UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

ANDREIA SIMONE DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE SEQUÊNCIAS E SÉRIES E UMA ANÁLISE COMO ESSE CONTEÚDO SE APRESENTA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

RECIFE
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

ANDREIA SIMONE DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE SEQUÊNCIAS E SÉRIES E UMA ANÁLISE COMO ESSE CONTEÚDO SE APRESENTA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Drª. TARCIANA MARIA SANTOS DA SILVA

RECIFE
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586e SILVA, ANDREIA SIMONE DA

Um estudo sobre sequências e séries e uma análise como esse conteúdo se apresenta nos livros didáticos do Ensino Médio / ANDREIA SIMONE DA SILVA. - 2020.

142 f. : il.

Orientadora: TARCIANA MARIA SANTOS DA SILVA.

Inclui referências, apêndice(s) e anexo(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2020.

1. Sequências e séries. 2. Sequências elementares. 3. Síntese dos livros. 4. Atividades realizadas. I. SILVA, TARCIANA MARIA SANTOS DA, orient. II. Título

CDD 510

ANDREIA SIMONE DA SILVA

Um estudo sobre sequências e séries e uma análise como esse conteúdo se apresenta nos livros didáticos do Ensino Médio.

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em ____ /____/_____

BANCA EXAMINADORA

____

Drª. Tarciana Maria Santos da Silva (Orientadora) – UFRPE

____

Dr. Fábio Lima Santos – UFS

____

Drª. Karla Ferreira de Arruda Duque – PROFMAT/UFRPE

À minha família

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado sabedoria e forças para conquistar esse objetivo.

Aos meus pais, Manuel Ermínio da Silva e Teonilde Maria da Silva e à minha filha Andrielly Vitória da Silva Santos pelo carinho apoio e incentivo quando precisei me ausentar deles nos momentos que foram necessários para me dedicar aos estudos.

A todos os meus amigos do PROFMAT 2016, especialmente a José Alexandre, José Ivan, Gustavo Duarte e Roberto Costa que deram a maior força para tentar novamente a seleção e não desistir de concluir o mestrado.

A todos os meus amigos do PROFMAT 2018, especialmente à minha companheira Débora Simone pela inspiração, incentivo, cumplicidade e amizade; à minha amiga Kaliny Ferreira pelo incentivo e ajuda nas construções dos gráficos realizados no Geogebra.

À minha amiga de trabalho, Dulcinea Amorim, pela correção ortográfica dessa dissertação.

A todos os meus professores de PROFMAT, e em especial à minha professora orientadora, Tarciana Maria Santos da Silva, por sua paciência em minha orientação a qual culmina neste trabalho.

Aos membros da banca, professor Fábio Lima Santos e professora Karla Ferreira de Arruda Duque, por terem aceito o convite e pelas contribuições para o aprimoramento do mesmo.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e à Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) que possibilitou meus estudos no mestrado.

À Capes, pelo suporte financeiro.

"Quanto mais aumenta nosso conhecimento,
mais evidente fica nossa ignorância."
(John F. Kennedy)

DECLARAÇÃO

Eu, **ANDREIA SIMONE DA SILVA** declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título **UM ESTUDO SOBRE SEQUÊNCIAS E SÉRIES E UMA ANÁLISE COMO ESSE CONTEÚDO SE APRESENTA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO**, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processo administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador **Drª. TARCIANA MARIA SANTOS DA SILVA**, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 30 de Julho de 2020.

Assinatura: ____

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo sobre sequências e séries, como também, uma análise como esses conteúdos se apresentam nos livros didáticos do ensino médio. Os livros de matemática abordados neste trabalho foram os selecionados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018-2020, os quais tiveram os diversos tipos de contextualização desse tema. A proposta foi realizada com duas turmas do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual buscando investigar qual dos tipos de contextualização os discentes teriam menos dificuldades em encontrar padrões e escritas matemáticas baseado em saberes de sequências, progressões aritméticas e geométricas. Com este estudo, buscamos contribuir na escolha de material didático adequado que contenha atividades propostas que possam estar aliadas ao aprendizado dos alunos bem como um material que sirva como um componente a mais para auxiliar os professores de matemática nas suas aulas.

Palavras-chave: Sequência; Série; Progressão Aritmética e Progressão Geométrica.

Abstract

This work aims to present a study about sequences and series, as well as, an analysis of how these contents are presented in high school textbooks. The mathematics books covered in this work were selected by the 2018-2020 National Textbook Program (PNLD), which had the various types of contextualization of this theme analyzed. The proposal was carried out with two classes from the 1st year of high school in a state public school seeking to investigate which of the types of contextualization the students would have less difficulties in finding patterns and mathematical writings based on knowledge of sequences, arithmetic and geometric progressions. With this study, we seek to contribute to the choice of suitable didactic material that contains proposed activities that can be combined with students' learning as well as material that serves as an additional component to assist math teachers in their classes.

Keywords: Sequence; Serie; Arithmetic Progression and Geometric Progression.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Segundo a Base Nacional Comum Curricular [BRASIL 2017], no Ensino Fundamental, espera-se que os estudantes desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática. Na aula, o contexto pode ser puramente matemático, não é necessário que a questão apresentada seja referente a um fato cotidiano. O importante é que os procedimentos sejam inseridos em uma rede de significados mais ampla na qual o foco não seja o cálculo em si, mas as relações que ele permite estabelecer entre os diversos conhecimentos que o estudante já tem. Dando continuidade a essa estrutura, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática aplicada à realidade e o desenvolvimento de conteúdos que têm um grau de abstração maior, mas que ajudam a explicar o pensamento matemático. Nesse contexto,

> aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do estudante, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação [BRASIL 2002].

Sabendo que o estudo das sequências e das progressões aritméticas e geométricas levam os estudantes do Ensino Médio a vivenciarem seus conhecimentos em situações diversificadas, como em outras áreas de conhecimento, nas atividades tecnológicas e nas atividades cotidianas. Por exemplo, as progressões aritméticas e geométricas são ferramentas importantes no desenvolvimento da matemática financeira, além de estarem envolvidas em pesquisas no ramo da Biologia (cultura de bactérias), em cálculos estatísticos (gráficos em progressões), em Geografia (crescimento populacional), em Física (movimento progressivo) entre outros. Neste trabalho realizamos um estudo sobre sequências, séries, progressões aritméticas, progressões geomé tricas, uma revisão literária dos oito livros sugeridos pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018-2020, do Ensino Médio e propomos uma atividade com questões de diversas áreas, escolhidas a partir da análise realizada nos livros que compõem o PNLD.

1 Sequências e Séries

Neste capítulo desenvolveremos um estudo de sequências e séries numéricas. Estudaremos o limite de uma sequência que nos possibilitará a encontrar o valor de uma soma infinita de números reais denominada série numérica. Para isso, utilizaremos os livros [LIMA 2018] e [MATOS 2016] como referência.

1.1 Sequências

Nesta seção realizaremos um estudo de sequências. Veremos a noção de limite sob sua condição mais simples, o limite de uma sequência, com seus teoremas, bem como as operações com limites de sequências mostrando suas respectivas propriedades.

Desde os nossos primeiros anos escolares trabalhamos com sequências numéricas. Quando entramos no Ensino Médio, são estudadas mais dois tipos de sequências: as progressões aritméticas e as progressões geométricas das quais falaremos no Capítulo 2.

Definição 1.1. Uma **sequência de números reais** é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado o n-ésimo termo da sequência, que também define uma fórmula para o termo geral da sequência.

Escrevemos $(x_1, x_2, \ldots)$ ou (x_n) para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é x_n.

Exemplo 1.2. A função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ associada à sequência dos números pares $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots, 2n, \ldots)$ é dada por $(x_n) = (2n)$.
Dessa forma, a fórmula do termo geral da sequência é $x_n = 2n$.

Exemplo 1.3. A sequência $(3, 4, 5, 16, 7, 64, 9, 256, 11, \ldots)$ é construída por duas sentenças analíticas em que

$$x_n = \begin{cases} 2^n, & \text{se } n \text{ for par} \\ n+2, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Diversas sequências são definidas por uma expressão que permite obter um termo a partir de outro(s). Dizemos que esse tipo de sequência é construída por uma recorrência.

Exemplo 1.4. A sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ conhecida como sequência de Fibonacci em que

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_{n+2} = x_n + x_{n+1} \end{cases}, \quad \text{com} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

A expressão do termo geral x_n, da sequência de Fibonacci é dada por

$$x_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

que é solução de uma equação de recorrência linear. Não iremos fazer essa demonstração, pois não é o foco do nosso trabalho, mas ela pode ser encontrada no livro [MORGADO 2015].

Apesar de sempre existir uma lei de formação definida que permite determinar a sequência, nem sempre seu termo geral é dado por uma fórmula. Por exemplo, a sequência dos números primos é composta pelos números $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots)$.

Não devemos confundir a sequência (x_n) com o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ dos seus termos, pois em conjunto, além de não importar a ordem em que esses elementos estão inseridos, também não existem elementos repetidos. Por exemplo, as sequências $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ e $(0, 0, 1, 1, 0, 1, ...)$ são diferentes, mas o conjunto de seus termos é o mesmo, igual a $\{0, 1\}$. Outro exemplo as sequências $(x_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ \dfrac{2}{n+2}, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$ e $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ são diferentes, pois

$$(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \ldots\right)$$

e

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$$

porém, possui os mesmos conjuntos de termos $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots\right\}$.

Durante o texto usaremos livremente a expressão “n suficientemente grande” para indicar os termos de uma sequência cujos índices são maiores que um n_0 fixado. Normalmente utilizamos essa expressão para afirmar que, dada uma sequência, existe um valor n_0 no qual para todo $n > n_0$, a sequência obedece uma determinada propriedade P referente aos seus termos.

Definição 1.5. Dizemos que duas **sequências** (x_n) e (y_n) são **iguais** se $x_i = y_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definição 1.6. Uma **sequência** (x_n) é **limitada superiormente** se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. M é chamado de cota superior de (x_n).

Definição 1.7. Uma **sequência** (x_n) é **limitada inferiormente** se existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $N \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. N é chamado de cota inferior de (x_n).

Definição 1.8. Uma **sequência** (x_n) é **limitada** quando (x_n) for limitada superiormente e inferiormente. Isso é equivalente a dizer que existe $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 1.9. A condição $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é equivalente a existência de constantes N e M tais que $N \leq x_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se N for uma cota inferior da sequência (x_n), então qualquer número real menor do que N também será cota inferior de (x_n). A maior dessas cotas inferiores é denominada de **ínfimo** de (x_n) e denotada por $inf\{x_n\}$. Analogamente, se a sequência (x_n) for limitada superiormente, ela possui uma infinidades de cotas superiores, sendo a menor delas denominada **supremo** da sequência e denotada por $sup\{x_n\}$.

Exemplo 1.10. A sequência $(x_n) = (n)$ é limitada inferiormente, mas não é limitada superiormente, tendo 1, ou qualquer número real menor do que 1, sendo uma cota inferior de (x_n). A maior das cotas inferiores de (x_n) é 1, logo, $inf\{x_n\} = 1$.

Exemplo 1.11. A sequência $(x_n) = (1 - n^2)$ não é limitada inferiormente, mas é limitada superiormente. Tendo qualquer número não negativo sendo uma cota superior de (x_n) e a menor das cotas superiores é 0, isto é, $sup\{x_n\} = 0$.

Exemplo 1.12. A sequência $(x_n) = \big((-1)^n\big)$ é limitada, tendo como $inf\{x_n\} = -1$ e o $sup\{x_n\} = 1$.

Definição 1.13. Uma **sequência** (x_n) será dita **crescente** quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, **constante** se $x_n = x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e **decrescente** quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a **sequência** será dita **não-decrescente** e $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, será dita **não-crescente**.
As sequências crescentes, decrescentes, não-decrescentes, não-crescentes são denominadas **sequências monótonas**.

Exemplo 1.14. Consideremos a sequência cujo n-ésimo termo é $x_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Podemos escrevê-la como $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots\right)$. Observe que cada termo é menor que seu termo anterior, pois $n+1 > n$, segue que $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ ou seja, $x_{n+1} < x_n$. Além disso, para $n > 0$ implica $x_n = \dfrac{1}{n} > 0$ e para $n \geq 1$ implica $x_n = \dfrac{1}{n} \leq 1$. Assim qualquer termo dessa sequência está localizado no intervalo $(0, 1]$. Portanto, a sequência $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ é limitada e decrescente.

Exemplo 1.15. Analisemos a sequência dos números quadrados perfeitos, ou seja, a sequência cujo n-ésimo termo é $x_n = n^2$. Podemos escrevê-la como $(1, 4, 9, 16, \ldots)$. Observe que cada termo é maior que seu termo anterior. Além disso ela não possui limitante, pois $x_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq n^2 = x_n$. Portanto, a sequência $(x_n) = (n^2)$ é ilimitada e crescente.

Observação 1.16. Como consequência das Definições 1.6, 1.7, 1.8 e 1.13, deduzimos que toda sequência monótona não-decrescente e monótona crescente são limitadas inferiormente pelo seu primeiro termo, enquanto que uma sequência monótona não-crescente e monótona decrescente são limitadas superiormente pelo seu primeiro termo.

Exemplo 1.17. As sequências $x_n = n$ e $y_n = \ln n$ são monótona crescentes e as sequências $z_n = -n^3$ e $w_n = \frac{1}{n}$ são monótona decrescentes. Enquanto a sequência $x_n = (-1)^n$ é não monótona, ou seja, não é crescente e nem decrescente. Percebemos que seus termos são alternados entre positivos e negativos e, por isso, ela recebe o nome de **sequência alternada**.

