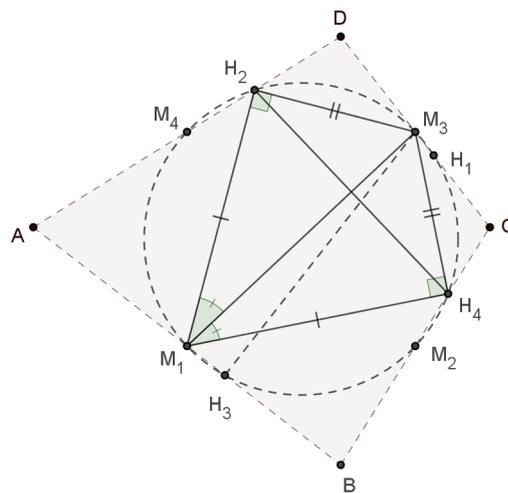
Note que a bimediana M_1M_3 é uma diagonal do paralelogramo de Varignon. Como esse está inscrito no círculo de oito pontos, a bimediana M_1M_3 é também um diâmetro.

Os triângulos $M_1H_2M_3$ e $M_1H_4M_3$ (gerados pela bimediana M_1M_3), são congruentes pelo caso LAA_o (lado-ângulo-ângulo oposto).

- M_1M_3 é comum.
- $\angle H_2M_1M_3 \equiv \angle M_3M_1H_4$, conclusões anteriores.
- $\angle M_1H_2M_3 \equiv \angle M_1H_4M_3 = 90^\circ$, pois são ângulos de 90° inscritos no semicírculo simétricos de diâmetro M_1M_3 .

Daí, concluímos que $M_1H_2 = M_1H_4$ e $M_3H_2 = M_3H_4$, ou seja, M_1 e M_3 pertencem à mediatriz de H_2H_4 (figura 75).

Figura 75 – Bimediana como mediatriz III



fonte: Autor

A demonstração para a outra diagonal H_1H_3 do quadrilátero órtico principal de $ABCD$ é análoga.

□

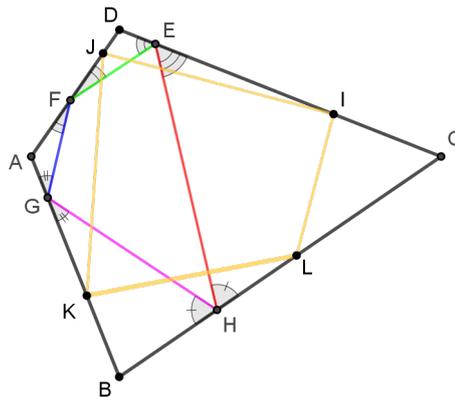
O próximo teorema, sob algumas condições, é uma extensão do problema de Fagnano para quadriláteros. Tal problema, foi apresentado no capítulo anterior, e consiste em saber qual o triângulo de menor perímetro pode ser inscrito em um triângulo acutângulo.

Mostramos no Teorema 2.10 que o triângulo órtico é a solução para esse problema. Para os quadriláteros $ABCD$ convexos, vimos que nem sempre os quadriláteros órticos são inscritíveis em $ABCD$ (observação 3.11). Provamos no corolário 3.30, que uma condição necessária para o órtico principal de um quadrilátero $ABCD$, ser inscritível nesse, é que o quadrilátero dado seja cíclico e ortodiagonal. Tal corolário, garante que pelo menos o quadrilátero órtico principal é solução. Mesmo com essa condição nos deparamos com alguns questionamentos: Dado um quadrilátero cíclico e ortodiagonal, será que o quadrilátero de menor perímetro inscrito nesse quadrilátero dado, é um de seus órticos? se a resposta for afirmativa, qual ou quais dos quadriláteros órticos (pois existem infinitos)? O teorema a seguir nos garante que os quadriláteros órticos inscritíveis em $ABCD$, são as soluções para esses questionamentos, quando o quadrilátero $ABCD$ é cíclico e ortodiagonal. Além disso, mostra que todos os quadriláteros órticos de um quadrilátero dado, inscritível nele, possuem perímetros iguais.

Teorema 3.36. *Se $ABCD$ é cíclico e ortodiagonal, então os quadriláteros órtico de $ABCD$, inscritíveis em $ABCD$, tem o mesmo perímetro. Além disso, tais quadriláteros órticos são os que possuem o perímetro mínimo dentre os quadriláteros inscritos em $ABCD$.*

Demonstração. Considere um quadrilátero órtico qualquer $EFGH$ de $ABCD$ inscrito em $ABCD$ e um outro quadrilátero qualquer $IJKL$, também inscrito em $ABCD$ e distinto de um órtico (figura 76).

