UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL - PROFMAT

RONALDO GOMES BANDIM

Lugar Geométrico - Uma abordagem com Geometria Dinâmica

Recife
2016

Ronaldo Gomes Bandim

Lugar Geométrico - Uma abordagem com Geometria Dinâmica

Trabalho de Dissertação apresentado ao programa ProfMat da Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento

Recife
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

B214L Bandim, Ronaldo Gomes
Lugar geométrico: uma abordagem com geometria dinâmica / Ronaldo Gomes Bandim. – 2016.
54 f. : il.

Orientador: Ross Alves do Nascimento.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Recife, BR-PE, 2016.
Inclui referências.

1. Lugar geométrico 2. Ensino de matemática 3. Software de geometria dinâmica I. Nascimento, Ross Alves do, orient. II. Título

CDD 510

Ronaldo Gomes Bandim

Lugar Geométrico - Uma abordagem com Geometria Dinâmica

Trabalho de Dissertação apresentado ao programa ProfMat da Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 26 de Agosto de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento (Orientador) - UFRPE

Prof. Dr. Glauco Reinaldo Ferreira de Oliveira - IFPE campus Pesqueira

Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva - PROFMAT/UFRPE

Dedicatória

À minha esposa e filhos pelas horas que passaram ao meu lado, e acreditaram em mim, mesmo nos momentos difíceis da minha vida. As minhas irmãs que deram todo apoio durante minha formação e a todos meus amigos que me ajudaram, a quem e sempre serei grato por toda minha vida.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter concluído mais uma etapa da minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Ross Alves pela orientação e apoio durante o execução desse trabalho.

Aos meus alunos que participaram das atividades de forma colaborativa e voluntária.

A Profa. Josineide Fernandes, que cedeu seu tempo para me auxiliar nas horas em que eu mais precisava.

Ao Colégio Militar do Recife por cooperar na minha formação e apoiar em todo tempo que passei, desde o início até o término desse trabalho.

"Os que se encantam com a prática sem a ciência
são como os timoneiros que entram no navio sem timão nem bússola,
nunca tendo certeza do seu destino."
(Leonardo da Vinci)

Resumo

O objetivo desse trabalho foi explorar os efeitos da geometria dinâmica em situações de aprendizagem do conceito de Lugar Geométrico com estudantes do 8° Ano do Ensino Fundamental do Colégio Militar do Recife. Propomos cinco atividades que focavam na construção de situações em que o conceito de lugar geométrico era requisitado. Os estudantes usaram o software CABRI, no qual buscávamos entender que influência dessa ferramenta a partir dos efeitos de geometria dinâmica que ele proporciona em relação ao uso dos utensílios de desenho ' régua e compasso' ainda valorizado por muitos professores. O trabalho resgata elementos de fundamentação de alguns tópicos da história da geometria Grega antiga, passando pelos problemas clássicos bastante discutidos no meio acadêmico. As atividades foram trabalhadas com 30 estudantes selecionados e focavam em saberes relativos a construções com régua e compasso que exploram o conceito de Lugar Geométrico. As atividades eram semelhantes àquelas apresentadas em exercícios propostos nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental. As atividades ocorreram no laboratório de informática do colégio e foram aplicadas pelo pesquisador. Os estudantes, em cada uma das atividades, deveriam realizar anotações sobre o conhecimento que manipulavam para realizá-las. No final, apresentamos as atividades realizadas pelos estudantes, seguida de análises e de seus resultados. Como resultado final, verificamos que as atividades trabalhadas mostraram a importância da Geometria Dinâmica no processo de aprendizagem relativo a investigação do conceito de Lugar Geométrico. Percebe-se em alguns casos, um reforço ao pensamento do estudante para o que imaginam ou preveem acontecer no fenômeno de simulação gerado pelo software, já em outros casos, os estudantes parecem encontrar segurança de que a simulação produzida no software lhes dará uma compreensão convincente no entendimento da solução do problema.

Palavras-chaves: Lugar geométrico, Ensino de Matemática, Software de Geometria Dinâmica.

Abstract

The aim of this study was to explore the effects of dynamic geometry in situations of learning the concept of Locus with students of the 8th year of Elementary School of the Military School of Recife. We proposed five activities that focused on building situations in which the concept of locus was required. The students used the software CABRI, by which we sought to understand what influence this tool (from the dynamic geometry effects it provides) has in relation to the use of design tools such as ruler and compass, still valued by many teachers. The work rescues foundation elements of some topics of the history of ancient Greek geometry, through the classic problems rather discussed in academia. The activities were applied with 30 selected students and focused on knowledge related to constructions with ruler and compass which explore the concept of Locus. The activities were similar to those presented in the proposed exercises of the Mathematics textbooks of Elementary School. The activities took place in the computer lab of the school and were applied by the researcher. Students, in each of the activities, should hold notes on the knowledge manipulated to perform them. In the end, we presented the activities of the students, followed by analysis and its results. As a final result, we found that the activities applied showed the importance of Dynamic Geometry in the learning process concerning the investigation of the concept of Locus. It can be seen, in some cases, a strengthening of the thought of the student for what they imagine or foresee happening in the simulation phenomenon generated by the software; as in other cases, students seem to find assurance that the simulation produced in the software will give them a compelling understanding of the solution of the problem.

Keywords: Locus, Mathematics Teaching, Dynamic Geometry Software.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

1.1 Justificativa

Sendo professor do Colégio Militar do Recife desde 1998, tendo passado 10 anos, lecionando a disciplina de Desenho Geométrico nos 8° Anos do Ensino Fundamental, vejo uma enorme dificuldade entre alguns alunos quanto ao entendimento do que realmente venha a ser Lugar Geométrico (LG) e como aplicar em resoluções de questões usando régua e compasso.

Com esse cenário, proponho assim como conclusão desse trabalho uma série de atividades com o uso da Geometria Dinâmica, para que os alunos possam, ao final das atividades, melhorar seu entendimento do que venha a ser e o que deve ser aplicado na resolução de problemas que envolvem o conhecimento de Lugares Geométricos.

Nosso trabalho parte da observação de que nos últimos anos vem ocorrendo uma transformação importante no processo metodológico utilizado pelos professores para trabalhar conteúdos matemáticos, no qual ele faz uso dos recursos computacionais. Os programas de geometria dinâmica são mais recentes que os de manipulação simbólica, mas permitem resgatar o estudo da Geometria por meio das técnicas utilizadas em construções geométricas.

> Os ambientes de geometria dinâmica são ferramentas informáticas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem. São micromundos que concretizam um domínio teórico, no caso a geometria euclidiana, pela construção de seus objetos e de representações que podem ser manipuladas diretamente na tela do computador. Gravina (2001, p.97).

Em 1989, na França, nasce um dos primeiros softwares que deu início a Geometria Dinâmica. O Cabri Géomètre foi idealizado por Jean Marie Laborne e Frank Bellemain (1989), na França, o programa é muito usado no ensino de matemática, em especial no ensino de geometria. Há vários trabalhos publicados com uso desse software, como por exemplo Sant(1995), que utiliza o Cabri e classifica em vários pontos positivos. Em Gravina(2001) o Cabri foi usado para investigar como situações didáticas que acontecem em ambientes podem favorecer a superação das dificuldades presentes no processo de aprendizagem da geometria. Em Fanti (2014, p.30) o Cabri foi usado no estudo de isometria e construção/exploração de alguns jogos. Estive também usando em várias situações em sala de aula. Assim, optei em usá-lo como ferramenta interativa de ensino aprendizagem.

Vale ressaltar aqui que o uso do computador em sala de aula é um instrumento que serve, não só para facilitar o entendimento, mas também para evidenciar novas representações, tornando a aula mais dinâmica, já que hoje procuramos um fator motivador para nossos alunos.

É também de extrema importância que o professor se sinta confortável com a ferramenta aqui sugerida. É essencial a habilidade em usar a ferramenta, tanto para alunos, como para professores, portanto se faz necessário uma apresentação do Software, seu uso e funcionalidade. Dessa forma irá fluir naturalmente a compreensão do assunto e reforçar seus aspectos de aprendizagem.

Outro fator importante é a não obrigatoriedade da disciplina de Desenho Geométrico no Ensino Fundamental, fazendo com que tenha abordagem dos assuntos nos livros de Matemática, quase sempre no final de capítulos, com tópicos referentes aos conteúdos de geometria. Isso faz com que o professor tenha que aderir a um material paralelo para apresentar o ensino de Desenho Geométrico por meio de construções com régua e compasso. Por isso, se faz importante as atividades como complemento do ensino de Geometria. Pois, há na prática escolar esse vazio, como destaca Zuin (2001).

> (..) escolas que tratam das construções geométricas dentro da disciplina de Artes; escolas que não possuem a disciplina Desenho Geométrico em suas grades curriculares e não abordam as construções geométricas em nenhum momento, nem mesmo dentro do conteúdo de Geometria, desenvolvido em Matemática; e, uma outra classe de escolas que trazem a disciplina em questão em sua grade curricular, mas o conteúdo não é cumprido, sendo estas aulas preenchidas com o conteúdo de Matemática, sem nem sequer se mencionarem as construções geométricas. Zuin (2001, p.99)

Então, com base nessa abordagem, vemos que é necessária uma proposta de atividades para alunos do Ensino Fundamental no final do segundo e terceiro ciclo, terem em seu currículo de aulas de Matemática ou Desenho Geométrico, tornando-as um momento de interação com uma ferramenta que permita melhorar seu saber. Como o assunto de Lugar Geométrico merece um cuidado maior, optamos por ele, por ser de extrema importância na compreensão e resolução de problemas com régua e compasso.

Ao longo da minha experiência em sala de aula, senti necessidade de propor atividades paralelas que pudessem ajudar a compreender melhor alguns conteúdos da disciplina de desenho geométrico, em especial o assunto de Lugar Geométrico. Vejo que alguns estudantes não percebem as propriedades que certos lugares geométricos possuem, com isso, sentem bastante dificuldade em resolver problemas usando régua e compasso. Assim, venho propor, nesse trabalho algumas atividades usando a geometria dinâmica, em particular o software Cabri Géomètre, para aluno do 8° Anos do Ensino Fundamental no colégio onde ensino atualmente. O computador vem como um instrumento facilitador no processo de ensino/aprendizagem. Então, ao final desse trabalho mostraremos alguns resultados das atividades propostas e seus benefícios na compreensão dos assuntos.

2 Objetivos

2.1 Geral

O objetivo desse trabalho é verificar os efeitos de uma sequência de atividades que exploram o conceito de Lugar Geométrico com estudantes do 8° ano do Ensino Fundamental.

2.2 Específicos

Vivenciar atividades relativas ao conceito de lugar geométrico, por meio de geometria dinâmica suportada no software CABRI, com estudantes do 8° ano do Ensino Fundamental;

Analisar os efeitos da geometria dinâmica em situações de ensino para compreensão do conceito de lugar geométrico;

Discutir o potencial dos softwares de geometria dinâmica na aprendizagem de conceitos matemáticos.

3 Fundamentação Teórica

A Grécia antiga foi local do surgimento de magnífico trabalho da matemática, aproximadamente 300 a.C. um provável aluno da escola de Platão, Euclides sistematizou e organizou os conhecimentos até então em seu trabalho chamado “Os Elementos”. Uma obra de 13 livros que só perde para a Bíblia em números de edições, conforme diz Garbi (2006).

> Os Elementos, de Euclides, o mais antigo livro de matemática ainda em vigor nos dias de hoje, uma obra que somente perde para a Bíblia em número de edições e, para muitos, o mais influente livro matemático de todos os tempos. Garbi (2006, p.49).

Não se sabe muito sobre a vida de Euclides, quando nasceu ou morreu, mas se sabe que foi o primeiro a mostrar a geometria como ciência de natureza lógica e dedutiva. Euclides além de mostrar em seus trabalhos várias proposições geométricas, se preocupou também em fazer suas demonstrações.

Nos três primeiros postulados dos Elementos, Euclides enuncia as três construções permitidas em geometria: (i) traçar uma reta por dois pontos; (ii) prolongar uma reta limitada continuamente segundo uma reta; (ii) descrever um círculo com qualquer centro e qualquer distância [...]; A restrição de que essas construções devem ser realizadas apenas com o uso de uma régua sem escalas e um compasso tem tradicionalmente sido atribuída a Platão, conforme diz Eves e Domingues (2004).

> E importante ser claro quanto ao que é permitido fazer com régua e compasso. Com a régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados. Com o compasso permite-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado. Eves e Domingues (2004, p.134).

Logo, esses postulados, permitem as construções iniciais com as quais as proposições do trabalho de Euclides podem ser mostradas. Ainda segundo Eves e Domingues (2004), o traçado de construções era conhecido como um jogo, que tinha suas regras, e era considerado como um dos jogos mais fascinantes e absorventes daquela época. Sabe-se então que nessa época a régua não tinha graduação e o compasso não era o mesmo do atual, pois o mesmo não preservava a abertura após ser retirado do local.

Outro incrível matemático da época era Apolônio de Perga. Apesar de grande parte de suas obras terem sido perdidas, vemos que elas tiveram bastante importância no que hoje chamamos de geometria analítica, como cita Boyer (1996).

> O "Tesouro", consistindo em grande parte da obra de Apolônio, consequentemente deve ter incluído muito do que hoje chamamos de geometria analítica; foi com razão que Apolônio, não Euclides, mereceu dos antigos o nome de "o Grande Geômetra".Boyer e Gomide (1996, p.97).

Um tratado sobre *as Cônicas* foi sua grande obra, composta de oito livros, onde ele mostra vários teoremas com base nos métodos geométricos de Euclides. Alguns livros se perderam ao longo do tempo como o livro oitavo que fala sobre o tratado sobre *Tangências*. Pappus (c. 300 d. C.) escreveu alguns fragmentos desta obra conhecida no seu trabalho *Colecção Matematica*.