Definição 1.18. Dizemos que o número real a é **limite da sequência** (x_n) quando, para todo número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$.
Neste caso, escreve-se $\lim x_n = a$ e dizemos que (x_n) é **convergente** e converge para a.

Em símbolos, $\lim x_n = a$ significa qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $|x_n - a| < \varepsilon$.
Observe que

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

é equivalente a

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

ou também a

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

que significa que

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \text{ quando } n > n_0.$$

Assim, dizer que $\lim x_n = a$ significa afirmar que qualquer intervalo aberto de centro a contém todos os termos x_n da sequência, salvo para um número finito de índices n (a saber, os índices $n \leq n_0$).
Uma sequência que não é convergente é denominada **divergente.**

Exemplo 1.19. Seja (x_n) definida por

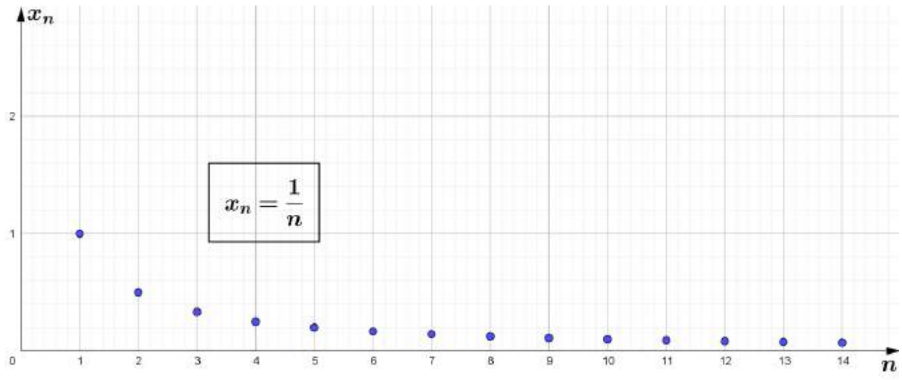
$$(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right),$$

assim, tem-se

$$(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right).$$

O comportamento da sequência $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ pode ser observada na Figura 1. Percebe-se que à medida que o valor de n aumenta, os temos x_n se aproximam cada vez mais do ponto 0, assim, surge um candidato ao limite da sequência, que seria $a = 0$.

Figura 1 – Apresentação: Gráfico da sequência $x_n = \dfrac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$



Fonte: Elaborado pela autora

Exemplo 1.20. Vamos provar, segundo a Definição 1.18, que a sequência $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge para 0.

Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, considere $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n_0 \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$, para qualquer $n > n_0$ tem-se

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

ou seja,

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Portanto, a sequência converge para 0.

Teorema 1.21. *(Unicidade do limite) Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração. Consideremos a sequência (x_n) converge para a, ou seja, $\lim x_n = a$. Dado $b \neq a$, podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos abertos $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $J = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ sejam disjuntos.

Como $\lim x_n = a$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $x_n \in I$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo I e J disjuntos, segue que $x_n \notin J$ para $n > n_0$. Dessa forma, a sequência (x_n) não converge para b, ou seja, b não é limite x_n. $\square$

Definição 1.22. Dada uma sequência $x = (x_n)$, uma **subsequência** de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito estritamente crescente, ou seja,

$\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots\}$ de $\mathbb{N}$. Escrevemos (x_{n_k}) para indicar a subsequência $x' = x|_{\mathbb{N}'}$. A notação $x' = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mostra como uma subsequência pode ser considerada como uma sequência, isto é, uma função cujo domínio é $\mathbb{N}$.

Exemplo 1.23. Dada a sequência $(x_n) = \big((-1)^n\big)$, se $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ for o conjunto dos números pares e $\mathbb{N}$" $\subset \mathbb{N}$ for o conjunto dos números ímpares, então $(1, 1, 1, \ldots) = \big((-1)^{n_k}\big)$ com $n_k \in \mathbb{N}'$ e $(-1, -1, -1, \ldots) = \big((-1)^{n_j}\big)$ com $n_j \in \mathbb{N}$" são subsequências de (x_n).

Teorema 1.24. *Se* $\lim x_n = a$, *então toda subsequência de* (x_n) *converge para o limite* a.

Demonstração. Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n). Como $\lim x_n = a$, então dado qualquer intervalo aberto I de centro em a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n, com $n > n_0$, pertencem a I. Em particular, todos os termos x_{n_k}, com $n_k > n_0$ também pertencem a I. Assim, $\lim x_{n_k} = a$. □

Corolário 1.25. *Se* $\lim x_n = a$ *então, para todo* $c \in \mathbb{N}$, $\lim x_{n+c} = a$.

Demonstração. Note que $(x_{1+c}, x_{2+c}, x_{3+c}, \ldots, x_{n+c}, \ldots)$ é uma subsequência de (x_n), portanto, pelo Teorema 1.24, seu limite é a. □

Observação 1.26. Este corolário nos diz que o limite de uma sequência não se altera quando dela retiramos um número finito de termos. Mais ainda, o Teorema 1.24, nos diz que podemos retirar um número infinito de termos de uma sequência desde que se conserve uma infinidade de índices, de modo a restar uma subsequência, que o limite, ainda, se mantém.

Os Teoremas 1.21 e 1.24, usados simultaneamente, são de grande importância. Se encontrarmos duas subsequências que convergem para limites diferentes estaremos demonstrando que essa sequência é divergente.

Teorema 1.27. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente para $a \in \mathbb{R}$. Tomando $\varepsilon > 0$ na definição de sequência convergente, concluímos que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ se $n > n_0$, isto é, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Tomando $b = min\{x_1, \ldots, x_n, a - \varepsilon\}$ e $c = mx\{x_1, \ldots, x_n, a + \varepsilon\}$ temos que $x_n \in [b, c]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, (x_n) é limitada. □

Observação 1.28. Nem toda sequência limitada é convergente. Por exemplo, a sequência $(x_n) = \big((-1)^n\big)$ é limitada, porém não é convergente, pois as subsequências $(1, 1, 1, \ldots)$ e $(-1, -1, -1, \ldots)$ convergem para 1 e -1, respectivamente.

Pelo Teorema 1.27, conseguimos constatar que, se uma sequência for ilimitada, então ela será divergente.

Teorema 1.29. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência limitada e monótona, consideremos o caso em que é não-decrescente $(x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots)$. Sendo (x_n) limitada, segue que (x_n) é limitada superiormente portanto, podemos considerar $sup\{x_n\} = a$. Agora vamos mostrar que $\lim x_n = a$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior da sequência. Logo, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Como a sequência é monótona (não-decrescente), $n > n_0$ implica $x_{n_0} \leq x_n$ e, portanto $a - \varepsilon < x_n$. Como $x_n \leq a$ para todo n, vemos que $n > n_0$ implica $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon$, ou seja, $\lim x_n = a$.
Semelhantemente, mostra-se para uma sequência não-crescente limitada que $\lim x_n = inf\{x_n\}$. □

Observação 1.30. Toda sequência não-decrescente ou crescente, limitada superiormente é convergente. De maneira análoga, toda sequência não-crescente ou decrescente, limitada inferiormente é convergente.

Exemplo 1.31. Consideremos novamente a sequência $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$. Vimos no Exemplo 1.14 que esta sequência é limitada e decrescente, portanto, pela demonstração do Teorema 1.29, $\lim \frac{1}{n} = inf\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$.

Teorema 1.32. *(Bolzano Weierstrass) Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Vamos mostrar que toda sequência limitada (x_n) possui uma subsequência monótona.
Diremos que um termo x_n da sequência é destacado quando $x_n \geq x_p$ para todo $n < p$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto de índices n tais que x_n é um termo destacado.
Temos duas possibilidades para D.
D é infinito ou D é finito.
i) D é infinito: Escrevamos $D = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ com $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Assim, se $i < j$ então $n_i < n_j$ e, como $n_i \in D$, obtemos que $x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq x_{n_3} \geq \ldots$. Concluímos então, que a subsequência (x_{n_k}) é não crescente.
Por hipótese, a sequência (x_n) é limitada e portanto a subsequência $(x_n)_{x \in D}$ é também limitada. Construímos uma subsequência $(x_n)_{x \in D}$ não-crescente e limitada, pelo Teorema 1.29, a subsequência $(x_n)_{x \in D}$ é convergente.
ii) D é finito: Como D é finito, considere $n_1 \in \mathbb{N}$ maior que todos os $n \in D$. Então x_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 < n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$. Por sua vez, x_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $n_2 < n_3$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Prosseguindo, obtemos uma subsequência crescente. Sendo uma subsequência de uma sequência limitada, também será limitada.
Pelo Teorema 1.29, concluímos a subsequência é convergente. □

Teorema 1.33. *Sejam $(x_n), (y_n)$ e (z_n) três sequências que satisfazem a seguinte condição: $(x_n) \leq (y_n) \leq (z_n)$, para todo n suficientemente grande. Se $\lim x_n = \lim z_n = a$, então a sequência (y_n) é convergente e seu limite é igual a a.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existem n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1$ implica $|x_n - a| < \varepsilon$ e $n > n_2$ implica $|z_n - a| < \varepsilon$, isso é equivalente a $n > n_1$ implica que $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ e que $n > n_2$ implica que $-\varepsilon < z_n - a < \varepsilon$. Consideramos $n_0 = mx\{n_1, n_2\}$.
Assim, $n > n_0$ implica que $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$, ou seja, $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$, isto é, $\lim y_n = a$. □

Observação 1.34. Diversas sequências que não são monótonas são convergentes, por isso o Teorema 1.29 não é o mais geral possível, apesar de nos oferecer um critério para convergência de sequência. Porém é necessário de outro critério mas geral para definir a convergência de sequência. Para isso veremos algumas definições e lemas.

Definição 1.35. Uma sequência de números reais $(x_n), n \in \mathbb{N}$ é dita **sequência de Cauchy** se cumprir a seguinte condição:
Para todo $\varepsilon > 0$, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implica $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Observação 1.36. A sequência (x_n) é de Cauchy significa que seus termos x_m e x_n, para valores de m e n suficientemente grandes, se aproximam arbitrariamente uns dos outros. Já a definição de limite significa que os termos x_n se aproximam arbitrariamente de um número real.

Lema 1.37. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica que $|x_m - x_n| < 1$. Em particular, $n > n_0$ implica que $|x_n - x_{n_0}| < 1$ ou seja, $x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$. Sejam α o menor elemento e β o maior elemento do conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1\}$. Então, $x_n \in [\alpha, \beta]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto, (x_n) é limitada. □

Lema 1.38. *Se uma sequência de Cauchy (x_n) possui uma subsequência convergindo para $a \in \mathbb{R}$, então $\lim x_n = a$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, como (x_n) é uma sequência de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica que $|x_m - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Além disso, como (x_n) possui uma subsequência (x_{n_k}) tal que $\lim x_{n_k} = a$, temos para todo $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica $|x_{n_k} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Assim, se $n > n_0$, escolha um $k > k_0$ qualquer, logo

$$\begin{aligned} |x_n - a| &= |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \\ &\leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim x_n = a$. $\square$

Utilizando a definição da sequência de Cauchy e os Lemas 1.37 e 1.38, podemos chegar ao critério que vai estabelecer se uma sequência é ou não convergente, o Critério de Cauchy.

Teorema 1.39. *(Critério de Cauchy) Uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, for uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência que converge para o limite a, ou seja, $\lim x_n = a$. Isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implica que $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Assim,

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - a + a - x_n| \\ &\leq |x_m - a| + |a - x_n| \\ &= |x_m - a| + |x_n - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso mostra que (x_n) é uma sequência de Cauchy.

Reciprocamente, seja (x_n) uma sequência de Cauchy pelo Lema 1.37 (x_n) é uma sequência limitada. Pelo Teorema 1.32 (Bolzano Weierstrass), (x_n) possui uma subsequência convergente. Considere (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) tal que $\lim x_{n_k} = a$. Pelo Lema 1.38, a sequência (x_n) converge para a. $\square$

Exemplo 1.40. Seja $-1 < a < 1$. A sequência $(a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots)$, formada pelas potências sucessivas de a. Se $a = 0$ temos uma sequência constante, então $\lim 0 = 0$. Se $0 < a < 1$, a sequência é decrescente e limitada, pois multiplicando ambos os membros da desigualdade $a < 1$ por a^n, obtemos $a^{n+1} < a^n$, logo a sequência é decrescente. Como todos os seus termos são positivos, temos $0 < a^n < 1$ para todo n. Considerando o caso $-1 < a < 0$, então a sequência (a^n) possui termos alternados entre positivos e negativos, ou seja, não é monótona mas ainda é limitada pois $|a^n| = |a|^n$, com $0 < |a| < 1$. Afirmamos que $\lim a^n = 0$ para $|a| < 1$. A demonstração dessa afirmação decorre de, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para um n inteiro e se $n > N$ então $|a^n - 0| < \varepsilon$.
De fato, dado $\varepsilon > 0$, considere $N = \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln |a|}$, para qualquer $n > N$ temos

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |a|}$$

Como $ln|a| < 0$, obtemos

$$\begin{aligned} n\ln|a| &< \ln\varepsilon \\ \ln|a|^n &< \ln\varepsilon \\ |a|^n &< \varepsilon \\ |a^n - 0| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim a^n = 0$ para $|a| < 1$.

Entre as sequências divergentes, vamos agora ressaltar aquelas cujos valores se mantêm e se tornam arbitrariamente grandes negativamente ou arbitrariamente grandes positivamente.