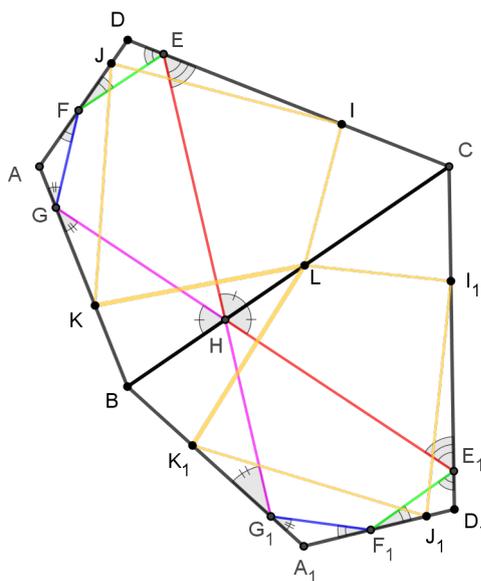
Figura 76 – Reflexões do quadrilátero órtico I



fonte: Autor

Pelo corolário 3.32, temos que os ângulos $\angle AGF \equiv \angle BGH$, $\angle BHG \equiv \angle CHE$, $\angle CEH \equiv \angle DEF$ e $\angle DFE \equiv \angle AFG$. Vamos fazer inicialmente a reflexão do quadrilátero $ABCD$, e de seus respectivos quadriláteros inscritos, em torno de BC . Obtemos assim o quadrilátero A_1BCD_1 e seus respectivos quadriláteros inscritos $E_1F_1G_1H$ e $I_1J_1K_1L$. Como os ângulos são preservados nas reflexões, temos que $\angle BHG \equiv \angle CHE_1$ (opostos pelo vértice). Daí, temos que os pontos G , H e E_1 estão alinhados (figura 77).

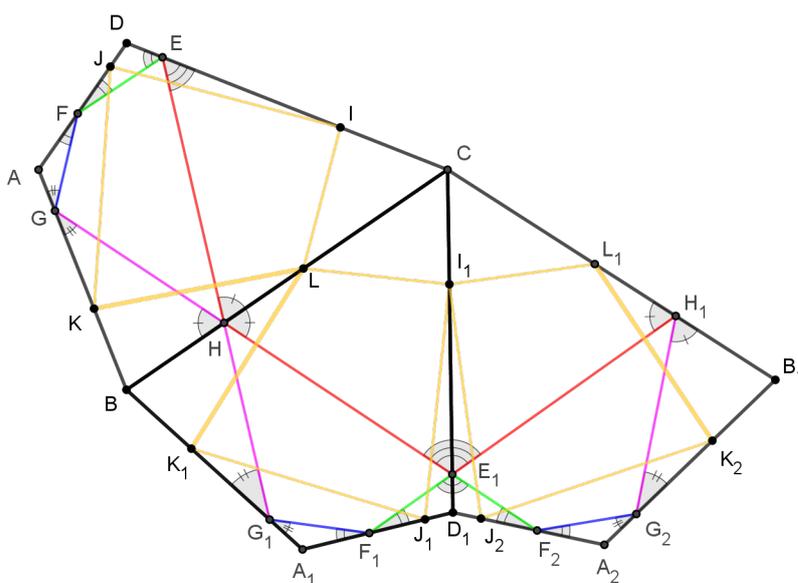
Figura 77 – Reflexões do quadrilátero órtico II



fonte: Autor

Em seguida, vamos fazer a reflexão de A_1BCD_1 e de seus respectivos quadriláteros inscritos em torno de CD_1 , gerando o quadrilátero $A_2B_1CD_1$ e seus respectivos quadriláteros inscritos $E_1F_2G_2H_1$ e $I_1J_2K_2L_1$. Pelo mesmo motivo, concluímos que os pontos H , E_1 e F_2 estão alinhados (figura 78).