Em 1637, René Descartes(1596-1650), publica um trabalho chamado *La Géométrie*, um marco no surgimento da Geometria Analítica, onde coloca no seu trabalho *as conicas* e o *problema Lugar geométrico de quatro rectas* de Pappus, trazendo bastante ajuda nas soluções de um dos problemas de Apolônio que era: *Dadas três coisas, cada uma das quais pode ser um ponto, uma recta ou um círculo, traçar um círculo que e tangente a cada uma das três coisas*. Eecke e Belgique (1982).

Não podemos esquecer também de citar os três problemas clássicos de construção geométrica, que resistiram a todas as tentativas dos gregos para resolvê-los utilizando somente a régua e compasso:

1. A trissecção do ângulo
2. A duplicação do cubo.
3. A quadratura do círculo.

Na Grécia antiga, para resolver um problema de construção geométrica, baseava-se nos três postulados, enunciados no livro os *Elementos* de Euclides. Logo, viram que esses três problemas não poderiam ser resolvidos com uso simples de régua e compasso. Eles precisavam de outras formas para serem resolvidos, e daí, então foram chamados dos três problemas clássicos da matemática grega.

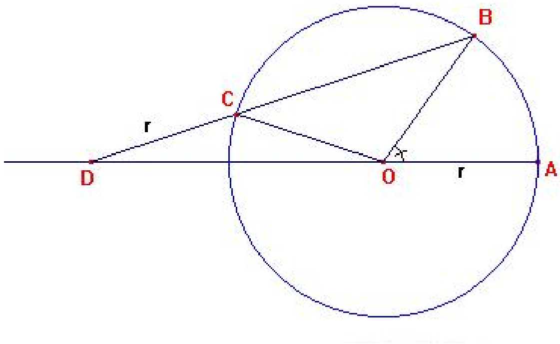
3.1 A Trissecção de um Ângulo

A trissecção de um ângulo, consiste em dividir um ângulo em partes iguais. A primeira vista pareceu um problema simples de ser resolvido, mas ao contrário do que se pensava viu-se a grande dificuldade de sua solução. Várias foram as tentativas de soluções para esse problema. Sabe-se hoje que Hípias de Elis (500 a.C), foi o primeiro na tentativa de resolver este problema, usando recursos de construções e curvas que não podem ser efetuadas somente com régua e compasso. Existe outras soluções por ajustamento (neusis) onde deve-se ajustar um segmento entre duas curvas dadas, com a exigência de que o segmento passe por um ponto dado. Assim foi a solução dada a esse problema por Arquimedes (287 a.C).

Considere o ângulo $A\widehat{O}B$ da Figura 1 a ser trissectado.

Com compasso em O traçar um circulo de raio r igual a medida de $\overline{OA}$. Prolongue a linha $\overline{AO}$ e trace $\overline{DB}$ de tal forma que $\overline{DC} = r$. O ângulo $A\widehat{D}B$ mede um terço do ângulo dado e resolve o problema.

Figura 1 – Trissecção do Ângulo



De fato, se $C\widehat{D}O = \alpha$ então $C\widehat{O}D = \alpha$ pois o triângulo CDO é isósceles de base DO. Note que $B\widehat{C}O$ é o ângulo externo ao triângulo, não adjacente ao ângulo da base, logo: $B\widehat{C}O = C\widehat{D}O + C\widehat{O}D = 2\alpha$. Como o triângulo CBO é isósceles, tem-se $C\widehat{B}O = 2\alpha$. Agora $A\widehat{O}B$ é o ângulo externo ao triângulo BDO, logo $A\widehat{O}B = C\widehat{D}O + C\widehat{B}O = 3\alpha$. Isso é exatamente o que se denomina uma construção neusis: Ajustamos um segmento (o raio CD) entre o círculo e a linha reta que passa por O e por A.

Contador (2005) diz que uma possibilidade da criação desse problema se deve à construção de um polígono de nove lados, a qual, para ser realizada, necessita da construção de um ângulo de 600 para obtermos um ângulo de 400 que é, na realidade, a divisão de 3600 por 9.

3.2 A duplicação do cubo

A duplicação do cubo consiste em encontrar um cubo de volume duas vezes maior. Duas são as versões sobre esse problema. Uma delas seria a duplicação do altar de Apolo, que em 427 a.C, uma peste teria assolado a população de Atenas, então ao consultar o Oráculo de Apolo, em Delos, para saber como lidar com essa situação, os atenienses receberam como resposta que deveriam dobrar o tamanho do altar de Apolo que tinha formato de um cubo. Outra versão seria referente ao rei Minos, que insatisfeito com tamanho do túmulo do seu filho . Mas, este, descontente com o tamanho do monumento, ordenou que fosse dobrado, pedindo que aumentassem duas vezes o tamanho da aresta, sem perder o formato original de um cubo.

Se considerarmos um cubo de aresta igual a 1. Teremos que encontrar um outro cubo de aresta a mas com volume o dobro do inicial. Logo $V_2 = 2V_1$ onde V_2 é o volume do novo cubo de aresta a e V_1 é o volume do cubo de aresta igual a 1. Assim:

$$V_2 = 2.1^3 = 2 \text{ logo } a^3 = 2 \text{ onde } a = \sqrt[3]{2}$$

Sabendo-se que $\sqrt[3]{2}$ é um número que não pode ser construído com régua e compasso [1],

[1] Uma demonstração para esse fato pode ser encontrada em Júnior (2013, p.21).

então o problema da duplicação do cubo não pode ser resolvido dessa forma.

3.3 A quadratura do círculo

O problema consistem em encontrar um quadrado de área equivalente a área de um círculo. Dentre os três com certeza este é o mais famoso. Vários foram os matemáticos que tentaram resolver esse problema, mas sem resultado, pois seria não possível construir usando régua não graduada e compasso. Para isso deveríamos encontrar um quadrado de lado a onde $a^2 = \pi r^2$. Para ver a impossibilidade disso basta fazer $r = 1$ então $a = \sqrt{\pi}$, como π é número transcedente, ou seja, não se pode obtê-lo como raiz de nenhum polinômio de coeficientes inteiros, os números construtíveis são algébricos com diz Wagner (1998) um número construtível tem que ser, antes de mais nada, algébrico. Portanto, todo número transcedente não construtível. Então é impossível resolver esse problema usando régua não graduada e compasso. Hípias de Elis (500 a.C) também propôs uma solução para esse problema, inventando uma curva chamada *quadratiz*, que também serve para o caso da trissecção do ângulo.

Esses problemas foram importantes para aparecimento de novas teorias, como as secções das cônicas e o estudo das curvas. Somente no século XIX mostrou-se a impossibilidade da solução por meio de construções com a publicação de 1937 por Descartes com sua obra *A Geometria*.

3.4 Lugar Geométrico

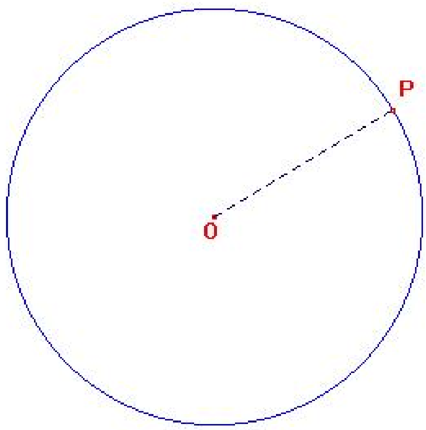
Dada uma propriedade P relativa a pontos do plano, o **lugar geométrico** (abreviamos **LG**) dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto L do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

1. Todo ponto de L possui a propriedade P
2. Todos ponto do plano que possui propriedade P pertence a L

3.5 Circunferência

Uma circunferência é o conjunto de pontos P do plano que tem a mesma distância r, $r > 0$, de um ponto fixo O chamado centro. Essa distância é chamada de raio r da circunferência. Uma circunferência é também um lugar geométrico do conjunto de pontos P equidistantes do centro O. Conforme Pessoa (2005), o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto O denominado centro é a *Circunferência*.

Figura 2 – Circunferência

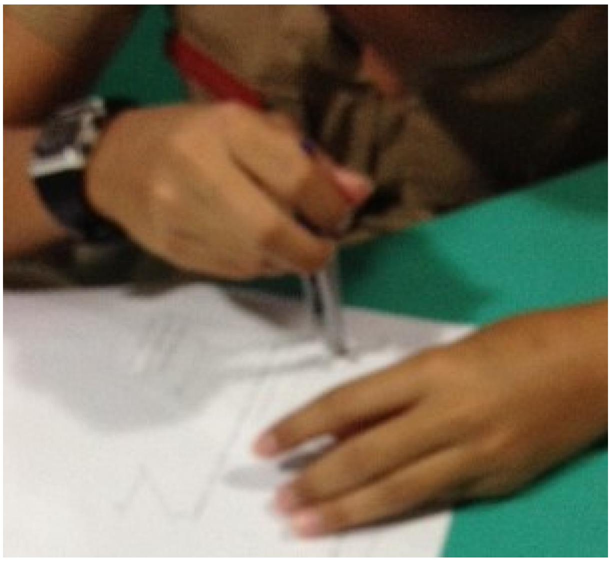


A medida do segmento de reta $\overline{OP}$ é o raio da circunferência.

Nesse momento vemos em alguns estudantes a falta de habilidade em manusear o compasso, pois é um fator importante na precisão e apresentação das construções geométricas. Logo é uma boa prática sempre nos inícios das aulas ter um momento de ensinamento do uso e manuseio correto dos instrumentos. Na figura 3 vemos uma aluna utilizando o compasso de forma incorreta, ela não usou a parte superior (cabeça) e sim tentou traçar pegando nas hastes (pernas) do compasso para traçar uma circunferência.

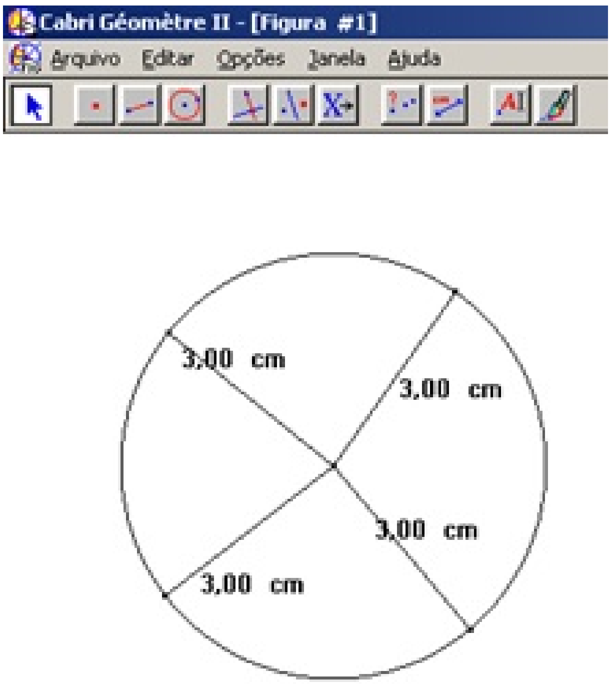
A circunferência é uma das primeiras construções usando o compasso. Mostrar que a circunferência é um lugar geométrico é essencial para o entendimento de várias construções geométricas, pois esta propriedade está diretamente relacionada a outros lugares geométricos.

Figura 3 – Utilizando o Compasso



Umas das atividades proposta nesse trabalho, com uso do Cabri, é de medir a distância do centro da circunferência para qualquer ponto da circunferência mesmo variando o raio da circunferência. No final esperamos que os alunos percebam que esse conjuntos de pontos sempre mantém a mesma distância do centro. Isso é fundamental para o entendimento de que uma circunferência é um lugar geométrico.

Figura 4 – Utilizando o Cabri



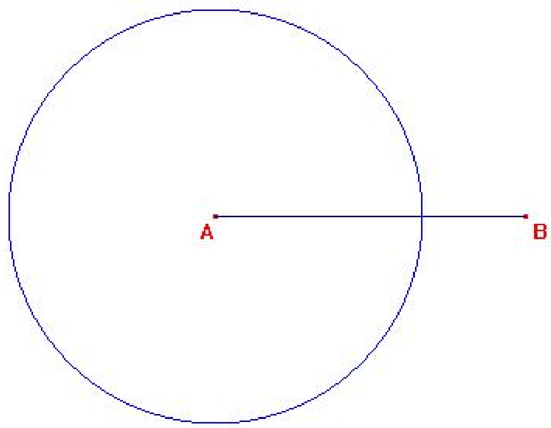
3.6 Mediatriz

Uma reta mediatriz de um segmento de reta $\overline{AB}$ é uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que passa pelo seu ponto médio. Na sua construção seguimos os seguintes procedimentos e no final mostraremos uma justificativa.

Figura 5 – Segmento de Reta $\overline{AB}$

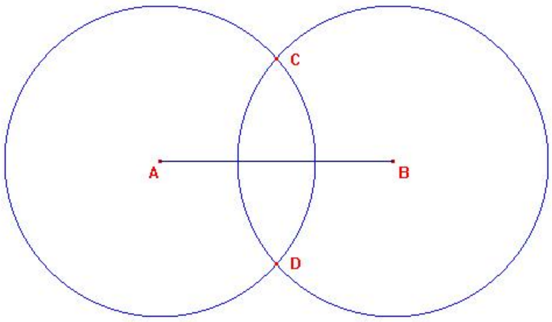
1. Colocando a ponta seca do compasso no ponto A, traçamos uma circunferência com raio superior a metade da medida do segmento $\overline{AB}$.