Definição 1.41. Dada uma sequência de números reais (x_n), dizemos que "o **limite** de x_n é **mais infinito**" e escrevemos $\lim x_n = +\infty$, para significar que, dado arbitrariamente $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n > A$.
Analogamente, dizemos que "o **limite** de x_n é **menos infinito**" e escrevemos $\lim x_n = -\infty$, para significar que, dado arbitrariamente $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n < -A$.

É importante enfatizar que se $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$, as sequências (x_n) e (y_n) não são convergentes. Note que se $\lim x_n = +\infty$ então a sequência (x_n) é ilimitada superiormente e, portanto, divergente. Analogamente, se $\lim y_n = -\infty$ é ilimitada inferiormente e, portanto, divergente.

Teorema 1.42. *Seja* $\lim x_n = a$. *Se* $b < a$ *então, para todo* n *suficientemente grande, tem-se* $b < x_n$. *Analogamente,* $b > a$ *então* $b > x_n$ *para todo* n *suficientemente grande.*

Demonstração. Tomando $\epsilon = a - b$, como $b < a$, segue que $\epsilon > 0$. Pela Definição 1.18, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$. Como $b = a - \epsilon$, então $n > n_0$ implica $b < x_n$.
A outra afirmação se prova de maneira análoga. □

1.2 Operações com Limites de Sequências

Nesta seção, vamos estudar o procedimento destes limites com relação aos cálculos de adição, subtração, multiplicação e divisão. Visto que, na seção anterior, apresentamos situações suficientes (ser monótona e limitada) para que exista o limite de uma sequência.

Teorema 1.43. *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *for uma sequência limitada (convergente ou não), então* $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$.

Demonstração. Por hipótese (y_n) é uma sequência limitada então existe $c > 0$ tal que $|y_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que $\lim x_n = 0$ então para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica

$|x_n| < \dfrac{\varepsilon}{c}$.
Assim, para $n > n_0$ temos

$$|x_n \cdot y_n - 0| = |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon.$$

Isto é, $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$. □

Teorema 1.44. *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *duas sequências tais que* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$ *então vale as propriedades abaixo:*

1. $\lim(x_n + y_n) = \lim(x_n) + \lim(y_n) = a + b$

2. $\lim(x_n - y_n) = \lim(x_n) - \lim(y_n) = a - b$

3. $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim(x_n) \cdot \lim(y_n) = a \cdot b$

4. $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$*, se* $b \neq 0$

Demonstração.

1. Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1$ implica $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $n > n_2$ implica $|x_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Considere $n_0 = mx\{n_1, n_2\}$, então $n > n_0$ implica $n > n_1$ e $n > n_2$. Assim, $n > n_0$ implica que

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a + b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \\ &\leq |(x_n - a)| + |(y_n - b)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

   Portanto, $\lim(x_n + y_n) = \lim(x_n) + \lim(y_n) = a + b$.

2. A prova desta propriedade é análoga ao Item 1.

3. Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $|x_n \cdot y_n - ab| < \varepsilon$.
   Sabemos que

$$\begin{aligned} x_n \cdot y_n - ab &= x_n \cdot y_n - x_n b + x_n b - ab \\ &= x_n(y_n - b) + (x_n - a)b \end{aligned}$$

   Como toda sequência convergente é limitada, segue que (x_n) é limitada. Além disso, $\lim(y_n - b) = 0$, pois $\lim y_n = b$. De forma análoga $\lim(x_n - a) = 0$. Pelo Teorema 1.43,

$\lim x_n(y_n - b) = 0$ e $\lim(x_n - a)b = 0$.
Pelo Item 1, demonstrado acima, segue

$$\begin{aligned}\lim(x_n y_n - ab) &= \lim[x_n(y_n - b) + (x_n - a)b] \\ &= \lim[x_n(y_n - b)] + \lim[(x_n - a)b] \\ &= 0 + 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim(x_n) \cdot \lim(y_n) = a \cdot b$

4. Vamos analisar $\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}$.
Sabemos que
$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n b - a y_n}{y_n b} = \frac{1}{y_n b}(x_n b - a y_n).$$
Como $\lim(x_n b - a y_n) = \lim(x_n b) - \lim(a y_n)$, pelo Item 2 e que $\lim(x_n b) = ab$ e $\lim(a y_n) = ab$, pelo item 3, temos $\lim(x_n b - a y_n) = ab - ab = 0$.
Agora vamos mostrar que $\dfrac{1}{y_n b}$ é uma sequência limitada para concluir que $\lim\left(\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right) = 0$, pelo Teorema 1.43.
Seja $c = \dfrac{b^2}{2}$, temos $0 < c < b^2$. Como $\lim y_n b = b^2$, segue do Teorema 1.42 que, para todo n suficientemente grande $c < y_n b$ e assim, $\dfrac{1}{y_n b} < \dfrac{1}{c}$. Isso prova que $\dfrac{1}{y_n b}$ é limitada.
Portanto, $\lim\left(\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right) = \lim(x_n b - a y_n)\dfrac{1}{y_n b} = 0$. □

Exemplo 1.45. Seja $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ e $(y_n) = (sen(x))$. Note que $\lim x_n = 0$ conforme o Exemplo 1.31 e (y_n) não converge, mas (y_n) é limitada, pois $-1 \leq senx \leq 1$. Portanto, pelo Teorema 1.43, segue que $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim \dfrac{sen(n)}{n} = 0$.

Observação 1.46. Se $\lim x_n = 0$ e (y_n) não for limitada, o produto $x_n \cdot y_n$ pode convergir ou divergir, por exemplo, $x_n = \dfrac{1}{n}$ e $y_n = 2n$, e $x_n = \dfrac{1}{n}$ e $y_n = n^2$, respectivamente.

Observação 1.47. Resultados análogos aos itens $1, 2$ e 3, do Teorema 1.44, valem para três, quatro ou um número finito qualquer de sequências. Por exemplo, se $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ e $\lim z_n = c$ então $\lim(x_n + y_n + z_n) = a + b + c$ e $\lim(x_n y_n z_n) = abc$. Porém, para certas somas (ou produtos) em que o número de parcelas (ou fatores) é variável e cresce acima de qualquer limite, devemos tomar cuidado de não tentar aplicar o Teorema 1.44.
Por exemplo, seja a sequência

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \text{ (n parcelas)}$$

Então

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ S_3 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1+1+1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

Note que

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

e assim, $\lim S_n = 1.$

Por outro lado, cada parcela $\frac{1}{n}$ tem limite zero. Uma utilização descuidada do Teorema 1.44 levaria a concluir o absurdo que

$$\begin{aligned} \lim S_n &= \lim\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim\left(\frac{1}{n}\right) + \lim\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \lim\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 0 + 0 + \cdots + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

1.3 Séries de Números Reais

Nesta seção faremos uma apresentação concisa sobre séries numéricas. Mostraremos a definição de uma série, situações em que elas sejam ou não convergentes, alguns exemplos de convergência e exibiremos algumas séries especiais.

Desde os nossos primeiros anos escolares trabalhamos operação com adição de duas ou mais parcelas, sendo elas finitas. Quando entramos no Ensino Médio e abordamos soma das progressões geométricas, encontramos soma de infinitos termos. Nas quais os alunos pensam, na maioria das vezes, que é um resultado infinito. Apesar de algumas vezes essa ser a resposta correta, não devemos generalizar, pois ao somar termos infinitos podemos encontrar um número real como resultado. Essa “soma infinita” de números que chamaremos de série.

Definição 1.48. Seja (a_n) uma sequência de números reais. A partir dela, formaremos uma nova sequência (S_n) cujos termos são dados por

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

A sequência (S_n) denomina-se **série numérica** associada à sequência a_n. Os números a_n, $n \geq 1$ são denominados **termos** da série; a_n é o **termo geral** da série. Nos referimos a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

como **soma parcial de ordem** n da série. O limite da série, quando existir (finito ou infinito), denomina-se **soma da série** e é indicado por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Se a soma for finita, diremos que a série é **convergente**. Se a soma for infinita (∞ ou $-\infty$) ou se o limite não existir, diremos que a série é **divergente**.

O símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ foi usado para indicar a soma da série. Por abuso de notação, tal símbolo será utilizado para representar a própria série. Dessa forma, falaremos da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ entendendo-se que se trata da série cuja soma parcial de ordem n é $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Observação 1.49. Às vezes é conveniente considerar séries que começam em a_0 em vez de a_1, isto é, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Podemos encontrar vários exemplos de séries infinitas convergentes, um deles pode ser visto no Ensino Básico no estudo de dízima periódica, frações e números decimais. Como veremos no Capítulo 2, Exemplo 2.32

$$\begin{aligned} 0,77777\ldots &= 0,7 + 0,07 + 0,007 + 0,0007 + 0,00007 + \cdots \\ &= \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10^n}. \end{aligned}$$

Em que cada parcela da série é um termo de progressão geométrica(que será definida posteriormente) de razão $\frac{1}{10}$.

Exemplo 1.50. A soma $1+2+3+4+\cdots+n+\cdots$ se representa por $\sum_{n=1}^{\infty} n$ e para cada n seja S_n a soma finita $S_n = 1+2+3+4+\cdots$ obtemos

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 = 1\\
S_2 &= a_1 + a_2 = 1+2 = 3\\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1+2+3 = 6\\
&\vdots\\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 1+2+3+\cdots+n
\end{aligned}$$

No qual vamos mostrar no Capítulo 2 que $S_n = 1+2+3+\cdots+n$ é a soma dos n primeiros termos de uma progressão arimética, em que aplicando (2.12) encontraremos

$$S_n = \frac{(1+n).n}{2}$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \lim S_n = \lim \left[\frac{(1+n).n}{2}\right] = \infty$$

Portanto a série é divergente, não existe $\lim S_n$.

Exemplo 1.51. A soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ se representa por $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ e para cada n seja S_n a soma finita $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ segue que

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 = \frac{1}{2}\\
S_2 &= a_1 + a_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}\\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8}\\
S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = \frac{15}{16}\\
&\vdots\\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

No qual vamos mostrar no Capítulo 2 que $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, em que aplicando o Teorema 2.13, obteremos

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right] \\
S_n &= \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}}\right] \\
S_n &= 1 - \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= \lim S_n \\
&= \lim \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \\
&= \lim 1 - \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= 1 - 0 = 1.
\end{aligned}$$

Portanto a série é convergente, o $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim S_n = 1$.

Esse exemplo é bem adequado para o aluno do Ensino Médio, retornaremos com ele na parte de progressão geométrica, Exemplo 2.31.

Exemplo 1.52. A soma $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, se representa por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ e para cada n seja S_n a soma finita

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 = 1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 = 1 + (-1) = 0 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1 + (-1) + 1 = 1 \\
S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \cdots + a_n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots \\
S_n &= \begin{cases} 0, & \text{se n for par} \\ 1, & \text{se n for ímpar} \end{cases}
\end{aligned}$$

Como o $\lim(S_n)$ não existe, a sequência (S_n) é divergente, consequentemente, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ também é divergente.

Teorema 1.53. *(Critério do n-ésimo termo) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então o termo geral a_n tem limite zero.*

Demonstração. Sendo (S_n) a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dada por

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&\vdots \\
S_{n-1} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} \qquad (1.1)\\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Subtraindo (1.1) de (1.2), temos

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, segue que a sequência (S_n) converge para um valor S, podemos considerar (S_{n-1}) uma subsequência de (S_n) que converge para o mesmo valor S. Assim, $\lim(a_n) = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0.$ □

Observação 1.54. O critério contido no Teorema 1.53 constitui um critério de divergência. Em que, se o termo geral não tende a zero, a série diverge. Porém, se o termo geral tender a zero, a série pode ou não convergir.

Exemplo 1.55. A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot r^{n-1}$.
Os números α e r que figuram na série geométrica são chamados de **coeficientes** e **razão** da série, respectivamente, ambos são diferentes de zero. O termo geral da série é $a_n = \alpha \cdot r^{n-1}$ e as somas parciais

$$\begin{aligned}
S_1 &= \alpha \cdot r^0 = \alpha \\
S_2 &= \alpha \cdot r^0 + \alpha \cdot r^1 = \alpha + \alpha \cdot r \\
S_3 &= \alpha \cdot r^0 + \alpha \cdot r^1 + \alpha \cdot r^2 = \alpha + \alpha \cdot r + \alpha \cdot r^2 \\
&\vdots \\
S_n &= \alpha + \alpha \cdot r + \alpha \cdot r^2 + \cdots + \alpha \cdot r^{n-1} \\
S_{n+1} &= \alpha + \alpha \cdot r + \alpha \cdot r^2 + \cdots + \alpha \cdot r^{n-1} + \alpha \cdot r^n
\end{aligned}$$

Para estudar a convergência da série analisaremos o valor da razão r.
1º) Caso: Se $|r| \geq 1,$ vamos usar a relação S_{n+1} - S_n, isto é

$$S_{n+1} - S_n = \alpha \cdot r^n \tag{1.3}$$

Analisando separadamente temos dois casos a considerar
i) Se $r = \pm 1$ em (1.3), obtemos

$$|S_{n+1} - S_n| = |\alpha \cdot r^n| = |\alpha| \cdot |r^n| = |\alpha|.$$

ii) Se $|r| > 1$ em (1.3), encontramos

$$|S_{n+1} - S_n| = |\alpha \cdot r^n| \to \infty.$$

Nos dois casos a sequência (S_n) diverge, pois as distâncias $|S_{n+1} - S_n|$ não se aproximam de zero. Dessa forma, a série geométrica diverge.