Figura 78 – Reflexões do quadrilátero órtico III

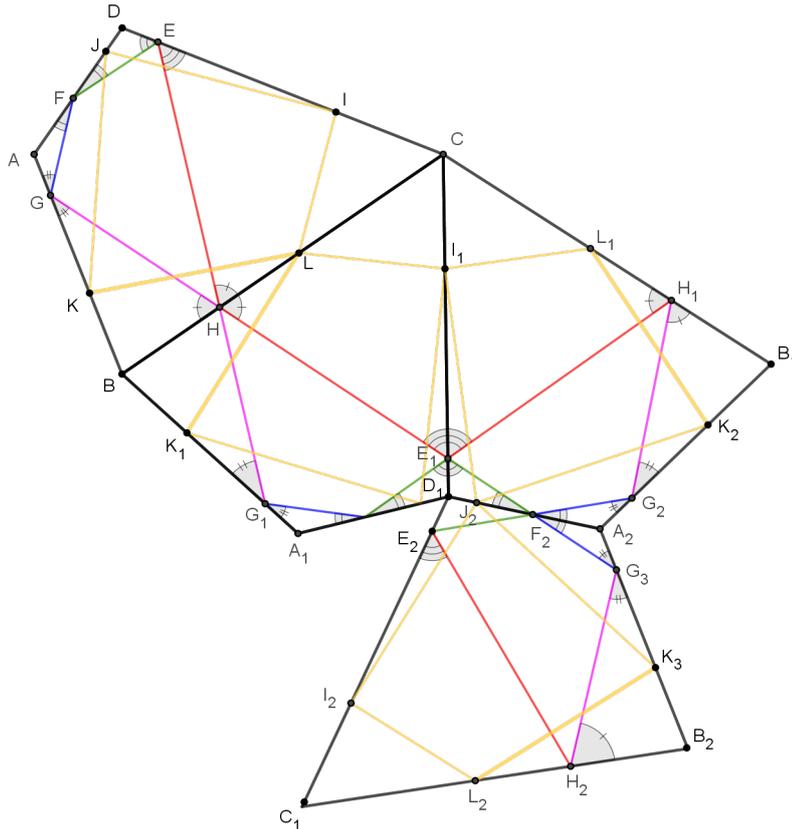


fonte: Autor

Por último, fazemos a reflexão de $A_2B_1CD_1$ e seus respectivos quadriláteros inscritos

em torno de A_2D_1 . Dessa maneira, obtemos, o quadrilátero $A_2B_2C_1D_1$ e seus respectivos quadriláteros inscritos (figura 79). Os pontos E_1 , F_2 e G_3 estão alinhados, pelo mesmo argumento das reflexões anteriores.

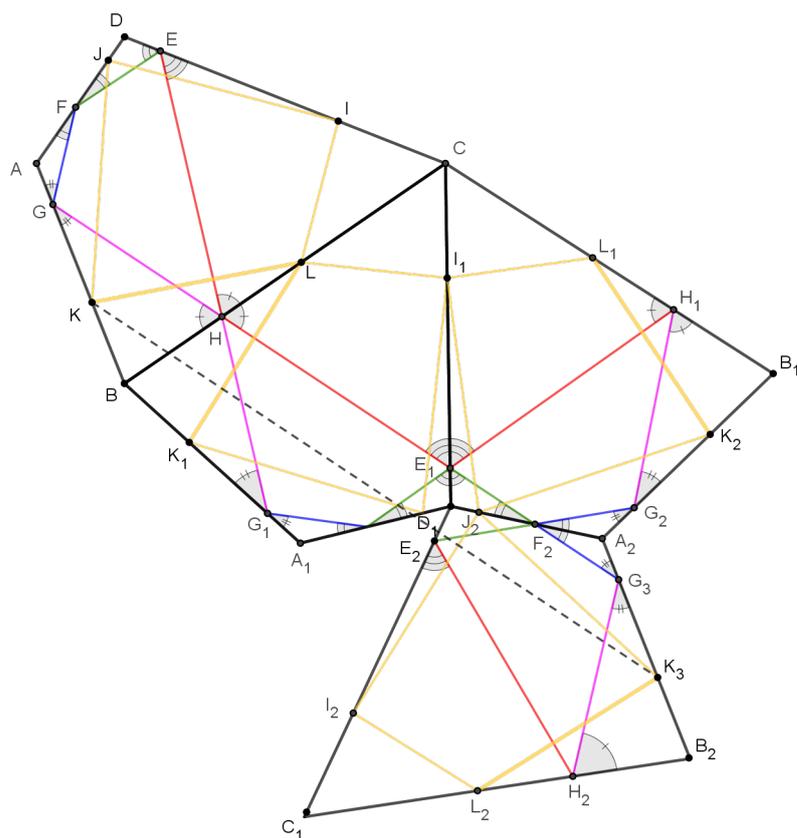
Figura 79 – Reflexões do quadrilátero órtico IV