Figura 6 – Construção da Mediatriz



2. Da mesma forma, colocando a ponta seca do compasso no ponto B, traçamos outra circunferência com mesmo raio, usado no processo anterior.

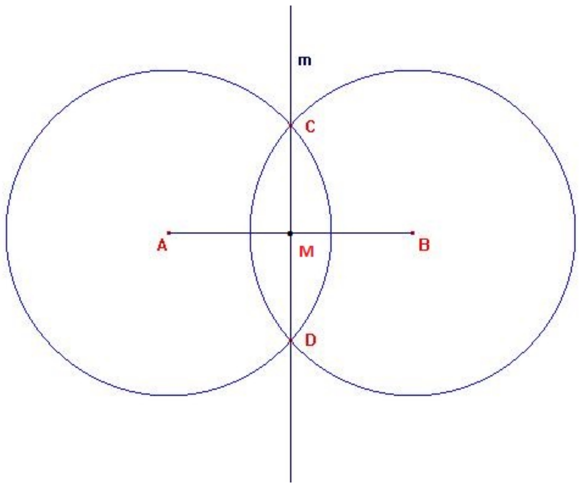
Figura 7 – Construção da Mediatriz



3. Marcamos os pontos de interseção das duas circunferências como sendo pontos C e D.

4. A reta que passa por C e D é a reta mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$, que denominamos m.

Figura 8 – Construção da Mediatriz



A mediatriz determina sobre o segmento de reta $\overline{AB}$ o seu ponto médio M. Logo $\overline{AM} = \overline{MB}$.

3.6.0.1 Unicidade do Ponto Médio

Seja M o ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$. Mostraremos que ele é único, ou seja, que não existem outros pontos médios de um mesmo segmento.

De fato, se M é ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$, temos $\overline{AM} = \overline{MB}$. Suponha que exista outro ponto médio N, distinto de M.

Figura 9 – Ponto Médio

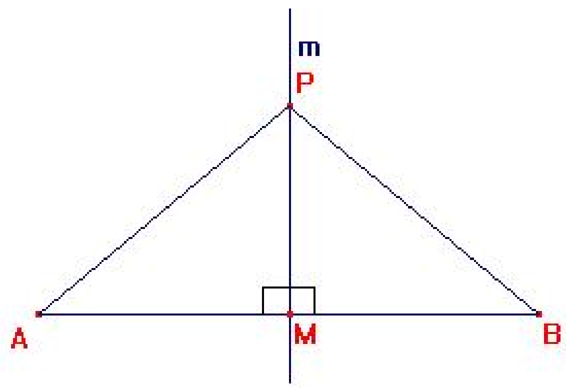
Suponha sem perda de generalidade, que M está entre A e N. Então $\overline{AN} > \overline{AM}$, um absurdo, pois M por hipótese é um ponto médio de $\overline{AB}$. Então $\overline{AN} = \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

3.6.0.2 Mediatriz como lugar geométrico

Teorema 3.6.1 *A reta mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes dos pontos A e B.*

Demonstração

Figura 10 – Mediatriz

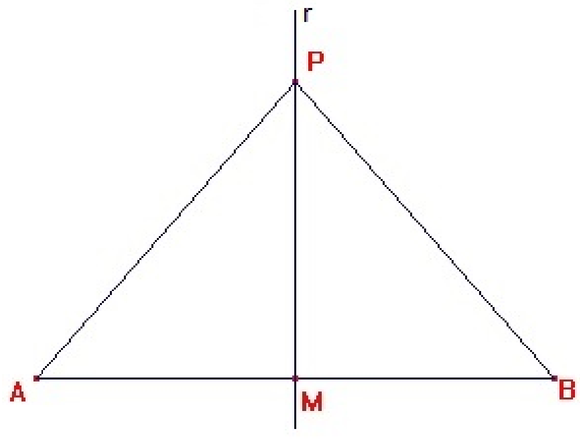


Seja P um ponto da mediatriz m do segmento $\overline{AB}$. Se $P \in m$ então P é o ponto médio M de $\overline{AB}$, logo $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Os triângulos APM e BPM são congruentes pelo caso LAL pois como M é ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$ então $\overline{AM} = \overline{MB}$, os ângulos $A\widehat{M}P$ e $P\widehat{M}B$ ambos retos pois a reta m é uma perpendicular e o segmento $\overline{PM}$ é comum aos dois triângulos, portando $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Agora considere o lugar geométrico (LG) dos pontos, do plano, equidistantes aos pontos A e B. Tome um ponto P qualquer de LG, logo $\overline{PA} = \overline{PB}$. Considere M ponto médio de $\overline{AB}$,

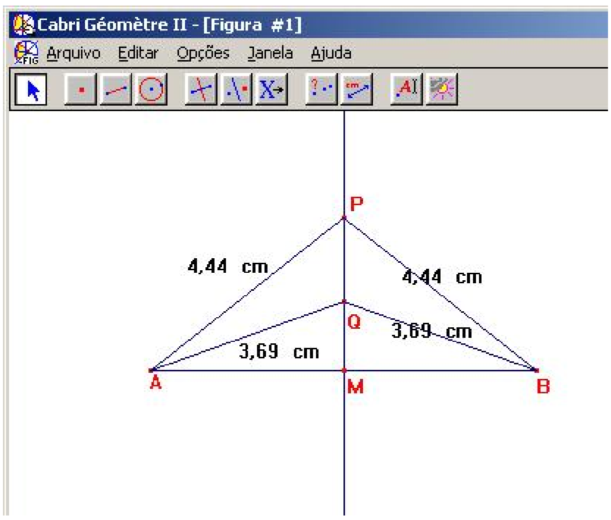
Figura 11 – Mediatriz



a r a reta que passa por P e M forma os triângulos AMP e BMP congruentes pelo caso LLL, pois o segmento $\overline{PM}$ é comum aos dois triângulos, os lados $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ por M ser ponto médio e $\overline{PA} = \overline{PB}$ por P pertencer a LG. Assim os ângulos $A\widehat{M}P$ e $P\widehat{M}B$ são congruentes e sua soma é igual a dois retos, portanto cada um é igual a um reto. Logo a reta r é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Mostrar aos alunos essa propriedade da linha mediatriz usando régua e compasso, não é uma tarefa simples. Mas com uso do computador, utilizando o Cabri, torna-se mais fácil. Basta pedir que marquem vários pontos sobre a linha mediatriz e verifiquem a distância para as extremidades do segmento de reta $\overline{AB}$. No final esperamos que eles cheguem a essa conclusão.

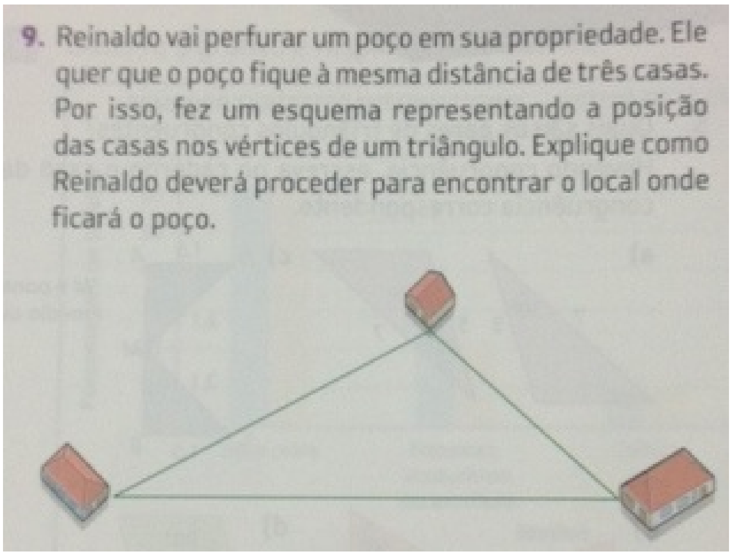
Figura 12 – Verificando propriedades da Mediatriz



Na figura 14 vemos uma atividade encontrada no livro de matemática do 8° Ano do Ensino Fundamental da Ed. Moderna, onde pede para explicar onde encontrar um poço que esta a mesma distância das casas. Nesta atividade o aluno deveria perceber a aplicação da reta mediatriz como solução do problema. Atividade tem o seguinte enunciado:

Reinaldo vai perfurar um poço em sua propriedade. Ele quer que o poço fique a mesma distância de três casas. Por isso, fez um esquema representando a posição das casas nos vértices de um triângulo. Explique como Reinaldo deverá proceder para encontrar o local onde ficará o poço.

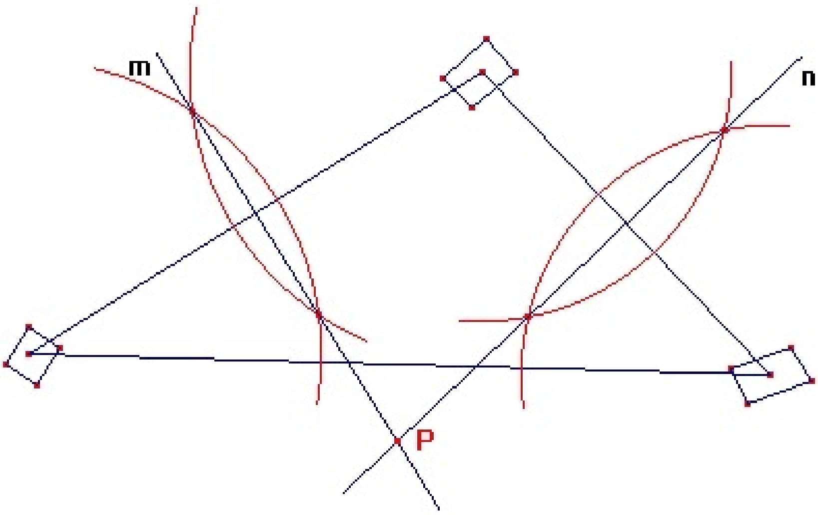
Figura 13 – Atividades do Livro Didático


9. Reinaldo vai perfurar um poço em sua propriedade. Ele quer que o poço fique à mesma distância de três casas. Por isso, fez um esquema representando a posição das casas nos vértices de um triângulo. Explique como Reinaldo deverá proceder para encontrar o local onde ficará o poço.

Fonte: Livro Didático de Matemática, (GAY, 2016)

Esta atividade é resolvida encontrando o ponto P, que é a interseção entre as mediatrizes m e n. O ponto P representa a posição correta onde deve ficar o poço.

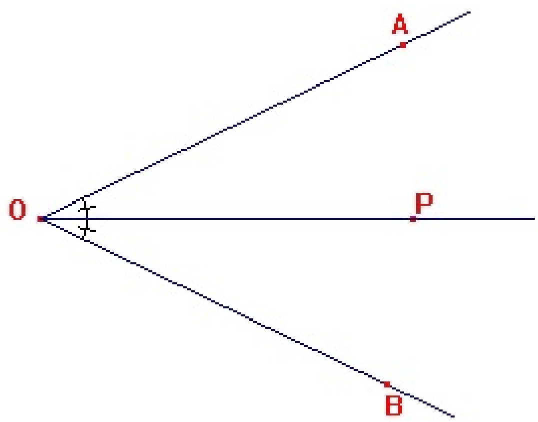
Figura 14 – Resolução da Atividade do Livro Didático



3.7 Bissetriz

A bissetriz de um ângulo $A\widehat{O}B$ é uma semirreta $\overrightarrow{OP}$ que divide o ângulo em dois ângulos congruentes, ou seja, $A\widehat{O}P \equiv B\widehat{O}P$.

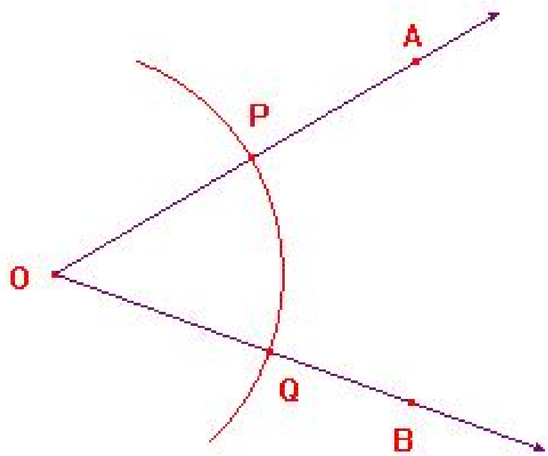
Figura 15 – Ângulo



Construção da bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$ de vértice conhecido. Procedimentos:

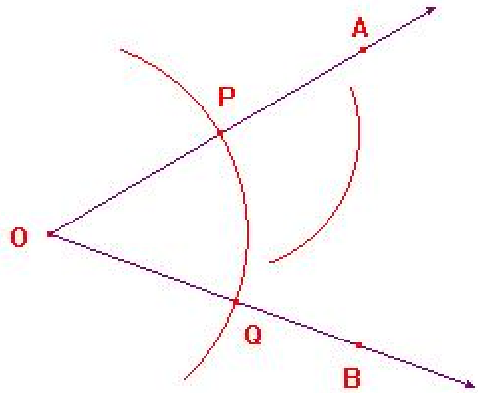
1. Com a ponta seca do compasso no ponto O, traçamos uma circunferência com raio qualquer, diferente de zero, determinando sobre as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ os pontos P e Q.

Figura 16 – Bissetriz de um Ângulo



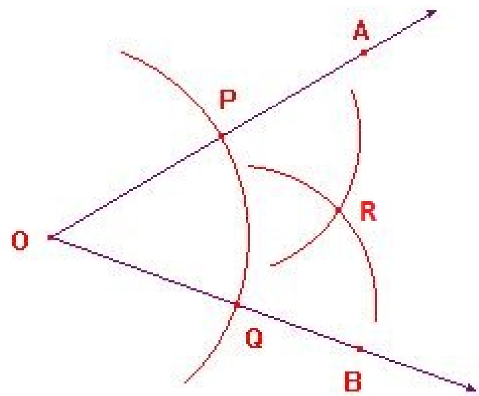
2. Com a ponta seca do compasso no ponto P, traçamos uma circunferência com raio superior a metade da distância entre P e Q.