2º) Caso: $|r| < 1$, usaremos a relação

$$\begin{aligned}
(1-r)S_n &= S_n - rS_n \\
&= \alpha + \alpha \cdot r + \alpha \cdot r^2 + \cdots + \alpha \cdot r^{n-1} - \alpha \cdot r - \alpha \cdot r^2 - \cdots - \alpha \cdot r^{n-1} - \alpha \cdot r^n \\
&= \alpha - \alpha \cdot r^n \\
&= \alpha(1 - r^n)
\end{aligned}$$

Implica

$$(1-r)S_n = \alpha(1-r^n)$$

Ou seja

$$S_n = \frac{\alpha(1-r^n)}{1-r}$$

Tomando limite em ambos os membros da igualdade

$$\begin{aligned}
\lim S_n &= \lim \frac{\alpha(1-r^n)}{1-r} \\
&= \frac{\alpha}{1-r} \lim(1-r^n) \\
&= \frac{\alpha}{1-r}(\lim 1 - \lim r^n)
\end{aligned}$$

Pelo Exemplo 1.40, temos $-1 < r < 1$ então $\lim r^n = 0$, assim

$$\begin{aligned}
\lim S_n &= \frac{\alpha}{1-r}(1-0) \\
&= \frac{\alpha}{1-r}
\end{aligned}$$

Portanto, a série geométrica converge e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot r^{n-1} = \frac{\alpha}{1-r}$ para $|r| < 1$.

Com isso, escrevemos o seguinte Teorema para futuras referências.

Teorema 1.56. *A série geométrica* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot r^{n-1}$, *com* $\alpha \neq 0$, *é convergente se* $|r| < 1$ *e sua soma será*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot r^{n-1} = \frac{\alpha}{1-r}.$$

Se $|r| \geqslant 1$, *a série geométrica será divergente.*

Exemplo 1.57. A série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

O termo geral da série é $\frac{1}{n}$, e as somas parciais são

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
S_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
&\vdots \\
S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\
&\vdots \\
S_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

e, portanto

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{1.4}$$

Se a sequência (S_n) fosse convergente, então a subsequência (S_{2n}) também seria, teria o mesmo limite que (S_n) e assim, teríamos

$$\lim(S_{2n} - S_n) = 0.$$

Isso é impossível, pois a desigualdade em (1.4) nos afirma que

$$\lim(S_{2n} - S_n) \geq \frac{1}{2}$$

caso o limite existisse. Com isso constatamos que a série harmônica é divergente.

Exemplo 1.58. Série telescópica $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$.

Uma série telescópica tem sua soma parcial

$$S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_n - b_{n+1})$$

Reagrupando

$$\begin{aligned}
S_n &= b_1 + (b_2 - b_2) + (b_3 - b_3) + \cdots + (b_n - b_n) + (-b_{n+1}) \\
S_n &= b_1 - b_{n+1}.
\end{aligned}$$

Usando limite em ambos os membros, temos

$$\lim S_n = \lim(b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim b_{n+1}.$$

Observação 1.59. Se a sequência (b_n) convergir para um número a, então segue que a sequência (S_n) converge para $b_1 - a$, sendo este o valor da soma de série. Caso a sequência (b_n) divergir, o mesmo ocorre com as somas parciais (S_n).

Dessa forma, a série telescópica $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ é convergente se, e somente se, a sequência (b_n) o é e, neste caso, a soma da série é

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim b_n. \tag{1.5}$$

Exemplo 1.60. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ pode ser vista como uma série telescópica, basta decompor em frações parciais

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Como a sequência $(b_n) = \frac{1}{n}$ converge para 0, então por (1.5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1.$$

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente de soma 1.

Teorema 1.61. *(Critério de comparação) Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries de termos não negativos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq c \cdot b_n$ para todo $n > n_0$ então a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, enquanto a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Demonstração. Sejam (S_n) e (T_n) as sequências das somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente, são não decrescentes, pois as séries são formadas por termos não negativos, isso nos diz que (S_n) e (T_n) são sequências monótonas.
Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente, então a sequência (T_n) é convergente, portanto (T_n) é limitada como

$a_n \leq c \cdot b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $S_n \leq c \cdot T_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Ou seja $0 \leq S_n \leq T_n$, para todo n, então (S_n), além de monótona, é também limitada e, portanto, convergente. Logo, a série correspondente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergente, logo a sequência (S_n) é divergente, e além disso, (S_n) é monótona, concluímos que (S_n) é ilimitada (pois se (S_n) fosse limitada pelo fato de ser monótona, (S_n) seria convergente). Nesse caso, vale também $S_n \leq c \cdot T_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, (T_n) é ilimitada e monótona, portanto, (T_n) é divergente. Concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente. $\square$

Observação 1.62. O Teorema acima continua válido se $a_n \leq c \cdot b_n$ para n suficientemente grande.

Exemplo 1.63. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ é divergente.

De fato, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $n^{1/2} = \sqrt{n}$ e que $n \geq \sqrt{n} = n^{1/2}$ implica que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^{1/2}}$.
Pelo Exemplo 1.57, a série harmônica é divergente, segue do Teorema 1.61 que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

é também divergente.

2 Sequências Elementares

Neste capítulo faremos a apresentação das características das sequências aritméticas e geométricas geralmente estudadas no Ensino Médio que apresentam padrões de comportamentos singulares, conhecidas como algumas das sequências elementares.

2.1 Progressão Aritmética

Definição 2.1. Uma sequência de números reais (a_n) é denominada **progressão aritmética (PA)** quando cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se ao termo anterior, uma constante r que será chamada de **razão** da progressão.

Denotamos da seguinte forma

$$a_{n+1} = a_n + r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

em que o primeiro termo a_1 e a razão r são números reais dados.

Podemos observar na equação (2.1), que uma progressão aritmética é um caso particular de uma sequência de recorrência, na qual quando conhecidos os valores do primeiro termo a_1 e da razão r, podemos determinar os demais termos. Se conhecermos apenas a razão, nossa progressão aritmética não estará completamente definida, pois teremos diversas progressões aritméticas para a equação de recorrência condicionadas ao valor inicial.

Proposição 2.2. *Uma progressão aritmética (a_n), dada como (2.1), é crescente se e, somente se, $r > 0$.*

Demonstração. Se a sequência (a_n) é crescente, de acordo com a Definição 1.13

$$a_{n+1} > a_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Por (2.1),

$$\begin{aligned} a_n + r &> a_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ a_n + r - a_n &> 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ r &> 0 \end{aligned}$$

Por outro lado, se r é positivo então a progressão aritmética é crescente, pois como

$$0 < r$$

Implica

$$a_n \quad < \quad a_n + r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } r > 0$$

ou seja

$$a_n < a_{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Proposição 2.3. *Uma progressão aritmética* (a_n)*, dada como (2.1), é constante se e, somente se,* $r = 0$.

Demonstração. Se cada termo da sequência (a_n) é igual ao termo anterior, temos

$$a_{n+1} = a_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Por (2.1),

$$\begin{aligned} a_n + r &= a_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ a_n + r - a_n &= 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ r &= 0 \end{aligned}$$

Por outro lado, r é nulo então a progressão aritmética é constante, pois se $r = 0$, temos

$$a_n + r = a_n + 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Implica

$$a_{n+1} = a_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Proposição 2.4. *Uma progressão aritmética* (a_n)*, dada como (2.1), é decrescente se e, somente se,* $r < 0$.

Demonstração. Se uma sequência (a_n) é decrescente, de acordo com a Definição 1.13

$$a_{n+1} < a_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Por (2.1),

$$\begin{aligned} a_n + r &< a_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ a_n + r - a_n &< 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ r &< 0 \end{aligned}$$

Por outro lado, se r é negativo então a progressão aritmética é decrescente, pois como

$$0 > r$$

Implica

$$a_n \quad > \quad a_n + r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } r < 0$$

ou seja

$$a_n > a_{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Exemplo 2.5. As sequências

$$(4, 8, 12, 16, 20, \ldots)$$

$$(42, 37, 32, 27, 22, \ldots)$$

e

$$(7, 7, 7, 7, 7, \ldots)$$

são exemplos de progressões aritméticas com razão $r = 4$, $r = -5$ e $r = 0$; classificadas respectivamente como crescente, decrescente e constante.

A terminologia "progressão aritmética" para esse tipo de sequência se justifica pois, em toda essas sequências, cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre os termos anterior e posterior.

Proposição 2.6. *Se (a_n) é uma progressão aritmética, então cada termo dessa sequência, a partir do segundo, é a média aritmética entre o anterior e o posterior.*

Demonstração. Seja a progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ de razão r, os termos consecutivos a_{n-1}, a_n e a_{n+1} são tais que para $n > 1$

$$a_n = a_{n-1} + r \tag{2.2}$$

e

$$a_{n+1} = a_n + r \tag{2.3}$$

Subtraindo membro a membro as equações (2.2) e (2.3), temos

$$a_n - a_{n+1} = a_{n-1} - a_n$$

ou seja,

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Portanto, em toda progressão aritmética, cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre os termos anterior e posterior. $\square$

Reconhecendo o primeiro termo a_1, a razão r e o índice n de um termo desejado e aplicando a fórmula de recorrência (2.1) pela qual se define uma progressão aritmética, temos

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando essas $n-1$ igualdades, temos

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n &= a_1 + r + a_2 + r + a_3 + r + \cdots + a_{n-2} + r + a_{n-1} + r \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + \underbrace{r + r + r + \cdots + r}_{n-1} \end{aligned}$$

Somando $-(a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1})$ a ambos os membros, obtemos

$$a_n = a_1 + (n-1)r \tag{2.4}$$

A expressão (2.4) é denominada **termo geral** da progressão aritmética.

Esse fato mostra que se (a_n) é uma progressão aritmética de razão r, então para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Exemplo 2.7. Considerando a progressão aritmética

$$(10, 16, 22, 28, 34, \ldots)$$

vamos determinar seu centésimo termo, ou seja, vamos encontrar a_{100}.
Temos o primeiro termo $a_1 = 10$, a razão $r = 6$ e o número de termos da progressão aritmética $n = 100$ na expressão (2.4), encontramos o centésimo termo.
Ou seja,

$$\begin{aligned} a_{100} &= 10 + (100-1) \cdot 6 \\ a_{100} &= 10 + 99 \cdot 6 \\ a_{100} &= 10 + 594 \\ a_{100} &= 604 \end{aligned}$$

Logo, o 100^{o} termo da progressão aritmética é 604.

Exemplo 2.8. (Uerj-adaptado)Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

- primeiro dia - corrida de 6 km;

- dias subsequentes - acréscimos de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior.

Quantos quilômetros o atleta percorrerá no décimo dia se seguir a risca o treino?
Como o plano de corrida corresponde a uma progressão aritmética com o primeiro termo $a_1 = 6$, razão $r = 2$ e como queremos saber quantos quilômetros o atleta percorrerá no 10º dias, temos a quantidade de termos $n = 10$. Substituindo na expressão (2.4), encontremos a quilometragem que o atleta percorrerá.
Ou seja,

$$\begin{aligned} a_{10} &= 6 + (10 - 1) \cdot 2 \\ a_{10} &= 6 + 9 \cdot 2 \\ a_{10} &= 6 + 18 \\ a_{10} &= 24 \end{aligned}$$

Logo, no décimo dia o maratonista percorrerá 24 km.

Uma progressão aritmética também fica bem definida se tivermos qualquer termo conhecido e sua razão r.

Proposição 2.9. *Considere uma progressão aritmética (a_n) de razão r, então para todo a_k fixado encontramos a_n usando a fórmula $a_n = a_k + (n - k)r$.*

Demonstração. Seja a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos

$$a_k = a_1 + (k - 1)r$$

ou seja

$$\begin{aligned} a_1 &= a_k - (k - 1)r \\ a_1 &= a_k - kr + r \end{aligned} \tag{2.5}$$

Substituindo (2.5) na expressão (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= a_k - kr + r + (n - 1)r \\ a_n &= a_k - kr + r + nr - r \\ a_n &= a_k - kr + nr \\ a_n &= a_k + nr - kr \\ a_n &= a_k + (n - k)r \end{aligned}$$

□

Observe que a expressão (2.4) é um caso particular da Proposição 2.9.

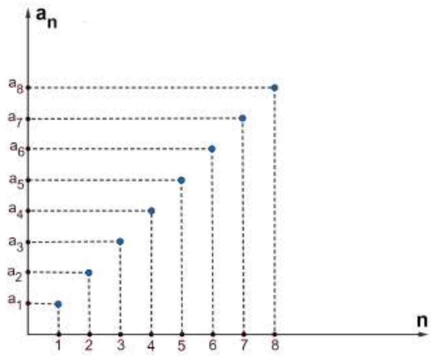
Um instrumento muito comum nos estudos sobre limite é a representação gráfica de uma sequência, que através da sua observação, é uma boa maneira de levar aos alunos do Ensino

Médio, examinar o limite do termo geral, utilizando o auxílio visual, para melhor compreender quando n tendendo ao infinito, estabelecendo a relação de convergência ou divergência, ou seja:

$$\lim a_n = \lim[a_1 + (n-1)r]$$

Seja (a_n) uma progressão aritmética, representa no plano cartesiano os pontos (n, a_n), percebe-se que os termos de (a_n) formam uma sequência de pontos colineares no plano, com espaços iguais sobre uma reta, conforme podemos verificar nos gráficos a seguir.

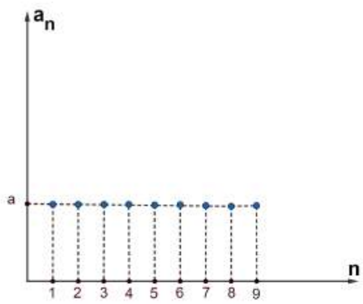
Figura 2 – Gráfico de uma progressão aritmética crescente



Fonte: [Balestri 2016, p. 183]

Se $r > 0$, então (a_n) é crescente e, portanto, a sequência é limitada inferiormente. Observamos que $\lim a_n = \infty$. Logo, a sequência diverge.