fonte: Autor

Note que, após todas as reflexões, temos que os ângulos alternos internos $\angle BGH \equiv \angle A_2G_3F_2$. Portanto, temos $AB \parallel A_2B_2$ (figura 80). Note que o ponto G é levado em G_3 após as reflexões, assim com K é levado em K_3 . Dessa forma, sendo $GK = G_3K_3$ e paralelos, pela Proposição 1.4, temos que GG_3K_3K é um paralelogramo. Desse resultado, temos que GG_3 (cuja medida é igual ao perímetro do quadrilátero órtico $EFGH$) é paralelo e congruente a KK_3 . Por sua vez, considerando a poligonal aberta $KLI_1J_2K_3$, cuja medida é igual ao perímetro do quadrilátero $IJKL$, tem medida maior que o segmento $KK_3 = GG_3$ (lado do paralelogramo). Logo, o quadrilátero de menor perímetro que pode ser inscrito em $ABCD$ é um quadrilátero órtico de $ABCD$.

Figura 80 – Reflexões do quadrilátero órtico V



fonte: Autor

A demonstração é válida para qualquer outro quadrilátero órtico de $ABCD$, pois teríamos o segmento GG_3 (perímetro do órtico) paralelo e congruente a AA_2 (que não depende do órtico em particular). Daí, temos que todos os quadriláteros órticos de $ABCD$ possuem o mesmo perímetro.

□

Conclusão

Nesse trabalho de dissertação, queríamos mostrar um novo problema de otimização em geometria euclidiana, baseado em estudos recentes sobre quadriláteros. Com a apresentação desse problema, pretendemos estimular professores de matemática e alunos da educação básica a criar um maior interesse em geometria. Para tal, falamos da importância dos problemas de otimização na matemática, em particular na geometria. Desenvolvemos propriedades que serviram como suporte para a compreensão aos problemas de Heron, e posteriormente, ao de Fagnano. Introduzimos novos conceitos relacionados ao quadrilátero como: V -paralelogramo, paralelogramo de Varignon, V -alturas, alturas médias, quadriláteros órticos, órtico principal e pontos notáveis dos quadriláteros. Em seguida, apresentamos propriedades de quadriláteros órticos para os casos em que esses são ortodiagonais e cíclicos. Por último, trouxemos o novo problema de otimização, fazendo uso dos novos elementos apresentados nas definições e propriedades ao longo do terceiro capítulo. E traçamos, em alguns momentos, paralelos entre os assuntos de triângulos órticos e quadriláteros órticos, em especial aos problemas de otimização, onde um é extensão do outro.

Como sugestões de possíveis trabalhos temos:

- Buscar novos problemas de otimização, inclusive algum que possa ser extensão ao problema apresentado para quadriláteros órticos.
 - Aprofundar os estudos entre a reta de Euler para triângulos e quadriláteros.
 - Aprofundar os estudos sobre o círculo de oito pontos (para quadriláteros órticos) e círculo de nove pontos.
 - Criar uma sequência didática relacionada aos problemas de otimização de Heron, Fagnano e quadriláteros órticos para o ensino médio.
 - Demonstrar a conjectura: Se $ABCD$ é um quadrilátero cíclico e ortodiagonal, então dentre todos os quadriláteros órticos de $ABCD$, inscritíveis em $ABCD$, o de área máxima é o órtico principal
 - Para quais tipos de quadrilátero o problema de Fagnano seria bem posto?
-

Referências

- 1 FARIA, Raquel Maria Almeida. **Interpretação geométrica dos problemas clássicos de Desargues, Fagnano e Malfatti.**, 2013. Dissertação de mestrado.
- 2 HONSBERGER, Ross **Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry**, Washington, DC: Mathematics Association of America, pp. 35–41, 1995.
- 3 JÚNIOR, Pedro José Da Silva Santos. **Triângulos órticos e interferômetros: Uma abordagem interdisciplinar**, 2013. Dissertação de mestrado.
- 4 MAMMANA, Maria Flavia; MICALE, Biagio; PENNISI, Mario. **Orthic quadrilaterals of a convex quadrilateral.** In: Forum Geom. 2010. p. 79-91.
- 5 MESQUITA, Gilder Da Silva, **O círculo dos nove pontos e algumas de suas potencialidades didáticas**, 2013.
- 6 MICALE, Biagio; PENNISI, Mario. **On the altitudes of quadrilaterals.** International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, v. 36, n. 1, p. 15-24, 2005.
- 7 MUNIZ NETO, Antonio Caminha **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana.**, Rio de Janeiro: SBM, v. 2, 2012.
- 8 NETO, Antonio Caminha Muniz; CAMINHA, Antônio. **Geometria**-Coleção Profmat. 2013.