Figura 17 – Bissetriz de um Ângulo



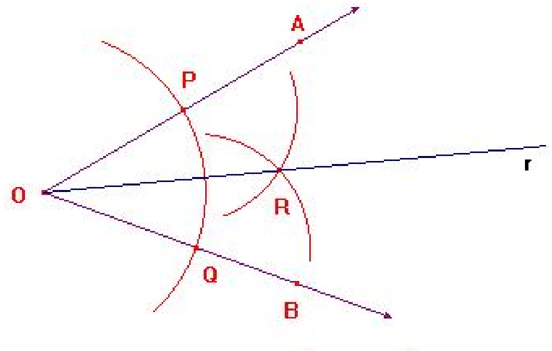
3. Com a ponta seca do compasso no ponto Q, traçamos uma circunferência com mesmo raio, encontrando o ponto R que é a interseção dos arcos.

Figura 18 – Bissetriz de um Ângulo



4. A semirreta que passa por O e R é a bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$.

Figura 19 – Bissetriz de um Ângulo



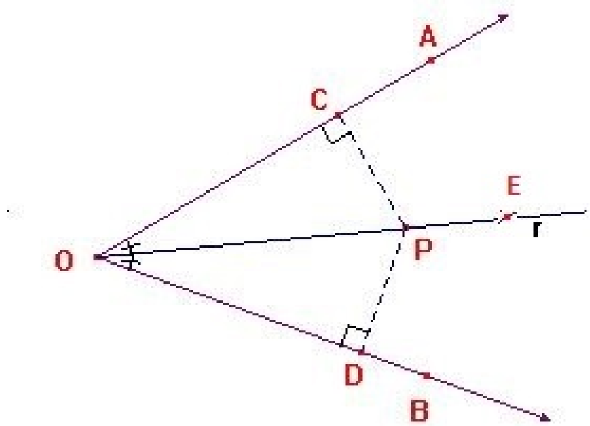
Justificativa:

Note que os triângulos OPR e OQR são congruentes pelos caso LLL, então $P\widehat{O}R = Q\widehat{O}R$.

Teorema 3.7.1 *Dado o ângulo $A\widehat{O}B$, o lugar geométrico dos pontos, deste ângulo, equidistantes das semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz desse ângulo.*

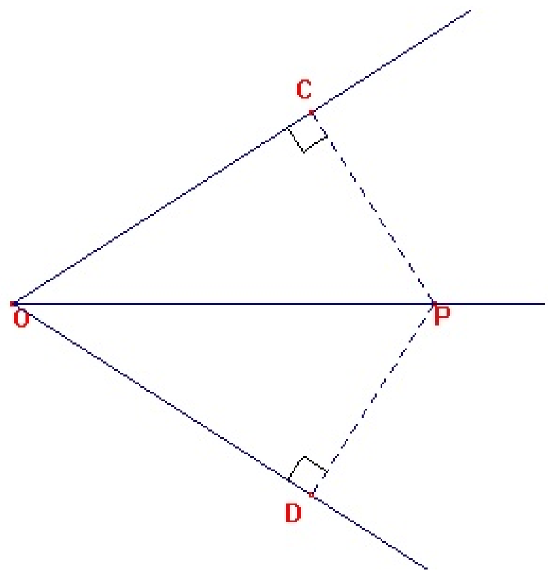
Demonstração

Figura 20 – Bissetriz de um Ângulo



Seja P um ponto da bissetriz $\overrightarrow{OE}$ e os pontos C e D os pés das perpendiculares baixadas de P sobre as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, respectivamente. Desta temos dois triângulos retângulos COP e DOP, ambos com ângulos retos em C e D, respectivamente. Sendo $C\widehat{O}P \equiv D\widehat{O}P$ e o lado $\overline{PO}$ comum aos dois triângulos, então os triângulos COP e DOP são congruentes pelo caso Lado-Ângulo-Ângulo Oposto ($LAAo$). Logo, $\overline{PC} = \overline{PD}$.

Figura 21 – Bissetriz de um Ângulo

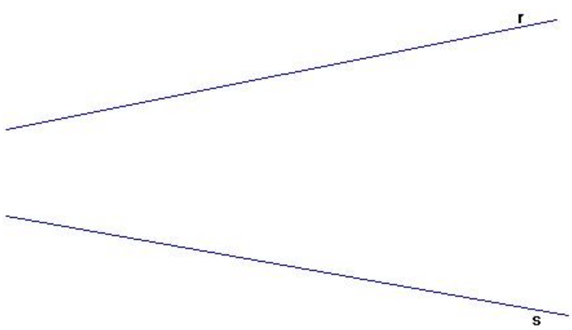


Considere agora o lugar geométrico LG dos pontos equidistantes as semirretas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$. Tomando um ponto qualquer P de LG, a distância de P as semirretas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ forma os segmentos congruentes $\overline{PC}$ e $\overline{PD}$. Então os triângulos COP e DOP são congruentes pelo caso especial de congruência de triângulos, hipotenusa-cateto, pois os triângulos possui a hipotenusa comum $\overline{OP}$ e os catetos $\overline{PC}$ e $\overline{PD}$ congruentes. Assim os ângulos $C\hat{O}P$ e $D\hat{O}P$ são congruentes, logo concluímos que a semirreta $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo $C\hat{O}D$.

Construção da bissetriz de um ângulo formado por duas retas concorrentes r e s, com vértice não conhecido.

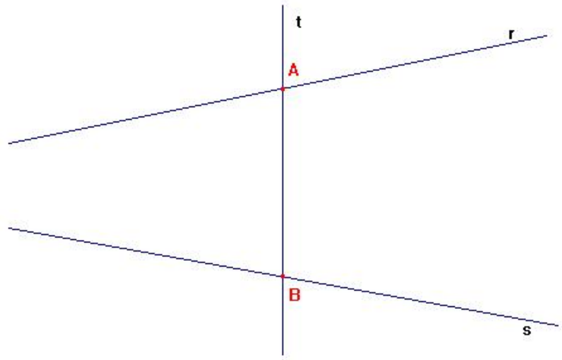
Construção:

Figura 22 – Bissetriz de um Ângulo



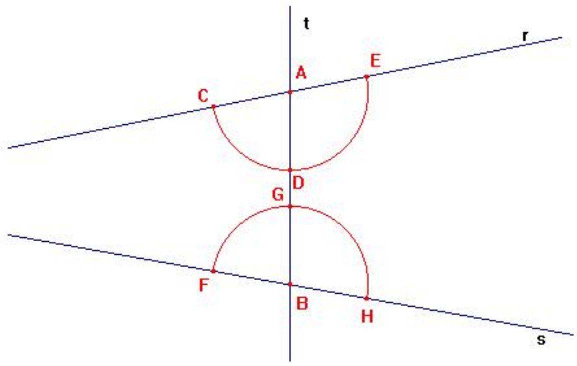
1. Traçar uma reta transversal t por r e s, obtendo os pontos de interseção A e B.

Figura 23 – Bissetriz de um Ângulo



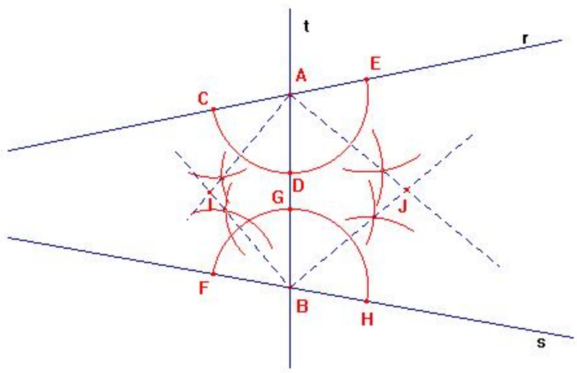
2. Com a ponta seca do compasso em A traçar uma semicircunferência de raio qualquer, encontrado os pontos C, D e E, de mesma forma com compasso em B traçar uma semicircunferência de raio qualquer, encontrando os pontos F, G e H.

Figura 24 – Bissetriz de um Ângulo



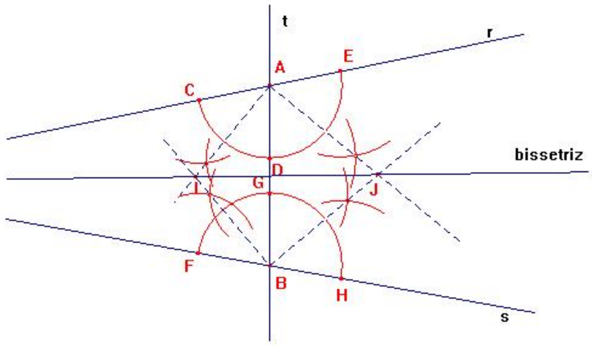
3. Traçar as bissetrizes dos ângulos $C\widehat{A}D$ e $F\widehat{B}G$ encontrando o ponto I da interseção das bissetrizes. De mesma forma traçar as bissetrizes dos ângulos $D\widehat{A}E$ e $G\widehat{B}H$ encontrando o ponto J da interseção das bissetrizes.

Figura 25 – Bissetriz de um Ângulo



4. A reta que passa pelos pontos I e J é a bissetriz das retas r e s.

Figura 26 – Bissetriz de um Ângulo



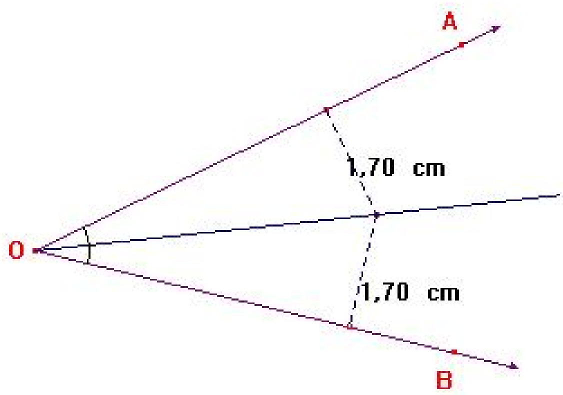
Justificativa

Sabendo que o ponto I pertencente a bissetriz do ângulo $C\widehat{A}D$, então a distância de I a r é a mesma da distância de I a t, $d(I,r) = d(I,t)$ e de mesma forma I também pertence a bissetriz do ângulo $F\widehat{B}G$, então, a distância de I a s é a mesma da distância de I a t, $d(I,s) = d(I,t)$ logo $d(I,r) = d(I,s)$.

Assim, I pertence a bissetriz das retas r e s. Do outro lado, temos também que o ponto J que pertence a bissetriz do ângulo $E\widehat{A}D$ então a distância de J a r é a mesma da distância de J a t, $d(J,r) = d(J,t)$ e de mesma forma J também pertence a bissetriz do ângulo $H\widehat{B}G$, portanto, a distância de J a s é a mesma da distância de J a t, $d(J,s) = d(J,t)$ logo $d(J,r) = d(J,s)$ então J pertence a bissetriz das retas r e s. Assim a reta que passa por I e J é a reta que contém a bissetriz do ângulo formados pelas semirretas de r e s contendo os pontos A e B.

Nessa etapa vamos usar atividade no Cabri para que aluno verifique a distância de qualquer ponto da bissetriz para os lados do ângulo, e com isso esperamos que ao final eles vejam que as distâncias são iguais qualquer que seja a posição do ponto sobre a bissetriz.

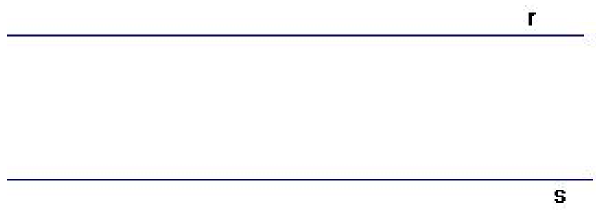
Figura 27 – Verificando propriedades da Bissetriz



3.8 Retas Paralelas

Duas retas r e s são chamadas de paralelas distintas, quando não existe um ponto P, tal que $P \in r$ e $P \in s$.

Figura 28 – Retas Paralelas



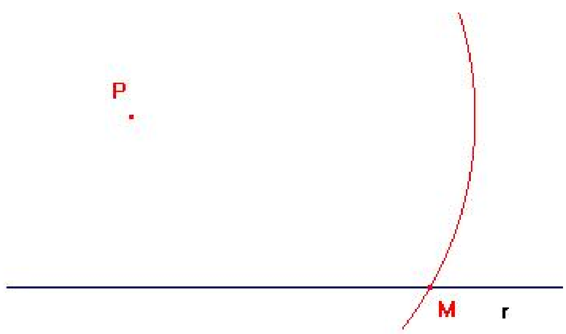
3.8.1 Construção de Paralela

Construção de uma reta paralela a reta r passando por ponto P fora da reta r.

Figura 29 – Retas Paralelas

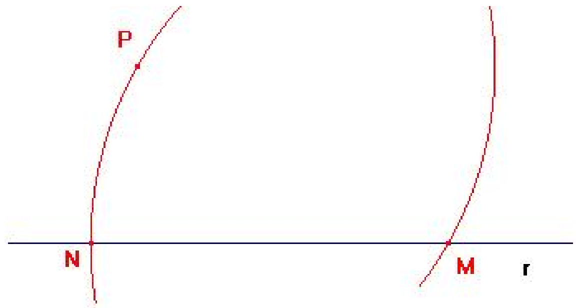
1. Com a ponta seca do compasso em P e com abertura maior que a distância de P a r, traçar um arco de modo a encontrar sobre r o ponto M.