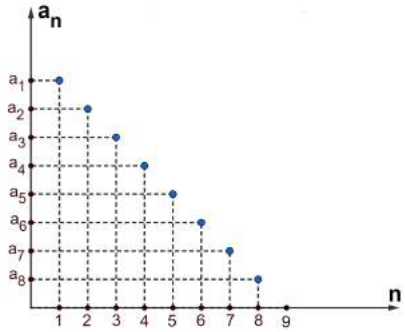
Figura 3 – Gráfico de uma progressão aritmética constante



Fonte: [Balestri 2016, p. 183]

Se $r = 0$, então (a_n) é constante e, portanto, a sequência é limitada. Observamos que $\lim a_n = a$. Logo, a sequência converge.

Figura 4 – Gráfico de uma progressão aritmética decrescente



Fonte: [Balestri 2016, p. 183]

Se $r < 0$, então (a_n) é decrescente e, portanto, a sequência é limitada superiormente. Observamos que $\lim a_n = -\infty$. Logo, a sequência diverge.

Observação 2.10. A representação geométrica de uma progressão aritmética é formada por pontos pertencentes ao gráfico de uma função afim e converge quando a razão for igual a zero, em que todos os termos da progressão aritmética são iguais a um mesmo número e a convergência é para esse número.

Proposição 2.11. *Em uma progressão aritmética, o termo geral é dada por um polinômio em n.*

Demonstração. Seja a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n-1)r = a_1 + nr - r$, ou seja, $a_n = rn + (a_1 - r)$.
Temos dois casos a considerar:

Se $r \neq 0$, o polinômio é de grau 1.
Se $r = 0$, o polinômio é de grau 0.

Então, se (a_n) é uma progressão aritmética, onde $a_n = an + b$, sendo assim $a = r$ e $b = a_1 - r$, ou seja $a_1 = b + r$, como $a = r$, temos $a_1 = a + b$. $\square$

Observando os gráficos da progressão aritmética (Figura 2 e 4), não faz sentido falar em soma dos termos infinitos, pois essas sequências são divergentes e, portanto, a soma de seus termos é também divergente. Porém, é possível calcular uma quantidade finita de termos de uma progressão aritmética qualquer. A proposição a seguir nos permite calcular a soma dos n primeiros termos.

Proposição 2.12. *Seja (a_n) uma progressão aritmética qualquer. Indicada por S_n, a soma dos n primeiros termos da sequência (a_n) é dada por*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Demonstração. Considere os n primeiros termos da progressão aritmética (a_n).
Podemos indicar a soma dos n primeiros termos S_n ordenando de forma crescente

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \tag{2.6}$$

e de forma decrescente

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 \tag{2.7}$$

Somando membro a membro as expressões (2.6) e (2.7), temos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Por outro lado, a partir de (2.1), temos
$a_1 + a_n = a_1 + (a_1 + (n-1)r) = 2a_1 + nr - r = 2a_1 + (n-1)r$
$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + r) + (a_1 + (n-1-1)r) = a_1 + r + a_1 + nr - 2r = 2a_1 + nr - r = 2a_1 + (n-1)r$
$\vdots$
$a_{n-1} + a_2 = (a_1 + (n-1-1)r) + (a_1 + r) = a_1 + nr - 2r + a_1 + r = 2a_1 + nr - r = 2a_1 + (n-1)r$
$a_n + a_1 = a_1 + (n-1)r + a_1 = 2a_1 + nr - r = 2a_1 + (n-1)r$
Podemos observar que todas as parcelas da soma anterior são iguais.
Portanto,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Equivalente a

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n\ vezes}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

Consequentemente,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

□

Exemplo 2.13. Voltando ao Exemplo 2.8, do treino diário para o condicionamento do maratonista que se recupera de uma contusão, qual a distância total percorrida pelo atleta nesses 10 dias de treinamento?
Temos que, o total percorrido pelo atleta é a soma das corridas desses 10 dias, ou seja, a soma dos termos de uma progressão aritmética com primeiro termo $a_1 = 6$, o último termo $a_{10} = 24$ e a quantidade de termos $n = 10$. Substituindo na Proposição 2.12, encontraremos o total de quilometragem feita pelo atleta nesses 10 dias.

Ou seja

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{(6+24)\cdot 10}{2} \\ S_{10} &= \frac{30\cdot 10}{2} \\ S_{10} &= \frac{300}{2} \\ S_{10} &= 150 \end{aligned}$$

Logo, o total percorrido pelo atleta nesses 10 dias será de 150 km.

2.2 Progressão Geométrica

Definição 2.14. Uma sequência de números reais (a_n) é denominada **progressão geométrica (PG)** quando cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se ao termo anterior, uma constante q que será chamada de **razão** da progressão geométrica.

Denotamos da seguinte forma

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \tag{2.8}$$

em que o primeiro termo a_1 e a razão q são números reais dados.

Como podemos observar na progressão geométrica, a equação (2.8) também é um caso particular de uma sequência de recorrência, no qual quando conhecidos os valores do primeiro termo a_1 e da razão q, podemos determinar os demais termos. Se conhecermos apenas a razão, nossa progressão geométrica não estará completamente definida, pois teremos diversas progressões geométricas para a equação de recorrência condicionadas ao valor inicial.

Proposição 2.15. *Uma progressão geométrica (a_n), dada como (2.8), é crescente se seus termos são positivos e a razão $q > 1$ ou se seus termos são negativos e a razão $0 < q < 1$.*

Demonstração. Analisando separadamente os dois casos

Se $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $q > 1$, temos

$$q > 1$$

Multiplicando por a_n em ambos os membros da desigualdade

$$a_n \cdot q > a_n$$

Por (2.8)

$$a_{n+1} > a_n$$

Se $a_n < 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $0 < q < 1$, temos

$$0 < q < 1$$

Multiplicando por a_n em ambos os membros da desigualdade

$$0 > a_n \cdot q > a_n$$

Por (2.8)

$$0 > a_{n+1} > a_n \qquad \square$$

Proposição 2.16. *Uma progressão geométrica (a_n), dada como (2.8), é decrescente se seus termos são positivos e a razão $0 < q < 1$ ou se seus termos são negativos e a razão $q > 1$*

Demonstração. Analisando separadamente os dois casos
Se $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $0 < q < 1$, temos

$$0 < q < 1$$

Multiplicando por a_n em ambos os membros da desigualdade

$$0 < a_n \cdot q < a_n$$

Por (2.8)

$$0 < a_{n+1} < a_n$$

Se $a_n < 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $q > 1$, temos

$$q > 1$$

Multiplicando por a_n em ambos os membros da desigualdade

$$a_n \cdot q < a_n$$

Por (2.8)

$$a_{n+1} < a_n$$

$\square$

Proposição 2.17. *Uma progressão geométrica (a_n), de termos não nulos, dada como (2.8) é constante se e, somente se, sua razão $q = 1$*

Demonstração. Se cada termo da sequência (a_n) é igual ao termo anterior, temos

$$a_{n+1} = a_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Por (2.8)

$$a_n \cdot q = a_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Ou seja

$$q = 1$$

Por outro lado, se $q = 1$ então a progressão geométrica é constante, pois se

$$q = 1$$

Então

$$a_n \cdot q = a_n \cdot 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Por (2.8)

$$a_{n+1} = a_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

□

Observação 2.18. Caso o primeiro termo $a_1 = 0$, então todos os termos serão zero independente do valor da razão q, ou seja, q é qualquer valor real.

Observação 2.19. Além dessas, quando $q < 0$, um termo da progressão geométrica terá sinal contrário ao do termo anterior. Essas progressões geométricas são chamadas alternantes ou oscilantes. E quando $q = 0$ e $a_1 \neq 0$, tem-se $a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = 0$ e as progressões geométricas são chamadas estacionárias.

Exemplo 2.20. As sequências

$$(8, 32, 128, 512, \ldots)$$

$$(-3, -9, -27, -81, -243, \ldots)$$

$$(5, -15, 45, -135, 405, \ldots)$$

$$(4, 4, 4, 4, 4, \ldots)$$

e

$$(7, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$

são exemplos de progressões geométricas com $a_1 = 8$ e razão $q = 4$; $a_1 = -3$ e razão $q = 3$; $a_1 = 5$ e razão $q = -3$; $a_1 = 4$ e razão $q = 1$; $a_1 = 7$ e razão $q = 0$; classificadas respectivamente como crescente, decrescente, oscilante, constante e estacionária.

A terminologia "progressão geométrica" para esse tipo de sequência se justifica pois, em todas essas sequências, cada termo a partir do segundo, é a média geométrica entre os termos anterior e posterior.

Proposição 2.21. *Se (a_n) é uma progressão geométrica, então cada termo dessa sequência, a partir do segundo, é a média geométrica entre o anterior e o posterior.*

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência que atende (2.8). Fixe um termo a_n, com $n \geq 2$, considerando três termos consecutivos a_n, a_{n+1} e a_{n+2}, temos

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

e

$$a_{n+2} = a_{n+1} \cdot q$$

Ou seja

$$a_{n+2} = a_n \cdot q^2$$

Implica que

$$\begin{aligned} a_n \cdot a_{n+2} &= a_n \cdot a_n \cdot q^2 \\ &= (a_{n+1})^2 \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} (a_{n+1})^2 &= a_n \cdot a_{n+2} \\ a_{n+1} &= \sqrt{a_n \cdot a_{n+2}} \end{aligned}$$

□

Aplicando a fórmula de recorrência (2.8) pela qual se define uma progressão geométrica e reconhecendo o primeiro termo $(a_1 \neq 0)$, a razão $(q \neq 0)$ e o índice n de um termo desejado, encontramos

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ a_4 &= a_3 \cdot q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro as $n-1$ igualdades, temos

$$\begin{aligned} a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{n-1} \cdot a_n &= a_1 \cdot q \cdot a_2 \cdot q \cdot a_3 \cdot q \cdots a_{n-1} \cdot q \\ a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{n-1} \cdot a_n &= a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdots q}_{(n-1)\ vezes} \end{aligned}$$

Dividindo $(a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{n-1})$ a ambos os membros, obtemos

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{2.9}$$

*A expressão (2.9) é denominada **termo geral** da progressão geométrica.*

Observação 2.22. Se o primeiro termo $a_1 = 0$, utilizando a fórmula de recorrência (2.8) pela qual define uma progressão geométrica, temos

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \cdot q = 0, \text{ para todo } q \in \mathbb{R} \\ a_3 &= 0 \cdot q = 0, \text{ para todo } q \in \mathbb{R} \\ &\vdots \\ a_n &= 0 \cdot q, \text{ para todo } q \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Então obteremos uma progressão geométrica com todos os termos iguais a zero, ou seja

$$a_{n+1} = a_n \cdot q = 0 \cdot q = 0 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Logo, a expressão (2.9) também é válida.

Observação 2.23. Se a razão $q = 0$, utilizando a fórmula (2.8) pela qual define uma progressão geométrica, temos

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot 0 = 0 \\ a_3 &= 0 \cdot 0 = 0 \\ &\vdots \\ a_n &= 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Nesse caso vamos encontrar uma progressão geométrica estacionária, em que a partir do segundo termo todos são iguais a zero, ou seja

$$a_{n+1} = a_n \cdot q = a_n \cdot 0 = a_1 \cdot 0 = a_1 \cdot 0^{n-1} = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Logo, a expressão (2.9) também é válida.

Esse fato mostra que, se (a_n) é uma progressão geométrica de razão q, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Exemplo 2.24. Considerando a progressão geométrica

$$(6, 24, 96, 384, \ldots)$$

vamos determinar seu vigésimo termo, ou seja, vamos encontrar a_{20}. Temos o primeiro termo $a_1 = 6$, a razão $q = 4$ e o número de termo $n = 20$, na expressão (2.9), encontramos o vigésimo termo.

Ou seja,

$$\begin{aligned} a_{20} &= 6 \cdot 4^{20-1} \\ a_{20} &= 6 \cdot 4^{19} \\ a_{20} &= 2 \cdot 3 \cdot (2^2)^{19} \\ a_{20} &= 3 \cdot 2^{39} \end{aligned}$$

Logo, o 20º termo da progressão geométrica é $3 \cdot 2^{39}$.

Exemplo 2.25. (Leonardo 2016 - Adaptado) No domingo passado, Andrielly enviou uma mensagem por e-mail para três amigas. No dia seguinte, cada amiga de Andrielly que recebeu o e-mail enviou-o para três amigas e assim por diante. Se nenhuma pessoa recebeu a mensagem mais de uma vez, quantas pessoas receberam a mensagem no domingo seguinte.
Podemos observar que a quantidade de e-mails enviados por dia forma uma progressão geométrica com o primeiro termo $a_1 = 3$, razão $q = 3$ e o número de termos da progressão geométrica (quantidade de dias) $n = 8$, na expressão (2.9), encontramos o oitavo termo, quantas pessoas receberam a mensagem no domingo.
Ou seja,

$$\begin{aligned} a_8 &= 3 \cdot 3^{(8-1)} \\ a_8 &= 3 \cdot 3^7 \\ a_8 &= 3^8 \\ a_8 &= 6.561 \end{aligned}$$

Logo, no domingo seguinte 6.561 pessoas receberam a mensagem.

Uma progressão geométrica também fica bem definida se tivermos qualquer termo conhecido e sua razão q.

Proposição 2.26. *Se (a_n) é uma progressão geométrica de razão $q \neq 0$, então para todo a_k fixado encontramos a_n usando a fórmula $a_n = a_k \cdot q^{(n-k)}$.*

Demonstração. Seja a fórmula do termo geral (2.9), temos

$$a_k = a_1 \cdot q^{(k-1)}$$

ou seja

$$a_1 = \frac{a_k}{q^{k-1}} \tag{2.10}$$

Substituindo (2.10) na expressão (2.9), encontramos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_k}{q^{k-1}} \cdot q^{n-1} \\ a_n &= a_k \cdot q^{n-1-k+1} \\ a_n &= a_k \cdot q^{n-k} \end{aligned}$$

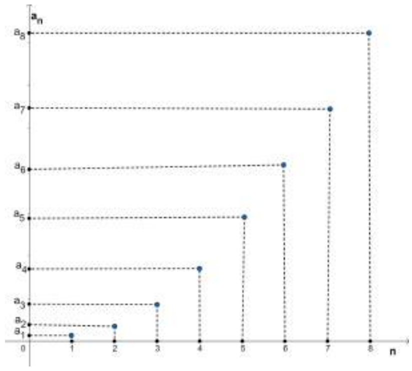
□

Observação 2.27. Uma progressão geométrica de razão $q = 0$, gera os termos $(a_1, 0, 0, 0, \ldots)$, temos os termos $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \cdots = 0$. Entretanto o primeiro termo a_1, fica impossível de ser determinado apenas com um termo qualquer e a razão $q = 0$.
Note que a expressão (2.9) é um caso particular da Proposição 2.26

Seja (a_n) uma progressão geométrica, representa no plano cartesiano os pontos (n, a_n), percebe-se que os termos de (a_n) formam uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial, conforme podemos verificar nos gráficos a seguir, sendo esta uma boa maneira de explicar aos nossos alunos do Ensino Médio, usando o auxílio visual, examinar o limite do termo geral, com n tendendo ao infinito, estabelecendo a relação de convergência ou divergência, ou seja:

$$\lim a_n = \lim a_1 \cdot q^{n-1} = \lim \frac{a_1}{q} \cdot q^n.$$

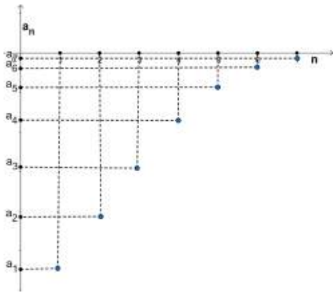
Figura 5 – Gráfico de uma progressão geométrica crescente de termos positivos



Fonte: [Balestri 2016, p. 196]

Nesse caso tem-se $a_1 > 0$ e $q > 1$, temos $\lim a_n = \infty$, logo a sequência diverge.

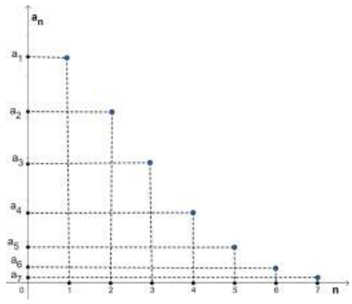
Figura 6 – Gráfico de uma progressão geométrica crescente de termos negativos



Fonte: Elaborado pela autora

Nesse caso tem-se $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$, temos $\lim a_n = 0$, logo a sequência converge para zero.

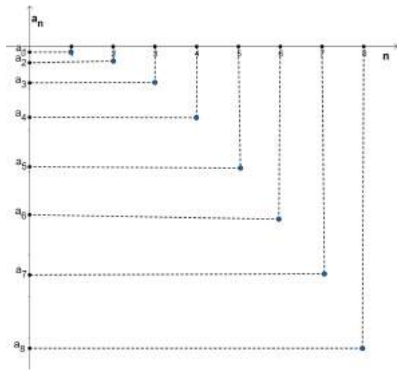
Figura 7 – Gráfico de uma progressão geométrica decrescente de termos positivos



Fonte: [Balestri 2016, p. 196]

Nesse caso tem-se $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, temos $\lim a_n = 0$, logo a sequência converge para zero.

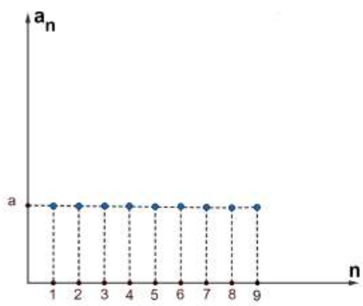
Figura 8 – Gráfico de uma progressão geométrica decrescente de termos negativos



Fonte: Elaborado pela autora

Nesse caso tem-se $a_1 < 0$ e $q > 1$, temos $\lim a_n = -\infty$, logo a sequência diverge.

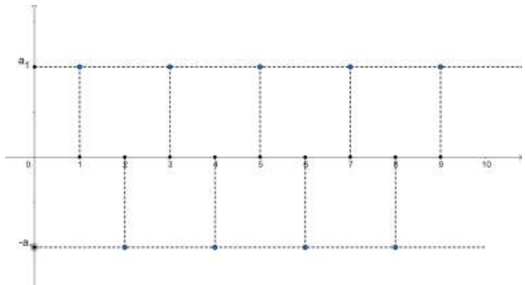
Figura 9 – Gráfico de uma progressão geométrica constante



Fonte: [Balestri 2016, p. 196]

Nesse caso tem-se $q = 1$, temos $\lim a_n = a_1$, logo a sequência converge para a_1.

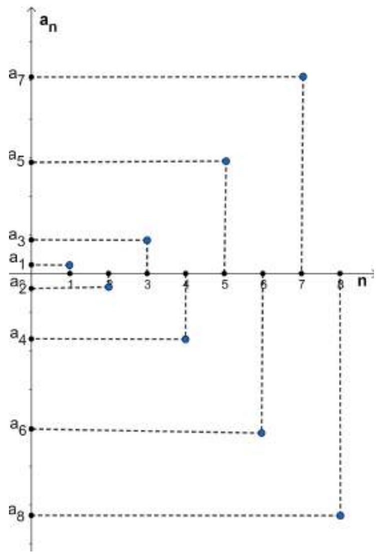
Figura 10 – Gráfico de uma progressão geométrica alternante ou oscilante com $q = -1$



Fonte: [Balestri 2016, p. 336]

Quando $q = -1$, para n par o valor é $-a_1$, e para n ímpar o valor é a_1. Como uma sequência converge para determinado limite, toda subsequência converge para o mesmo limite. Então a sequência não converge.

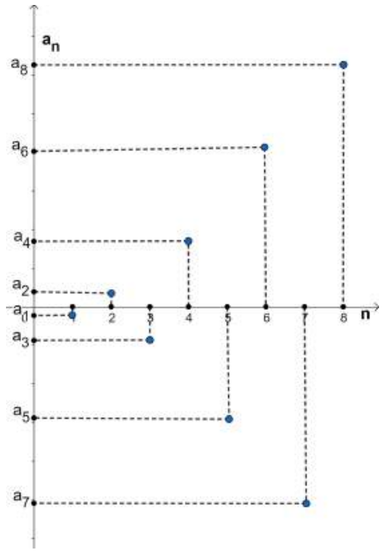
Figura 11 – Gráfico de uma progressão geométrica alternante ou oscilante com $a_1 > 0$ e $q < -1$



Fonte: [Balestri 2016, p. 196]

Quando $a_1 > 0$ e $q < -1$, para n par, os termos vão tornando-se cada vez menores e para n ímpar, eles vão ficando maiores. Portanto, a sequência diverge.

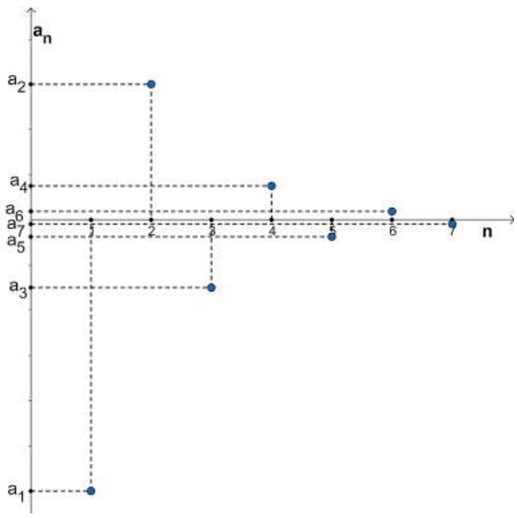
Figura 12 – Gráfico de uma progressão geométrica alternante ou oscilante com $a_1 < 0$ e $q < -1$



Fonte: Elaborado pela autora

Quando $a_1 < 0$ e $q < -1$, para n par, os termos vão tornando-se cada vez maiores e para n ímpar, eles vão ficando menores. Portanto, a sequência diverge.

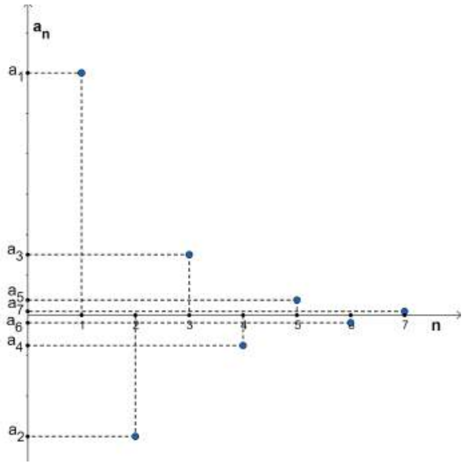
Figura 13 – Gráfico de uma progressão geométrica alternante ou oscilante com $a_1 < 0$ e $-1 < q < 0$



Fonte: [Balestri 2016, p. 336]

Quando $a_1 < 0$ e $-1 < q < 0$, temos $\lim a_n = 0$, logo a sequência converge para zero.

Figura 14 – Gráfico de uma progressão geométrica alternante ou oscilante com $a_1 > 0$ e $-1 < q < 0$



Fonte: Elaborado pela autora

Quando $a_1 > 0$ e $-1 < q < 0$, temos $\lim a_n = 0$, logo a sequência converge para zero.

Observação 2.28. A representação geométrica apresentada pelas Figuras 5, 6, 7 e 8 de uma progressão geométrica é formada por pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial e converge quando sua razão for 1 (em que a convergência é o valor de a_1) ou quando sua razão estiver entre -1 e 1 (que a convergência é para zero).

De modo semelhante ao que fizemos para as progressões aritméticas, é possível encontrar uma expressão para calcular a soma de um número finito de termos de uma progressão geométrica. A proposição seguinte mostra como fazer isso.

Proposição 2.29. *Seja (a_n) uma progressão geométrica qualquer. Indicada por S_n, a soma dos n primeiros termos da sequência (a_n) é dada por $S_n = n \cdot a_1$ quando $q = 1$ e $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ quando $q \neq 1$.*

Demonstração. Considere os n primeiros termos da progressão geométrica (a_n).
Podemos indicar a soma dos n primeiros termos S_n por

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n.$$

Usando (2.9)

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} \tag{2.11}$$

Separando em dois casos,

- Se $q = 1$, obtemos

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1}_{n\ parcelas}.$$

Portanto,

$$S_n = n \cdot a_1$$

- Se $q \neq 1$, assim multiplicando os dois membros da igualdade (2.11) pela razão q, encontramos

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + \cdots + a_1 \cdot q^n \tag{2.12}$$

subtraindo membro a membro entre as igualdades (2.12) e (2.11), temos

$$S_n \cdot q - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$$

ou seja,

$$S_n(q-1) = a_1 \cdot q^n - a_1$$

em que,

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$$

portanto,

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}. \tag{2.13}$$

□

Exemplo 2.30. Voltando ao Exemplo 2.25 das mensagens enviadas para três amigas por e-mail e que no dia seguinte, cada amiga enviou-o para três novas amigas e assim por diante, quantas pessoas receberam a mensagem até o domingo seguinte.

O total de pessoas que receberam o e-mail nesses oito dias é a soma dos oito primeiros termos da progressão geométrica cujo primeiro termo $a_1 = 3$, razão $q = 3$ e número de termos $n = 8$. Substituindo na expressão (2.13), encontraremos o total de pessoas que receberam a mensagem até o domingo seguinte.
Ou seja,

$$\begin{aligned}
S_8 &= \frac{3(3^8 - 1)}{3 - 1} \\
S_8 &= \frac{3(6.561 - 1)}{2} \\
S_8 &= \frac{3 \cdot 6.560}{2} \\
S_8 &= \frac{19.680}{2} \\
S_8 &= 9.840
\end{aligned}$$

Logo, o total de pessoas que receberam a mensagem até o domingo seguinte foi de 9.840 pessoas.

Vimos na representação geométrica de uma progressão geométrica, quando sua razão estivesse entre -1 e 1, á medida que aumentamos o valor de n, os pontos convergem para zero, ou seja, se $-1 < q < 1$, então

$$\lim q^n = 0. \tag{2.14}$$

Por outro lado, analisando a expressão (2.13), para n tendendo ao infinito e colocando o limite em ambos os membros da igualdade, segue que

$$\begin{aligned}
\lim S_n &= \lim \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} \\
\lim S_n &= \lim \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q-1} \\
\lim S_n &= \lim \frac{a_1 \cdot q^n}{q-1} - \lim \frac{a_1}{q-1} \\
\lim S_n &= 0 - \lim \frac{a_1}{q-1}
\end{aligned}$$

Como a_1 e q são constantes, sabemos que $\dfrac{a_1}{q-1}$ é constante e por (2.14)

$$\lim S_n = -\frac{a_1}{q-1}$$

Ou seja,

$$\lim S_n = \frac{a_1}{1-q} \tag{2.15}$$

A representação (2.15) é denominada como **fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita**, com $-1 < q < 1$.