Figura 30 – Retas Paralelas



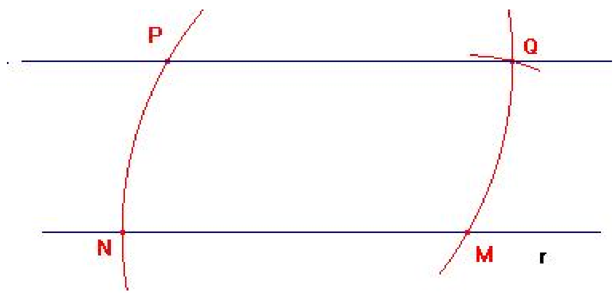
2. Com a ponta seca do compasso em M com a mesma abertura traçar um arco de modo a encontrar sobre r o ponto N.

Figura 31 – Retas Paralelas



3. Agora com a ponta seca do compasso em M tomando a abertura $\overline{NP}$ marcar o ponto Q sobre o primeiro arco. Logo a linha que passa por P e Q é uma linha paralela a r passando por P.

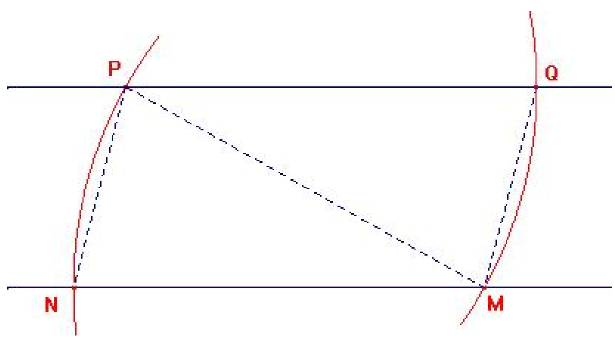
Figura 32 – Retas Paralelas



Justificativa

Sendo $\overline{PQ} = \overline{PM} = \overline{MN}$, que são os raios dos arcos e $\overline{PM} = \overline{QN}$, temos que o triângulo NPM congruente a triângulo MQP pelo caso LLL. Daí se conclui o paralelismo.

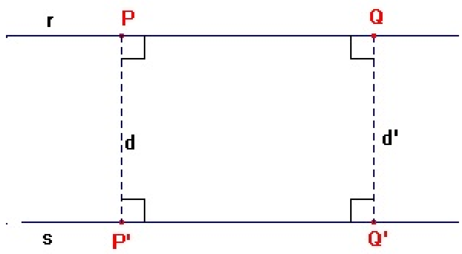
Figura 33 – Retas Paralelas



A seguir, usaremos a notação $d(P,r)$ para indicar a distância de um ponto P a uma reta r.

Proprosição 3.8.1 *Dada duas retas paralelas, todos os pontos de uma dela, estão a uma mesma distância d da outra. Este número é definido como a distância entre as retas paralelas.*

Figura 34 – Retas Paralelas



De fato, sejam r e s duas retas paralelas distintas e o ponto $P \in r$ e $Q \in r$, considere a distância de $d(P,s) = d$ e $d(Q,s) = d'$. Sabendo que os ângulos $Q\widehat{P}P'$ e $P\widehat{P'}Q'$ são suplementares então $Q\widehat{P}P'$ é igual a um reto. Da mesma forma os ângulos $P\widehat{Q}Q'$ e $P'\widehat{Q'}Q$ são suplementares logo $P\widehat{Q}Q'$ é igual a um reto, assim o quadrilátero $PP'Q'Q$ é um retângulo, logo o segmento $\overline{PP'} = \overline{QQ'}$, ou seja, $d = d'$.

Teorema 3.8.2 *Dado um número $d > 0$ e uma reta r, o lugar geométrico dos pontos P do plano, tais que, $d(P,r) = d$ é constituído por um par de retas paralelas a r, contidas em semiplanos opostos (definidos por r), cuja a distância a reta r é igual a d.*

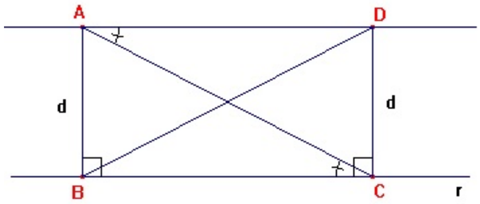
Figura 35 – Retas Paralelas como lugar geométrico

Demonstração

Sejam s e s' retas paralelas a r em semiplanos opostos, que estão a uma distância d de r. Pela proposição anterior, qualquer ponto de s ou s' está a mesma distância d de r.

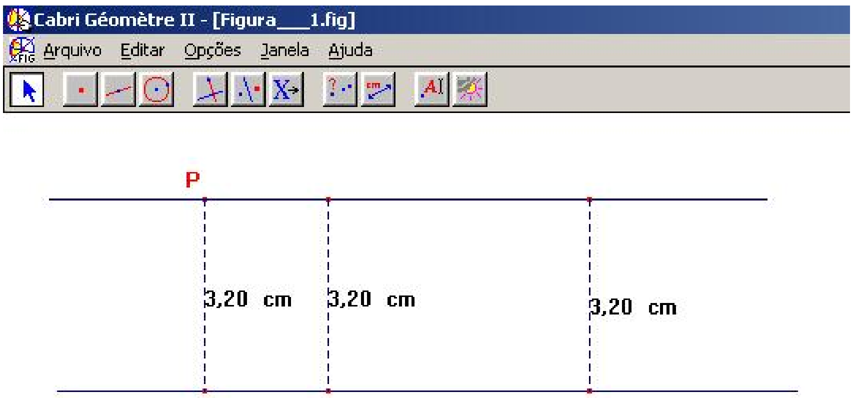
Reciprocamente, dado um ponto P pertencente ao lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância d de r, sabemos que P pertence a um dos semiplanos determinado por r, e que existe uma única reta paralela a r passando por P. Então esta reta contém todos os pontos do lugar geométrico que estão no mesmo semiplano que P e sua distância a r é igual a d. De fato, tomando dois pontos, no mesmo semiplano, A e D ambos com distância d, $d > 0$ de r, formamos os segmentos perpendiculares $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$. Com isso os triângulos ABC e DCB são congruentes pelo caso LAL, logo $B\widehat{C}A = C\widehat{A}D$ e então a reta que passa por A e D é de fato paralela a r.

Figura 36 – Retas Paralelas



Uma proposta de atividade para essa construção, é a observação que uma linha paralela é um lugar geométrico dos pontos que estão a mesma distância de uma reta dada. Na figura abaixo vemos que todos pontos sempre mantém a mesma distância.

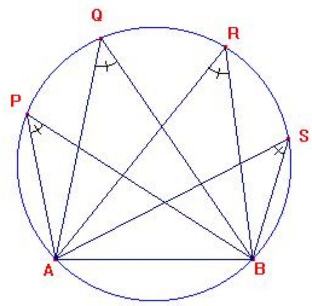
Figura 37 – Retas Paralelas



3.9 Arco Capaz

Seja A e B dois pontos distintos sobre uma circunferência. Qualquer ponto P em um dos arcos da circunferência, determina um ângulo $A\widehat{P}B$ constante.

Figura 38 – Arco Capaz



$$A\widehat{P}B = A\widehat{Q}B = A\widehat{R}B = A\widehat{S}B = ... = \alpha$$

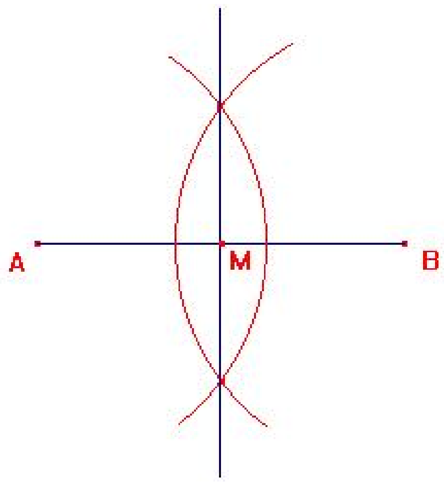
Dizemos que o arco APB é o *Arco Capaz* do segmento de reta $\overline{AB}$ sob o ângulo α.

3.9.1 Construção do Arco Capaz

Construção do arco capaz de um segmento de reta dado $\overline{AB}$ sob um ângulo determinado ângulo α.

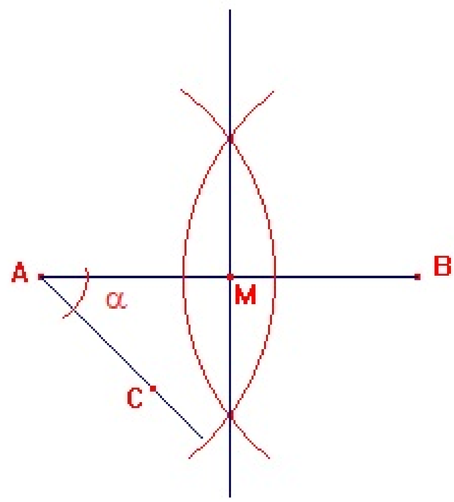
1. Construir a reta mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$.

Figura 39 – Arco Capaz



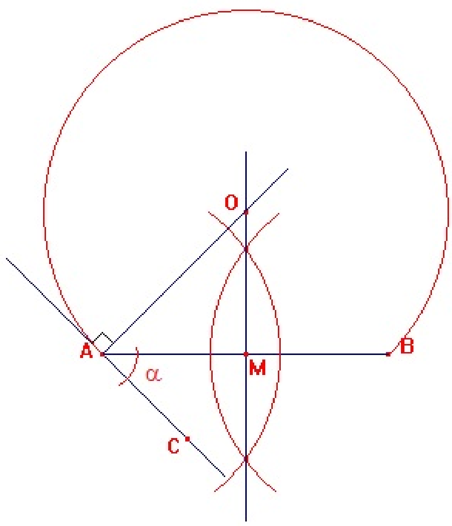
2. Construir uma semirreta $\overrightarrow{AC}$, tal que $B\widehat{A}C = \alpha$.

Figura 40 – Arco Capaz



3. Construir por A uma perpendicular a semirreta $\overrightarrow{AC}$. A interseção da reta perpendicular e a reta mediatriz é o centro do arco capaz que passa pelos pontos A e B.

Figura 41 – Arco Capaz



Justificativa

Seja $A\widehat{O}B = \beta$ o ângulo central associado ao arco AB. Note que $O\widehat{A}B = \theta$ é o complemento do ângulo α. Logo,

$$\alpha + \theta = 90^\circ \tag{3.1}$$

Por outro lado, o triângulo AOB é isósceles de base $\overline{AB}$, então $\overline{OA} = \overline{OB} = r$. Daí, o ângulo $O\widehat{B}A = \theta$ e

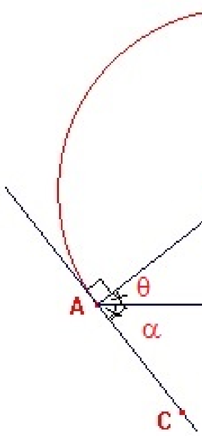
$$\beta + 2\theta = 180^\circ \tag{3.2}$$

Então multiplicando a equação (3.1) por 2, temos: $2\alpha + 2\theta = 180°$. Assim

$$2\alpha + 2\theta = \beta + 2\theta$$

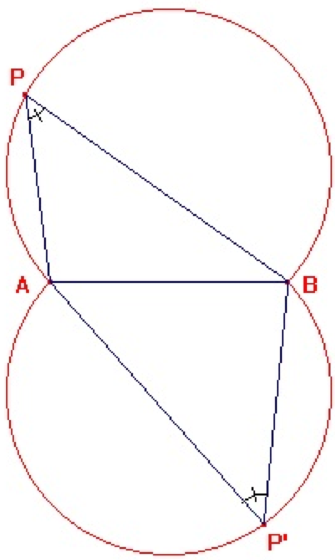
logo $\beta = 2\alpha$. Então qualquer ângulo inscrito no arco mede $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$.

Figura 42 – Arco Capaz



Teorema 3.9.1 *Dado um segmento de reta $\overline{AB}$ e um ângulo α, o lugar geométrico dos pontos P do plano, tais que $A\widehat{P}B = \alpha$ é constituído de um par de arcos capaz, simétrico em relação reta que passa por A e B.*

Figura 43 – Arco Capaz



Demonstração

Conforme a construção anterior, é fácil ver que o conjunto formado pelos dois arcos capaz, possui a propriedade exigida.

Reciprocamente, seja Q um ponto do lugar geométrico, ou seja, $A\widehat{Q}B = \alpha$. Considere o arco capaz contido no mesmo semiplano do ponto Q e suponha este não pertença ao arco. Considere o caso em que uma das retas AQ ou BQ encontre o arco no ponto P, distinto de A e B. Suponha sem perda de generalidade que P pertence a reta AQ. Sendo P um ponto do arco capaz tempos $A\widehat{P}B = \alpha$. Considerando o triângulo BPQ temos um ângulo externo igual ao ângulo interno não adjacente. Isto é um absurdo pelo teorema do ângulo externo.

Agora suponha, sem perda de generalidade, que AQ seja tangente ao arco no ponto A. O ângulo externo, do triângulo AQB, associado ao vértice A é igual ao ângulo interno não adjacente Q, ambos igual a α que é também um absurdo pelo teorema do ângulo externo.

4 A Metodologia

A pesquisa aqui descrita evidencia parte de minhas atividades sob o olhar como professor por mais de 10 anos no Colégio Militar do Recife atuando nos 8° Anos na disciplina de Desenho Geométrico. Portanto, por considerar importante o ensino de geometria utilizando régua e compasso e em contrapartida explorar também nessas turmas o uso do software Cabri Géomètre, proponho desenvolver uma proposta de intervenção para investigar dificuldades dos estudantes no uso de software focando em atividades que trabalham o conhecimento de lugar geométrico.

A proposta será realizada utilizando a geometria dinâmica com os estudantes e será desenvolvida no Colégio Militar do Recife, com 30 alunos do 8° Ano da disciplina de Desenho Geométrico.

4.1 O ambiente de pesquisa

O Colégio faz parte da rede pública de ensino federal, com 12 unidades espalhadas nas principais capitais do país. Mantem o Ensino Fundamental do 6° ao 9° ano e Ensino Médio do 1° ao 3° ano. Seus egressos são oriundos de concurso realizado para 6° ano do Ensino Fundamental com cerca de 30 vagas e também a filhos de militares por necessidade de transferência, com admissão em qualquer uma das séries sem concurso. Em média são quatro turmas de cada série com no máximo de 30 alunos por turma.

As aulas são ministradas no período da manhã, mas mantém também há atividades a tarde como: aulas de recuperação, aulas de reforço, aulas de informática, participação em clubes (Matemática, Física, Química, História, Biologia, Geografia, Artes, etc), Aulas de Música e Coral, entre outras atividades. O colégio possue também laboratório de informática com 30 computadores, todos com acesso a internet.

4.2 O grupo amostra

Para aplicação da pesquisa foi selecionada uma turma do 8° ano do Colégio Militar do Recife - CMR, com 28 alunos dentro da faixa etária, de 12 a 14 anos, onde 30% são alunos oriundos de concurso público e o restante são estudantes amparados pela lei.

4.3 Atividades Propostas, Análises e Discussões

Neste capítulo abordaremos as atividades propostas com o Cabri Géomètre, no sentido de analisar algumas das propriedades dos lugares geométricos que serão trabalhadas com os estudantes. Às vezes, traçar e verificar algumas propriedades geométricas usando régua e compasso torna o processo difícil de entender frente as limitações que sofre durante sua execução. Portanto, fazendo uso do computador, usando um software de Geometria Dinâmica, esse processo se torna mais claro e de fácil compreensão. Gravina (1996) afirma que um dos fatores desfavoráveis quanto ao uso do primeiro meio é a impossibilidade de variarmos a posição da figura. Não existe assim, formas viáveis de fazer novas conjecturas.

Portanto, estudo afirma a importância das ferramentas de rastro e lugar geométrico do Cabri Géomètre, como formas de facilitar na construção de lugares geométricos. Assim, podemos verificar como seu uso é importante, pois utilizando somente régua e compasso a construção fica dependente de vários fatores. Segundo Araújo (2010), é difícil imaginar um conjunto de pontos se movendo na tela do computador respeitando determinada característica e, a partir disso, conceber o lugar geométrico determinado por estes pontos.

Quatro alunos da turma selecionada foram escolhidos para participar das atividades. Embora já tenham feito em atividades anteriores as atividades de construção de mediatriz, bissetriz, paralela e arco capaz usando régua e compasso, nossa intenção era que os mesmos encontrassem as propriedades dos lugares geométricos nessas construções agora usando o Cabri. Os estudantes foram separados em dois grupos, cada grupo com dois alunos. A aplicação das atividades foram no laboratório do colégio nos dias 20 e 27 de Julho de 2016, usando 90 minutos cada dia. Foi dado uma orientação de como usar o Cabri, tomando o cuidado para não interferir nas atividades da pesquisa. Após o término das atividades propostas foi feito seu recolhimento, juntamente com os registros efetuados por cada grupo de estudantes participante da pesquisa, para posterior análise.

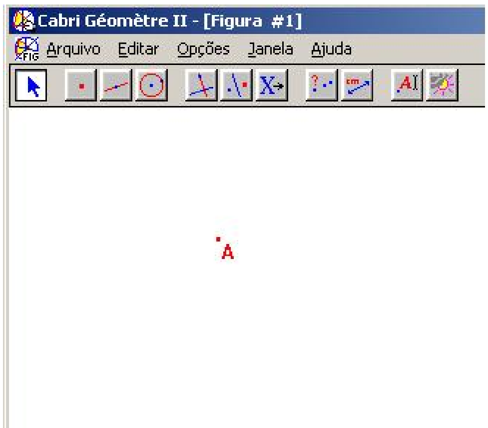
4.3.1 Conhecendo o Aplicativo

No nosso primeiro encontro, apresentaremos o Cabri Géomètre aos alunos. Mostrando algumas funcionalidades e como usar o software. Esse momento é de extrema importância, pois saber como funciona o aplicativo e seus recursos ajuda a atingir mais facilmente nosso objetivo. Esse primeiro contato deixamos os alunos à vontade a explorar e conhecer o aplicativo.

4.3.2 Atividade 1 - Circunferência

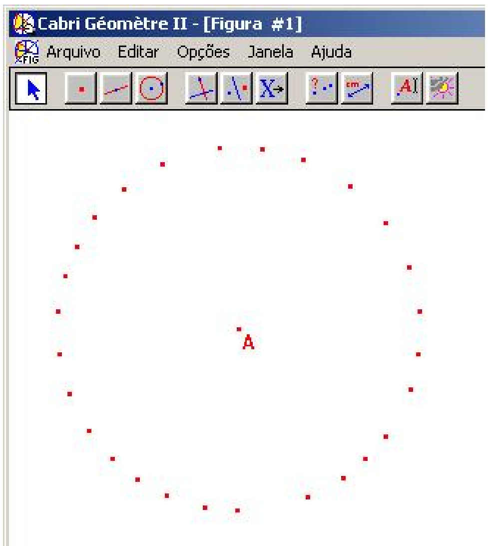
Obtenha o conjunto de pontos no plano cuja distância a um dado ponto fixo A seja constante.

Figura 44 – Atividade 1



Essa atividade solicitamos aos alunos que coloque vários pontos e marque sua distância ao ponto A. Para isso, deveriam usar a ferramenta de *Distância e Comprimento* e depois arrastando de modo que todos os pontos estejam a uma mesma distância do ponto A. E no final veja qual a figura que irá formar traçando uma linha com esse conjuntos de pontos, anotando o resultado.

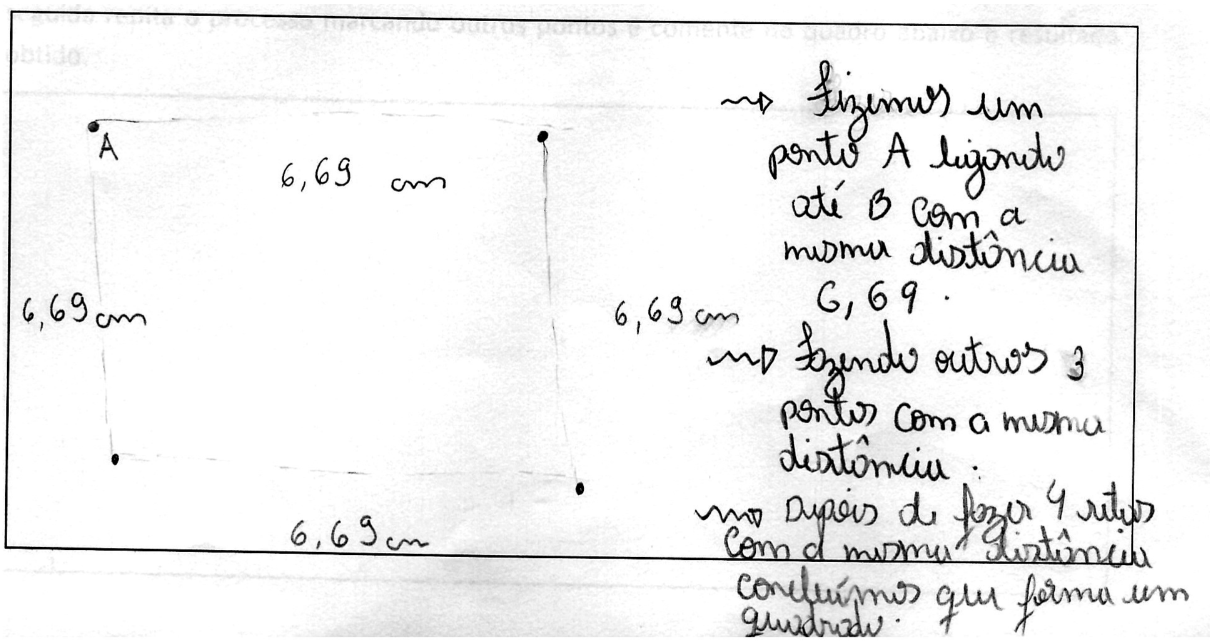
Figura 45 – Solução da atividade 1



Nessa atividade não esperamos muita dificuldade por parte dos alunos em encontrar como resposta, da atividade proposta, uma circunferência. Claro que ao colocar uma quantidade maior de pontos a resposta ficará mais clara.

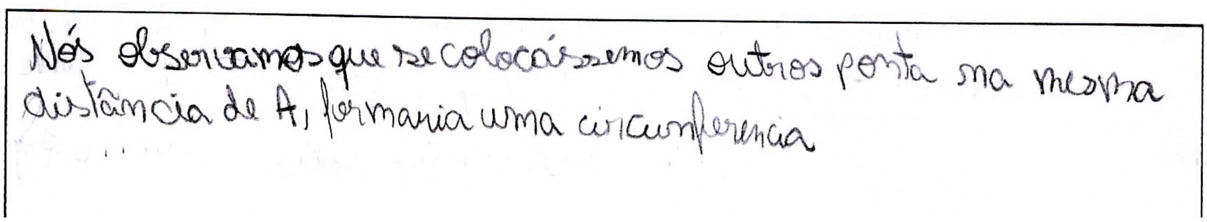
Comentário e discussão: Observamos que O grupo 1 de forma apressada não teve um bom entendimento do problema ou não entendeu a pergunta, pois achou a representação de um quadrado como resposta. É claro que nos vértices de um quadrado há dois pontos que estão a uma mesma distancia de um terceiro próximo, mas o quarto ponto não tem essa propriedade. Então não gera os conjuntos de pontos que oferece o lugar geométrico requisitado na questão. Desse modo, percebemos a necessidade de uma intervenção para colocar de forma mais clara o significado da frase "conjunto de pontos" na questão.

Figura 46 – Anotações do grupo 1 sobre a Atividade 1



O grupo 2 chegou ao resultado mais rapidamente, não apresentando dificuldade, pois ao colocar/acrescentar mais pontos, entenderam de imediato em se tratar de uma propriedade desses pontos que gera a figura de uma circunferência. Esse fato indica que intuitivamente a noção de "lugar geométrico"é valorizada pela dinâmica do software ao oferecer uma imagem mais detalhada da solução do problema, que foi percebida pelo grupo. A resposta oferecida pelos estudantes na figura 47 descreve esse fato.

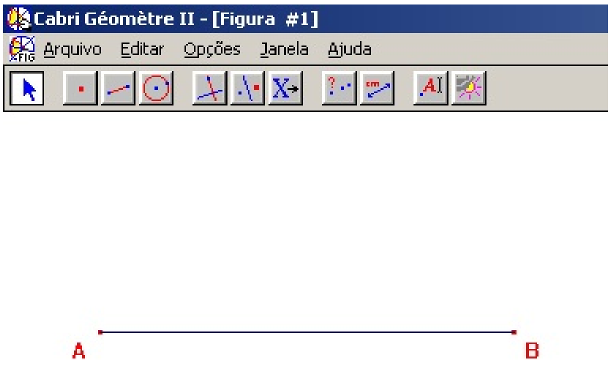
Figura 47 – Anotações do grupo 2 sobre a Atividade 1


Nós observamos que se colocássemos outros ponta na mesma distância de A, formaria uma circunferencia

4.3.3 Atividade 2 - Mediatriz

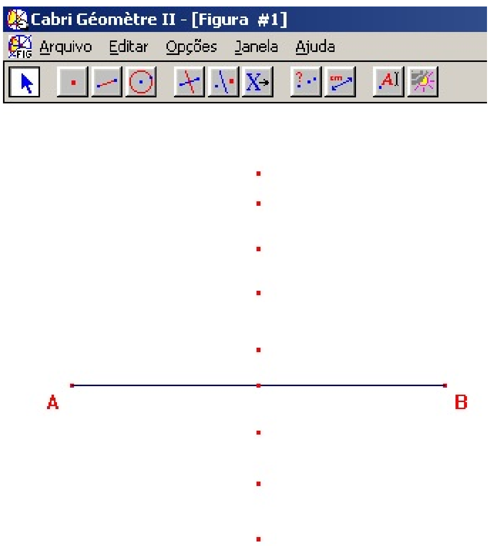
Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta. Encontre o conjunto de pontos do plano que estejam a mesma distância do ponto A e B.

Figura 48 – Atividade 2 - Mediatriz



Solicitamos nessa atividade que os alunos coloquem vários pontos e marque sua distância aos pontos A e B usando a ferramenta de *Distância e Comprimento* e depois arrastando de modo que todos a mesma distância do ponto A e B. E no final, veja qual figura irá formar traçando uma linha reta por esses conjunto de pontos, anotando o resultado.