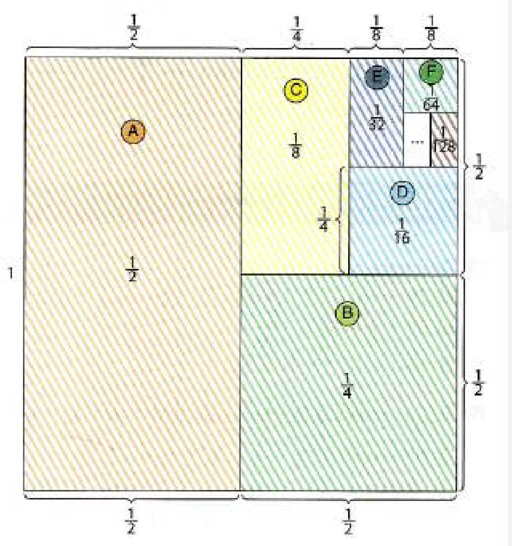
Embora no Ensino Médio não se fale nada sobre o conceito de série, a "soma infinita" de termos de uma progressão geométrica cujo termo geral é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ e $|q| < 1$, é convergente, assim sendo um limite de uma série (a série geométrica), resultado do Teorema 1.56.

Exemplo 2.31. A soma dos infinitos termos da progressão geométrica $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dots\right)$ Como a razão $q = \dfrac{1}{2}$ e $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, então a progressão geométrica é convergente e tem valor:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

A seguir, apresentamos a interpretação geométrica desse fato. Para isso tome o quadrado unitário. Dividindo o quadrado ao meio, hachura uma delas e, na outra, repetir o processo, ou seja, dividir essa parte em duas partes iguais, hachurando uma delas e dividindo a outra em duas partes iguais. Esse procedimento será feito continuadamente. Conforme a Figura 15.

Figura 15 – Visualização geométrica da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.



Fonte: [Iezzi et al. 2016, p. 189]

Isso nos mostra que a área do quadrado original é a soma das áreas dos "infinitos" retângulos formados, ou seja

$$\overbrace{1\cdot\frac{1}{2}}^{A}+\overbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}^{B}+\overbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}^{C}+\overbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}^{D}+\overbrace{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}}^{E}+\overbrace{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}}^{F}+\cdots=1$$

melhor dizendo

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=1$$

Exemplo 2.32. Considere a dízima periódica $0,77777...$ que podemos escrever como

$$\begin{aligned} 0,77777... &= 0,7+0,07+0,007+0,0007+0,00007+\cdots \\ &= \frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{7}{10000}+\cdots+\frac{7}{10^n}+\cdots \end{aligned}$$

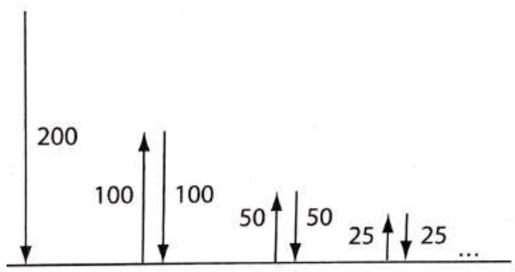
pode ser compreendida como a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, de primeiro termo $a_1=\dfrac{7}{10}$ e razão $q=\dfrac{1}{10}$, em que $-1<\dfrac{1}{10}<1$, que é convergente e tem valor:

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{7}{10}}{\frac{10-1}{10}}=\frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{7}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{7}{9}.$$

Portanto, a fração geratriz de $0,77777...$ é $\dfrac{7}{9}$.

Exemplo 2.33. (Iezzi et al. 2016) Uma bola é atirada ao chão de uma altura de 200 cm. Ao atingir o solo pela primeira vez, ela sobe até uma altura de 100 cm, cai e atinge o solo pela segunda vez, subindo até uma altura de 50 cm, e assim por diante subindo sempre metade da altura anterior, até perder energia e cessar o movimento. Quantos metros a bola percorre ao todo? Para cessar o movimento da bola ao solo ela percorreu:

Figura 16 – Movimento de queda da bola.



Fonte: [Iezzi et al. 2016, p. 393]

- pela 1ª vez, 200 cm (descida);
- pela 2ª vez, mais 100 cm (subida) + 100 cm (descida);
- pela 3ª vez, mais 50 cm (subida) + 50 cm (descida) e assim sucessivamente.

Podemos observar duas sequências:

- a sequência da descida da bola $(200, 100, 50, 25, \ldots)$ que é uma progressão geométrica com o primeiro termo $a_1 = 200$ e razão $q = \dfrac{1}{2}$.
- a sequência da subida da bola $(100, 50, 25, \ldots)$ que é uma progressão geométrica com o primeiro termo $a_1 = 100$ e razão $q = \dfrac{1}{2}$.

Sabemos que, o espaço S, percorrido pela bola em todo o percurso é a soma do limite da soma das duas sequências infinitas, usando a expressão (2.15), obtemos

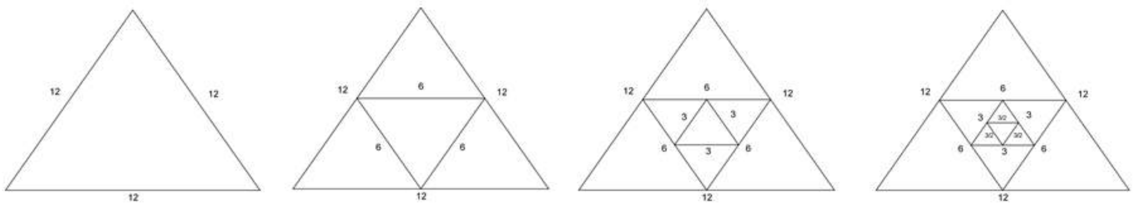
$$S = \frac{200}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{200}{\frac{1}{2}} + \frac{100}{\frac{1}{2}} = 400 + 200 = 600.$$

Portanto, a bola percorreu ao todo 600 cm, ou seja 6 m.

Exemplo 2.34. (Iezzi et al. 2016) Seja um triângulo equilátero de lado 12 cm. Unindo-se os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se outro triângulo equilátero no centro da figura. Unindo-se os pontos médios dos lados desse último triângulo, constrói-se outro triângulo no centro da figura, e assim indefinidamente. Qual é a soma dos perímetros de todos os triângulos assim construídos?

Pelo teorema da base média do triângulo, podemos afirmar que o segmento com extremos nos pontos médios de dois lados desse triângulo é paralelo ao terceiro lado, e sua medida é igual a metade desse terceiro lado. Ou seja, cada triângulo equilátero formado possui seu lado medindo a metade do lado do triângulo anterior a ele.
Obtendo assim

Figura 17 – Divisões sucessivas de um triângulo.



Fonte: Elaborada pela autora

O lado do 1^{o} triângulo é 12 cm, seu perímetro é 36 cm;
O lado do 2^{o} triângulo é 6 cm, seu perímetro é 18 cm;
O lado do 3^{o} triângulo é 3 cm, seu perímetro é 9 cm e assim sucessivamente.
Observamos que os perímetros de todos os triângulos construídos formam a progressão geométrica infinita $(36, 18, 9, \ldots)$ com o primeiro termo $a_1 = 36$ e razão $q = \dfrac{1}{2}$. Aplicando a expressão (2.15) encontramos a soma desses perímetros, segue que

$$S = \frac{36}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{36}{\frac{1}{2}} = 72.$$

Portanto, a soma dos perímetros é 72 cm.

3 Síntese dos Livros

Neste capítulo analisamos como é abordado o assunto sobre sequência, progressão aritmética (P.A.) e progressão geométrica (P.G.), nos oito livros de matemática selecionados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018/2020, dos quais são: Matemática – Ciência e aplicações, Iezzi et al. 2016; Conexões com a matemática, Leonardo 2016; Matemática - Quadrantes, Chavante e Prestes 2016; Contexto & aplicações, Dante 2016; Matemática - Contato, Souza e Garcia 2016; Matemática - Interação e tecnologia, Balestri 2016; Matemática - Paiva, Paiva 2015 e Matemática para compreender o mundo, Smole e Diniz 2017.

3.1 Apresentação do Capítulo

Todos os livros, com exceção dos livros de Iezzi et al. 2016 e Leonardo 2016, mostram na abertura do capítulo sobre sequência uma apresentação do assunto com contextos diferentes.

O livro de Chavante e Prestes 2016, por exemplo, apresenta a imagem do ensaio de uma orquestra composta por deficientes visuais explorando os benefícios da música para saúde e a memorização das sequências de notas após a leitura das pautas em braile.

Figura 18 – Apresentação: Ensaio da orquestra Thai


unidade 4

capítulo 8 Sequências e progressões
capítulo 9 Estatística
capítulo 10 Trigonometria

Quase todos consideram que é bom ouvir música, mas talvez poucos saibam que ela também é benéfica para a saúde. Ela auxilia tanto na recuperação de pessoas com deficiência visual e auditiva quanto no desenvolvimento de deficientes mentais. De acordo com alguns estudiosos, a música ativa o centro de prazer do cérebro, aliviando dores, melhorando a memória e estimulando a prática de atividades físicas. Por esse motivo, as canções têm sido muito utilizadas na reabilitação física e mental, e rendem ótimos resultados.

Nesta unidade serão apresentadas sequências e progressões, assuntos que estão relacionados aos padrões das notas musicais.

170

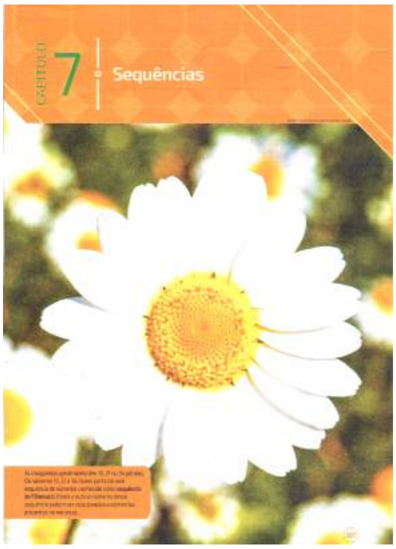
Nesta unidade, você vai estudar características e particularidades entre sequências e progressões aritméticas e geométricas; distinguir e aplicar algumas medidas de tendência central na análise de informações e explorar as relações métricas e trigonométricas nos triângulos.

Ensaio da orquestra Thai, composta por deficientes visuais, antes de um concerto no parque nacional de Khao Yai, a nordeste de Bangkok, capital tailandesa, em janeiro de 2015. Habilmente capacitados, esses jovens músicos memorizam as sequências de notas após a leitura das pautas em braille, desafiando assim as próprias limitações físicas.

Fonte: [Chavante e Prestes 2016, pp. 170-171]

O livro de Dante 2016 apresenta o número de pétalas que pode ter uma margarida (13, 21 ou 34), pois esses números fazem parte de uma sequência conhecida como sequência de Fibonacci.

Figura 19 – Apresentação: Margarida



Fonte: [Dante 2016, p. 207]

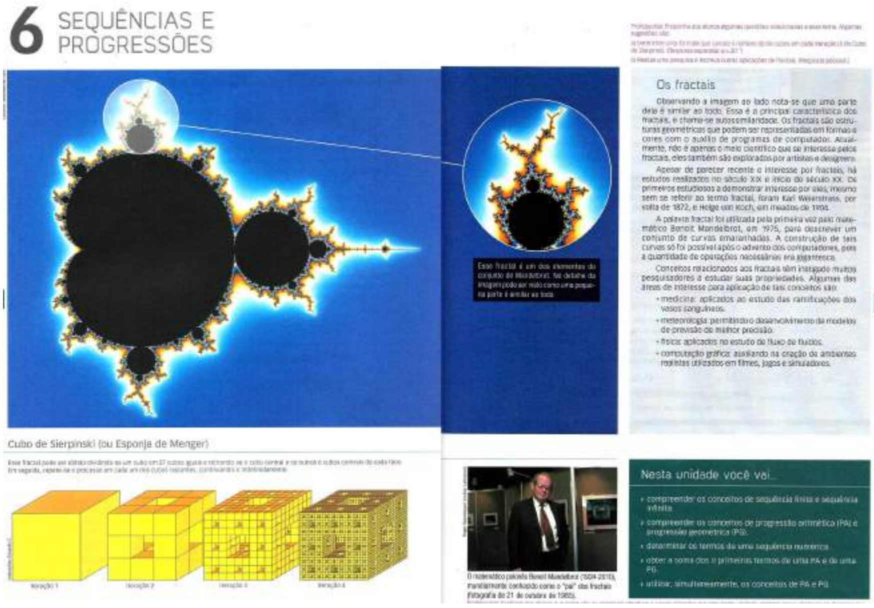
O livro de Souza e Garcia 2016 traz uma técnica utilizada para dar movimento aos desenhos animados chamado de flipagem, na qual é criada uma sequência de desenhos muito parecidos, em que há detalhes diferentes entre um desenho e o desenho seguinte, de modo que, ao passar rapidamente essas imagens em sequência, tem-se a ilusão de movimento.

Figura 20 – Apresentação: Produzido por Don Hahno, O Rei Leão.

Fonte: [Souza e Garcia 2016, pp. 194-195]

O livro de Balestri 2016 apresenta o capítulo fazendo uma relação entre Matemática e Arte usando os fractais.

Figura 21 – Apresentação: Fractal e Cubo de Sierpinski



Fonte: [Balestri 2016, pp. 178-179]

O livro de Paiva 2015 mostra a imagem de um atleta e apresenta informações sobre alguns cuidados que devemos ter ao iniciar a prática de uma atividade física; em seguida traz perguntas sobre a situação de um atleta se preparando para uma competição.