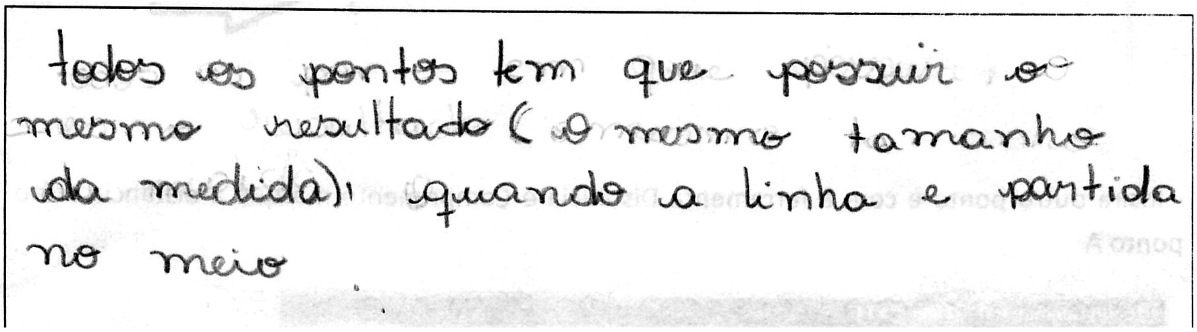
Figura 49 – Atividade 2



Essa atividade requer um pouco mais de habilidade, pois o aluno deve observar a distância, que agora deverá ser estabelecida, simultaneamente, para os dois pontos dados. É também importante observar que foi colocado um ponto sobre o segmento de reta, isso deixa claro que a linha a ser formada deverá passar pelo ponto médio do segmento AB. Ao final da atividade, espera-se que o aluno perceba que a linha formada pelo conjunto de todos os pontos situados a uma mesma distância de A e B, tomam a característica de um lugar geométrico que é a mediatriz do segmente $\overline{AB}$.

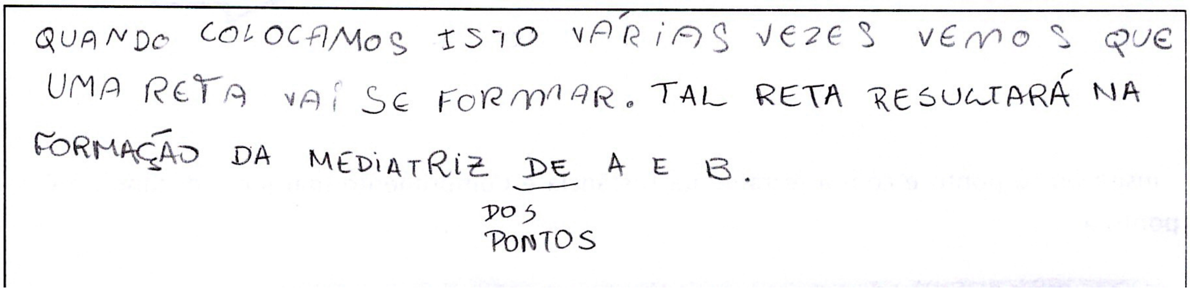
Comentário e discussão: O grupo 1 chegou ao resultado esperado, mesmo não falando de mediatriz, mas ao comunicar a ideia da "linha partida ao meio"que já descreve a compreensão favorecida pelo software, que é suficiente para identificar que encontraram uma linha mediatriz. Além disso, reforçam as informações do conceito de mediatriz, como todos os pontos situados a uma mesma medida (distância) das extremidades de um segmento de reta, como afirmado por eles na figura 50.

Figura 50 – Anotações do grupo 1 sobre a Atividade 2


todos os pontos tem que possuir o mesmo resultado (o mesmo tamanho da medida), quando a linha e partida no meio

O grupo 2 chegou a uma compreensão mais segura ao afirmar que o lugar geométrico, estabelecido pelo conceito de mediatriz, informa uma compreensão mais detalhada do que estamos a investigar. Os estudantes de imediato relacionam a reta encontrada com uma reta mediatriz, como mostra a figura 51.

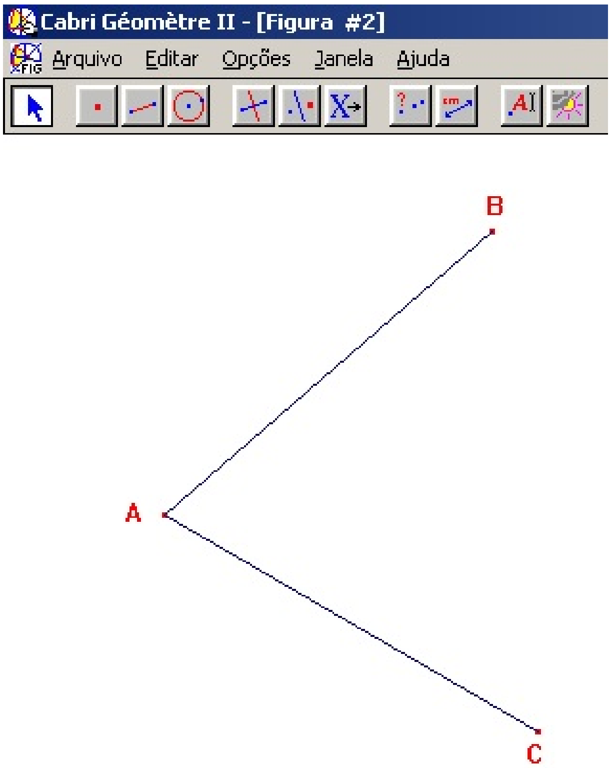
Figura 51 – Anotações do grupo 2 sobre a Atividade 2


QUANDO COLOCAMOS ISTO VÁRIAS VEZES VEMOS QUE UMA RETA VAI SE FORMAR. TAL RETA RESULTARÁ NA FORMAÇÃO DA MEDIATRIZ DE A E B.
DOS PONTOS

4.3.4 Atividade 3 - Bissetriz

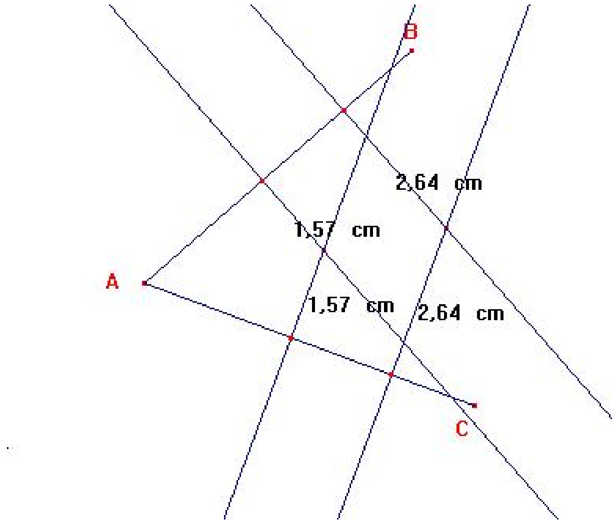
Dado o ângulo ABC, obter o conjunto de pontos que estejam à mesma distância das semi retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$

Figura 52 – Atividade 3



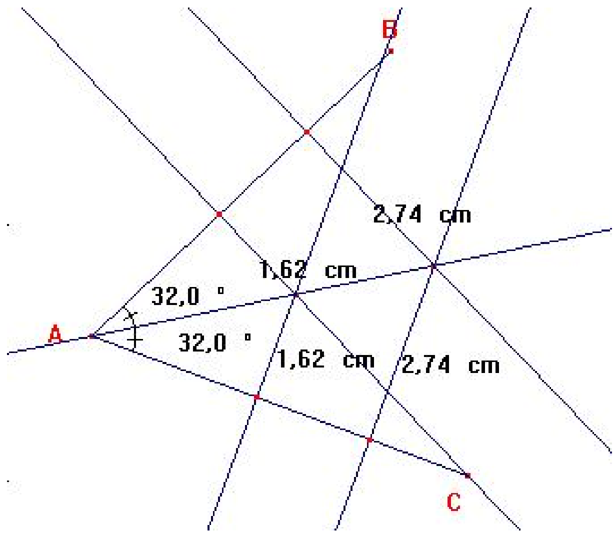
Nesta atividade, iremos mostrar primeiro a ferramenta *perpendicular*, logo após pedir aos alunos para marcar vários pontos na região interna do ângulo e traçar as perpendiculares passando por esse pontos as semi retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ encontrando os pontos de interseção. Após isso iremos pedir que marque as distâncias desse pontos de interseção e o ponto marcado na região interna movendo os pontos de forma que as distâncias sejam as mesmas para as semi retas. Fazendo esse processo com todos pontos marcados.

Figura 53 – Atividade 3



No final iremos identificar a figura formada traçando uma linha por esses pontos marcados e anotar o resultado. Após essa etapa iremos mostrar a ferramenta *Ângulo* e após isso medir os ângulos chegando a conclusão de que é uma linha bissetriz.

Figura 54 – Atividade 3



Comentário e discussão: Nessa atividade uma aluna perguntou por que teria que usar a reta perpendicular, então foi preciso fazer uma intervenção e explicar a lei que estabelece "que a distância entre um ponto e uma reta r será a menor distância a um ponto da reta, quando este ponto pertencer a uma reta perpendicular a reta r". Houve também uma certa dificuldade em mover os pontos (uso do software), para deixá-los a mesma distância para os lados do ângulo.

O grupo 1 chegou ao resultado esperado, traçando a linha perpendicular passando por esses pontos.Um detalhe observado na resposta do grupo é que no efeito de simulação do software (representação dinâmica), perceberam o resultado (lugar geométrico), de imediato, ao ver que a reta gerada pela propriedade do lugar geométrico passava pelo vértice do ângulo. Não necessitaram usar a ferramenta oferecida pelo Cabri para medir ângulo para ver ou testar se era realmente era uma bissetriz.

Figura 55 – Anotações do grupo 1 sobre a Atividade 3

Marcamos 4 pontos na região interna do angulo deixando a mesma distância para os lados do angulo. Podemos observar que a reta que passa por estes pontos formam uma reta bissetriz.

O grupo 2 também se saiu bem nessa atividade, tiveram de inicio a mesma dificuldade do grupo anterior, que foi mover pontos para deixa-los a uma mesma distância. No entanto, esse grupo chegou ao resultado mais rapidamente que o grupo 1, pela anotação do seu texto conforme figura 56, “cortará o ângulo $B\widehat{A}C$ ao meio” indica que perceberam a propriedade do lugar geométrico gerado pela linha bissetriz que estava sendo oferecida pelo software. Foi observado também que não foi usado a ferramenta de medir ângulo para comprovar se realmente era uma bissetriz. O software parece oferecer segurança do conceito de lugar geométrico quando há uma simulação dinâmica sendo oferecida.

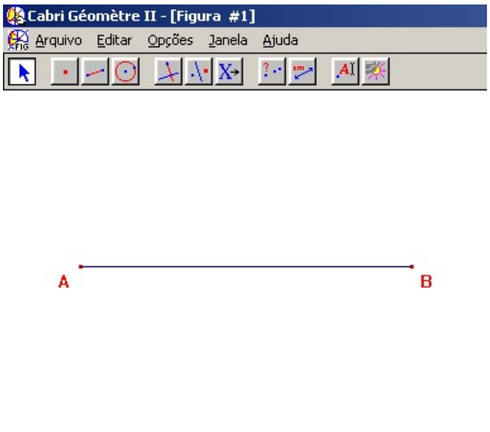
Figura 56 – Anotações do grupo 2 sobre a Atividade 3

AO REALIZAR ESTE PROCESSO, ENCONTRA-SE VÁRIOS PONTOS QUE INTERLIGADOS RESULTARÃO NUMA RETA QUE CORTARÁ O ÂNGULO BÂC AO MEIO. LOGO, ACHAREMOS A BISSETRIZ DESSE ÂNGULO

4.3.5 Atividade 4 - Paralela

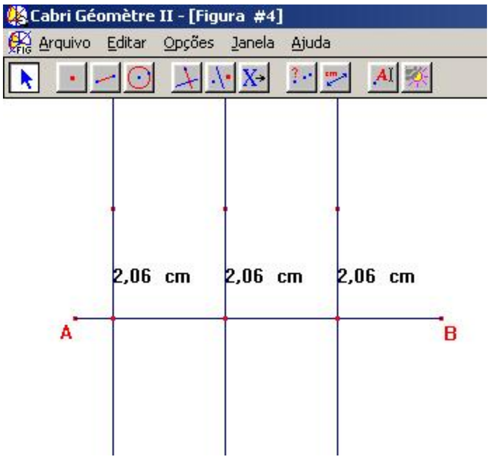
Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta. Encontre o conjunto de pontos do plano que estejam a mesma distância do segmento de reta $\overline{AB}$.

Figura 57 – Atividade 4



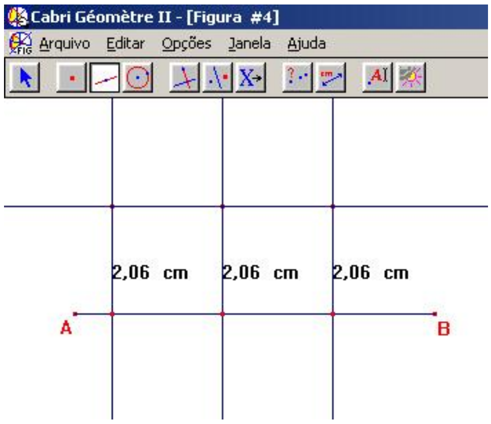
Após orientar os alunos a marcar vários pontos sobre o plano, e traçar as perpendiculares ao segmento de reta passando por esse pontos, pedimos para mover os pontos de forma que fiquem a mesma distância do segmento de reta $\overline{AB}$.

Figura 58 – Atividade 4



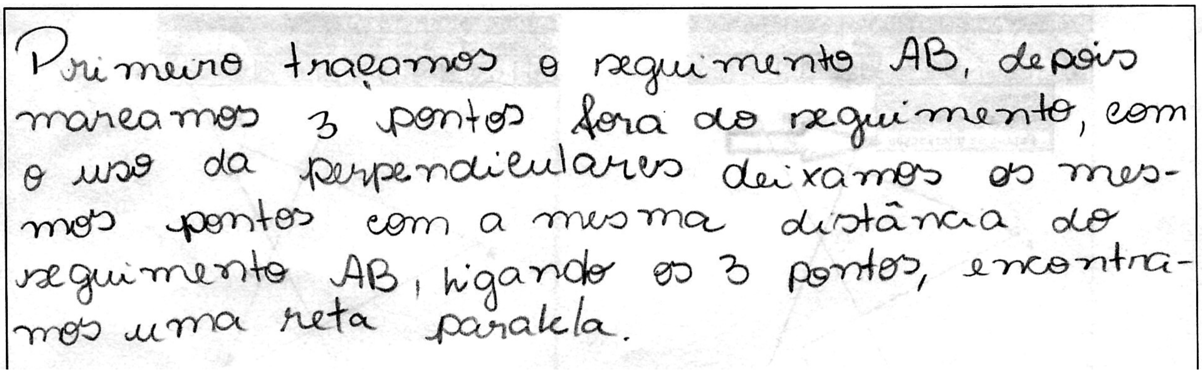
Após isso iremos traçar uma linha por esse pontos e identificar que figura foi formada. Esperamos sem muita dificuldade que eles identifiquem uma linha paralela.

Figura 59 – Atividade 4



Comentário e discussão: Nessa atividade não se esperava dificuldades dos estudantes dos dois grupos, por se tratar, ao nosso ver, de um processo simples que é a visualização dos pontos geométricos que geram a paralela ao segmento $\overline{AB}$ (lugar geométrico). Esse fato foi percebido quando o grupo 1 chegou facilmente ao resultado da atividade achando uma linha paralela, mas que não comentam a generalização desse conhecimento. Pois o software proporciona um efeito da compreensão de generalização do fenômeno, que no caso oferecido, é o lugar geométrico.

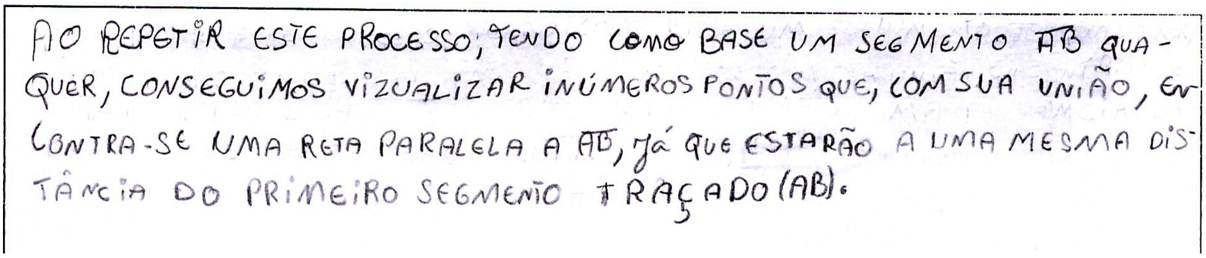
Figura 60 – Anotações do grupo 1 sobre a Atividade 4



Primeiro traçamos o seguimento AB, depois
marcamos 3 pontos fora do seguimento, com
o uso da perpendiculares deixamos os mes-
mos pontos com a mesma distância do
seguimento AB, ligando os 3 pontos, encontra-
mos uma reta paralela.

O grupo 2 também chegou ao resultado muito rápido, antes de traçar a linha paralela, esse grupo já tinha discutido a resposta antes de fazer a construção, apenas na leitura da pergunta. Intuitivamente já imaginavam como seria a resposta, apesar de não tecerem comentário sobre a regularidade da tarefa em que qualquer linha perpendicular a $\overline{AB}$ oferece um ponto que tem a propriedade de ser pertencente ao conjunto de pontos que gera uma reta paralela ao segmento. Nota-se que o entendimento está implícito ao pensamento que produziu as anotações do grupo e que no software apenas comprova o fato, valorizando a simulação oferecida pelo software.

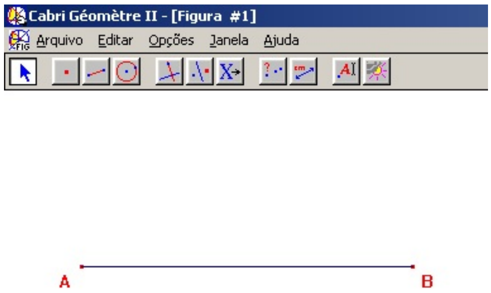
Figura 61 – Anotações do grupo 2 sobre a Atividade 4


AO REPETIR ESTE PROCESSO, TENDO COMO BASE UM SEGMENTO $\overline{AB}$ QUA-
QUER, CONSEGUIMOS VIZUALIZAR INÚMEROS PONTOS QUE, COM SUA UNIÃO, EN-
CONTRA-SE UMA RETA PARALELA A $\overline{AB}$, JÁ QUE ESTARÃO A UMA MESMA DIS-
TÂNCIA DO PRIMEIRO SEGMENTO TRAÇADO (AB).

4.3.6 Atividade 5 - Arco Capaz

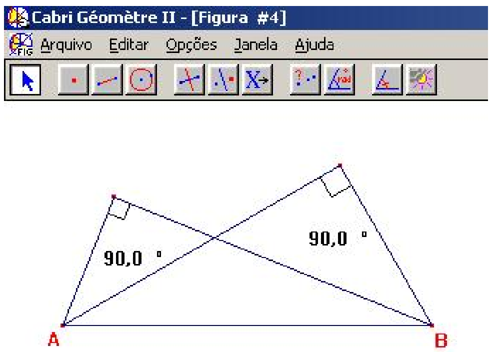
Dado segmento de reta $\overline{AB}$, obter o conjunto de pontos, os quais, de sua localização podemos observar esse segmento sob um ângulo de 90°.

Figura 62 – Atividade 5



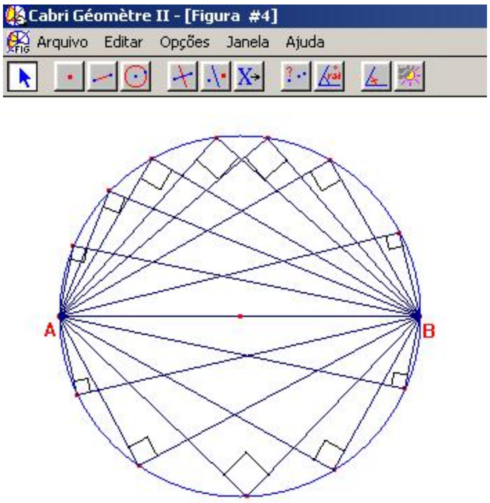
Nessa atividade devemos orientar o que significa 'ver a partir da posição de um ponto', pois isso pode causar dúvidas entre os alunos. Após, marcaremos vários pontos sobre o plano e traçaremos os segmentos para os pontos A e B verificando o ângulo formado. Arrastando o ponto pediremos para que formem o ângulo reto.

Figura 63 – Atividade 5



No final, após colocar vários pontos no plano, e perceberem a característica desses pontos, esperamos que os alunos visualizem de início uma semi-circunferência e posteriormente uma circunferência, relacionando-a a construção como o lugar geométrico de um arco capaz.

Figura 64 – Atividade 5



Comentário e discussão: Nessa atividade observamos a dificuldade que os alunos dos dois grupos tiveram com a atividade para formar o ângulo solicitado, movendo o ponto até formar um ângulo de 90°.

O grupo 1 colocou três pontos e não conseguiu encontrar uma reta que passasse por esses três pontos como resposta. Essa dificuldade levou os estudantes a sugestão de continuar colocando mais pontos e observando a formação deles. Foi então que um dos alunos conseguiu descrever uma semicircunferência como resposta.

Um fato importante foi a surpresa desse resultado, e um questionamento de um dos alunos do grupo, perguntando "*e se fosse outro ângulo também iria encontrar o mesmo resultado?*". Observamos que o grupo concluiu a atividade apenas encontrando a semicircunferência, não observaram a figura como todo. A figura 65, descreve o modo de pensar do grupo.

Figura 65 – Anotações do grupo 1 sobre a Atividade 5

fizemos um seguimento de reta AB, marcamos 3 pontos, formando 3 ângulos com 90° não foi possível encontrar uma reta que passava por eles, depois, colocando mais pontos com o mesmo ângulo, encontramos uma semi circun- ferencia.

O grupo 2 também teve a mesma dificuldade para encontrar o ângulo de 90° que gerava a solução na atividade. Ao mover o ponto, eles deram como resposta um arco de circunferência, isso coloca bem mais próximo ao resultado esperado. Esse grupo não teve tanta dificuldade em chegar ao mesmo resultado em relação ao grupo 1.

Figura 66 – Anotações do grupo 2 sobre a Atividade 5

FAZENDO ESSE PROCEDIMENTO, VEMOS QUE ORIGINAREMOS UM ARCO, POIS JUNTANDO TODOS OS PONTOS MARCADOS RESULTARÁ NO ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA. OU SEJA, TAIS PONTOS PASSARÃO POR ESTE ARCO.

Um fato importante dos dois grupos foi ter usado apenas a parte superior sobre o segmento de reta $\overline{AB}$, não construído nenhum ângulo na parte inferior ao segmento. Mesmo pedindo que marcassem mais pontos, não usaram a parte de inferior ao segmento de reta $\overline{AB}$.

5 Considerações Finais

Essas atividades propostas mostraram a importância da Geometria Dinâmica no processo de aprendizagem relativo a investigação do conceito de Lugar Geométrico. Percebe-se em alguns casos, um reforço do que os estudantes já imaginam ou prevêem acontecer no fenômeno, já em outros casos, parecem ter a segurança de que a ferramenta (software) lhes dará uma compreensão convincente desse mesmo fenômeno.

A ideia inicial do nosso estudo foi mostrar que o uso da geometria dinâmica é um recurso que apresenta as propriedades do Lugar Geométrico de forma mais simples de ser entendida, tornando construções complexas do seu entendimento em uma forma amigável de compreensão e reproduzindo um efeito de veracidade para a generalização de um fenômeno.

No início das atividades, foi observado que as dificuldades dos estudantes em entender os enunciados, foram minimizadas com o uso do software, que lhes propunham alternativas mais rápidas e dinâmicas do traçado que desejavam fazer, isso foi percebido ao longo do desenvolvimento das atividades que de modo rápido trazia um entendimento mais significativo.

Entender o funcionamento e os recursos do Software ajudou bastante os estudantes nas construções, pois conhecendo as possibilidades das ferramentas oferecidas, ficou mais fácil manusear e tirar proveito de como e onde usá-las corretamente. Desse modo, o encontro inicial para mostrar o programa foi de extrema importância. O ambiente dinâmico mostra-se mais atraente ao dar segurança ao saber que está sendo trabalhado, contribuindo de forma significativa as respostas apresentadas. Apesar de em alguns casos se verificar dificuldades no acerto das medidas desejadas, por manuseio do mouse para se localizar ou mover os pontos, recurso oferecido pela precisão que o software apresentava, e que exigia paciência e uma boa coordenação motora, não desanimou os estudantes.

Pelos resultados obtidos foram poucas as situações que não chegaram a uma resposta desejada. Então, consideramos que a pesquisa trouxe elementos que valorizam o estudo, alguns deles previstos e satisfatórios, mostrando assim a importância deste recurso no ensino de geometria para uso em sala de aula, especificamente no estudo do conceito de lugar geométrico.

Referências

ARAÚJO, P. B. *Situaçãos de aprendizagem: a circunferência, a mediatriz e uma abordagem com o Geogebra*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, nov. 2010. Citado na página 39.

BOYER, C.; GOMIDE, E. *História da matemática*. Edgard Blücher, 1996. ISBN 9788521200239. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=cW8OPwAACAAJ>. Citado na página 13.

CONTADOR, P. *Matemática: uma breve história*. LIVRARIA DA FISICA, 2005. (Matemática: uma breve historia). ISBN 9788588325463. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=w8AUdBJQyQ8C>. Citado na página 15.

EECKE, P.; BELGIQUE, F. universitaire de. *Pappus d'Alexandrie. La collection mathématique: œuvre traduite pour la première fois du grec en français*. Librairie Scienctifique et Technique, A. Blanchard, 1982. (Pappus d'Alexandrie. La collection mathématique: œuvre traduite pour la première fois du grec en français, v. 1). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=s9vuAAAAMAAJ>. Citado na página 14.

EVES, H.; DOMINGUES, H. *Introdução à história da matemática*. Editora da Unicamp, 2004. ISBN 9788526806573. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=isVoPgAACAAJ>. Citado na página 13.

FANTI, E. de L. C. Informática e jogos no ensino de matemática. Salvador, nov. 2014. Citado na página 10.

GARBI, G. *A Rainha das Ciências*. Editora Livraria da Física, 2006. ISBN 9788588325616. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=4e1OoI2d7l4C>. Citado na página 13.

GAY, M. R. G. *Matemática 8*. São Paulo: [s.n.], 2016. ISBN 9788516094812. Citado na página 23.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: Uma nova abordagem para o ensino da geometria. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, v. 1, p. 1–14, 1996. Citado na página 39.

GRAVINA, M. A. *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo*. Dissertação (Tese de Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, set. 2001. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/2545>. Citado na página 10.

JÚNIOR, L. P. da S. *Construçẽs Geométricas por Régua e Compasso*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, Abr. 2013. Citado na página 15.

PESSOA, M. d. C. L. R. *Desenho Geométrico*. Salvador: [s.n.], 2005. ISBN 8587243055. Citado na página 17.

WAGNER, E. *Construções Geométricas*. [S.l.]: SBM, 1998. Citado na página 16.

ZUIN, E. de S. L. *Da régua e do compasso: as construç ões geométricas como um saber escolar no Brasil*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, jul. 2001. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/handle/1843/FAEC-85DGQB>. Citado na página 11.