Figura 22 – Apresentação: Atleta

Fonte: [Paiva 2015, p. 6]

O livro de Smole e Diniz 2017 traz figuras conhecidas como curva do floco de neve de Koch, mostrando como ela foi obtida, concluindo que a medida do lado dos triângulos construídos em cada etapa forma uma sequência de números.

Figura 23 – Apresentação: Curva do floco de neve de Koch

A figura abaixo é conhecida como **curva do floco de neve de Koch**, obtida a partir de uma sequência de construções nos lados de um triângulo equilátero.

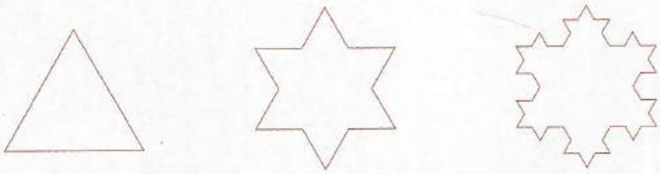
Imagens: Zapt

Optamos por inserir este capítulo sobre sequências numéricas e progressões antes das funções exponencial e logarítmica porque, dessa forma, é possível:

- relacionar o estudo de funções e de função afim com sequências e progressões;
- abordar a noção de crescimento ou decrescimento exponencial por meio de progressão geométrica, cujos padrões permitem um contexto de aprendizagem que favorece a maior compreensão de função exponencial e o conceito de logaritmo.

Nos próximos três capítulos, há muitas possibilidades de integração da Matemática com a Biologia, o que favorece o desenvolvimento de atividades conjuntas entre as disciplinas, especialmente no que diz respeito ao estudo de populações.

O matemático Helge von Koch (1870-1924), em 1904, obteve essa figura a partir de um triângulo equilátero de lado de medida 1. Observe as três primeiras figuras dessa sequência.



Você consegue descobrir como a segunda e a terceira figuras foram obtidas a partir da primeira?

Consideremos um triângulo equilátero de lado de medida 1. Dividimos cada um de seus lados em três partes iguais.

No terço médio de cada lado, construímos novos triângulos equiláteros. O resultado é uma linha poligonal fechada de 12 lados.

No estágio seguinte, fazemos a divisão de cada um dos 12 lados da linha poligonal em três partes iguais e construímos novos triângulos equiláteros sobre os terços médios, e assim sucessivamente.

A medida do lado dos triângulos construídos em cada etapa forma uma sequência de números. Como podemos descrever essa sequência?

Fonte: [Smole e Diniz 2017, p. 142]

3.2 Introdução as Sequências

Todos os livros, ao introduzir sequência, contextualizam antes de apresentar a definição, com exceção no livro de Smole e Diniz 2017, no qual o autor apenas cita o exemplo dado na abertura do capítulo.

No livro de Iezzi et al. 2016 utiliza tabela com número de funcionários nos 10 primeiros anos de uma empresa;

Figura 24 – Contextualização com tabela

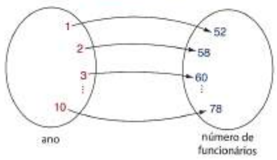
A tabela seguinte relaciona o número de funcionários de uma empresa nos seus dez primeiros anos de existência:

Ano	Número de funcionários
1	52
2	58
3	60
4	61
5	67
6	65
7	69
8	72
9	76
10	78

Observe que a relação entre essas duas variáveis define uma função: a cada ano de existência da empresa corresponde um único número de funcionários.

Note que o domínio dessa função é {1, 2, 3, ..., 10}.

De modo geral, uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ é chamada **sequência numérica infinita**. Se o domínio de **f** é $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ em que $n \in \mathbb{N}^*$, temos uma **sequência numérica finita**.



Fonte: [Iezzi et al. 2016, p. 171]

No livro de Leonardo 2016, os anos que aconteceram os jogos Pan-Americanos;

Figura 25 – Contextualização: Jogos Pan-Americanos

1 Sequências e padrões

O infográfico acima apresenta o número de medalhas que o Brasil conquistou nos oito últimos Jogos Pan-Americanos. Os anos em que ocorreram essas competições formam uma **sequência** ou **sucessão** e podemos escrevê-los da seguinte forma:

(1987, 1991, 1995, 1999, 2003, 2007, 2011, 2015).

Os elementos ou termos dessa sequência podem ser representados por uma letra (geralmente usa-se a letra *a*) e um índice que indica a posição ou ordem do elemento na sequência. Dessa maneira: $a_1 = 1987$ é o primeiro termo da sequência, $a_2 = 1991$ é o segundo termo e assim sucessivamente até $a_8 = 2015$.

Com os dados fornecidos pelo infográfico, também podemos escrever outras sequências, por exemplo:

- a sequência das cidades que sediaram os oito últimos Jogos Pan-Americanos: (Indianápolis, Havana, Mar del Plata, Winnipeg, Santo Domingo, Rio de Janeiro, Guadalajara, Toronto);
- a sequência do total de medalhas do Brasil nos oito últimos Jogos Pan-Americanos: (61, 79, 82, 101, 123, 157, 141, 141).

Se a sequência tiver um último termo, dizemos que ela é **finita**. Caso contrário, dizemos que é **infinita** e a indicamos colocando reticências no final.

Exemplos

a) A sequência dos meses de um ano é finita, pois tem um último elemento: (janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho, julho, agosto, setembro, outubro, novembro, dezembro).

Objetivos do capítulo

- Identificar padrões numéricos e sequências.
- Resolver problemas que envolvam sequências.
- Interpretar graficamente progressões aritméticas e progressões geométricas.

Fonte: [Leonardo 2016, p. 188]

No livro de Chavante e Prestes 2016, as questões sobre juros compostos;

Figura 26 – Contextualização: Juros compostos.

Mirela aplicou R$ 10 000,00 em um investimento cuja rentabilidade é dada por um juro composto de 1% ao mês. Observe o montante, em reais, mês a mês, a partir do início da aplicação.

1º mês: $a_1 = 10\,000$

2º mês: $a_2 = 10\,000 \cdot 1{,}01 = 10\,100$

3º mês: $a_2 = 10\,000 \cdot 1{,}01^2 = 10\,201$

4º mês: $a_3 = 10\,000 \cdot 1{,}01^3 = 10\,303{,}01$

$\vdots$

n-ésimo mês: $a_n = 10\,000 \cdot 1{,}01^{n-1}$

$\vdots$

Lembre-se de que, no regime de juro composto, o juro é sempre calculado sobre o montante do período anterior a partir do segundo período considerado na situação. No primeiro período, que é o período inicial, o capital é igual ao montante.

Se fosse possível para Mirela manter esse dinheiro investido por uma quantidade infinita de meses, os valores $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ formariam uma sequência de números reais, que pode ser denotada por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ ou, de maneira abreviada, por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou (a_n). Cada número a_n, com $n \in \mathbb{N}^*$, é um **termo** da sequência, e o índice n indica a posição ou a ordem desse termo na sequência.

Fonte: [Chavante e Prestes 2016, p. 172]

O livro de Dante 2016, utiliza dias da semana, meses do ano, números naturais, ano que aconteceu a copa.

Figura 27 – Contextualização: Situações do cotidiano.

Em muitas situações cotidianas aparece a ideia de **sequência** ou **sucessão**. Assim, por exemplo, temos:

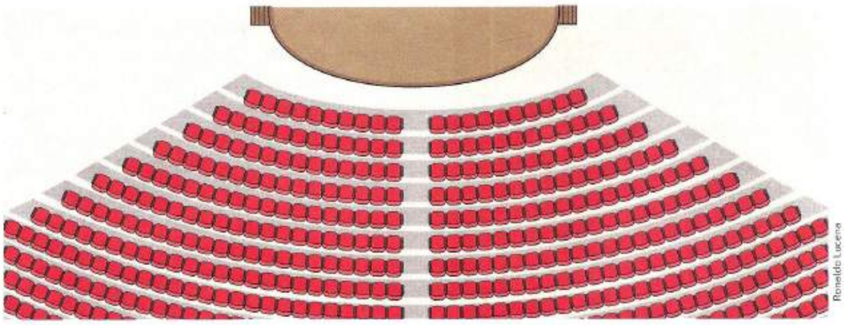
- a sequência dos dias da semana (domingo, segunda-feira, ..., sábado);
- a sequência dos meses do ano (janeiro, fevereiro, ..., dezembro);
- a sequência dos números naturais (0, 1, 2, 3, 4, ...);
- a sequência dos anos, a partir de 2002, nos quais a Copa do Mundo de Futebol foi ou será realizada (2002, 2006, 2010, 2014, 2018, 2022, ...).

Fonte: [Dante 2016, p. 208]

No livro de Souza e Garcia 2016, a quantidade de poltronas nas fileiras de um teatro.

Figura 28 – Contextualização: Poltronas da plateia.

Em determinado teatro, as poltronas da plateia são dispostas em 14 filas, de modo que a primeira fila possui 20 poltronas; a segunda, 24; a terceira, 28; e assim por diante. Dizemos então que, a partir da primeira fila, a seguinte possui 4 poltronas a mais que a anterior.



Podemos representar a quantidade de poltronas de cada fila da seguinte maneira:

$$(20, 24, 28, 32, \ldots, 68, 72)$$

De acordo com essas informações, é possível responder a questões como:

- Quantas poltronas há na 10ª fila da plateia desse teatro?
- É possível que uma das filas tenha um número ímpar de poltronas? Por quê?
- Qual é a quantidade total de poltronas da plateia desse teatro?

Note que as quantidades de poltronas de cada fila são elementos de um conjunto; esses elementos estão organizados em certa ordem, formando uma **sequência** ou **sucessão.** Nessa sequência, 20 é o 1º termo, 24 é o 2º termo, 28 é o 3º termo, e assim por diante.

Fonte: [Souza e Garcia 2016, p. 196]

No livro de Balestri 2016, os fenômenos da natureza (aparição do cometa Halley).

Figura 29 – Contextualização: Cometa Halley.

O cometa Halley pode ser visto da Terra a olho nu a cada 76 anos, aproximadamente. Como sua última aparição foi no ano de 1986, é possível prever que suas próximas aparições serão por volta dos anos de 2062, 2138, 2214, 2290 e assim sucessivamente.

Fotografia do cometa Halley, feita com o auxílio de um telescópio da Estação Boyden, no Peru, em 21 de abril de 1910.

Podemos representar esses anos da seguinte maneira:

$$(1986, 2062, 2138, 2214, 2290, \ldots)$$

Note que esses anos são elementos de um conjunto e estão organizados em certa ordem, formando assim uma sequência ou sucessão. Nessa sequência, 1986 é o primeiro termo, 2062 é o segundo termo, 2138 é o terceiro termo, 2214 é o quarto termo, 2290 é o quinto termo e assim por diante.

Fonte: [Balestri 2016, p. 180]

No livro de Paiva 2015, a classificação da 1ª copa do mundo de vôlei de praia masculino.

Figura 30 – Contextualização: Copa do Mundo de vôlei de praia.

1 O conceito de sequência

Em 2013, o Brasil sediou a primeira edição da Copa do Mundo de vôlei de praia, o World Cup Final, que se realizou na cidade de Campinas, em São Paulo. O Brasil foi campeão nas duas competições, feminina e masculina, com as duplas Maria Elisa/Talita e Emanuel/Alison.

Maria Elisa e Talita exibem a medalha de ouro.

Emanuel e Alison comemoram o título.

No vôlei masculino, a classificação final dos quatro primeiros colocados é descrita pela tabela a seguir.

Classificação da I Copa do Mundo de vôlei de praia masculino	
Posição	País
1	Brasil
2	Estados Unidos
3	Letônia
4	Alemanha

Dados obtidos em: <www.fivb.org>. Acesso em: 1º maio 2014.

Observe que a classificação é apresentada associando-se cada número natural de 1 a 4 ao nome de um país. Essa associação determina uma **sequência**, em que:

- o número 1 corresponde ao primeiro elemento da sequência;
- o número 2 corresponde ao segundo elemento da sequência;
- o número 3 corresponde ao terceiro elemento da sequência;
- o número 4 corresponde ao quarto elemento da sequência.

Vamos representar essa associação em um diagrama de flechas, indicando por A o conjunto de números naturais de 1 a 4 e por B o conjunto dos países classificados nas quatro primeiras posições:

Fonte: [Paiva 2015, p. 7]

O livro de Smole e Diniz 2017, primeiro define sequência como uma organização de números, na qual podem ter ou não uma lei de formação, podendo ser finitas ou infinitas; os demais livros definem sequência, inter-relacionando com o conceito de função, cujo domínio $\mathbb{N}^*$ e contradomínio, um conjunto não vazio. Todos os livros deixam claro que as sequências podem ser finitas ou infinitas.

Os livros de Leonardo 2016, Dante 2016, Souza e Garcia 2016, Balestri 2016, Paiva 2015 e Smole e Diniz 2017 deixam claro que as sequências podem ou não ter uma lei de formação que as definem, por exemplo, a sequência dos números primos está bem definida.

Apenas o livro de Iezzi et al. 2016 não traz contextualização nos exercícios sobre sequência.

Figura 31 – Exercícios não contextualizados sobre sequência.

1 Seja a sequência definida por $a_n = -3 + 5n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determine:

a) a_2 **b)** a_4 **c)** a_{11}

2 Escreva os quatro primeiros termos da sequência definida por $a_n = 2 \cdot 3^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Para cada função definida a seguir, represente a sequência associada:

a) $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ que associa a cada número natural não nulo o triplo de seu sucessor.

b) $g: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ tal que $g(x) = x^2 - 2x + 4$.

4 O termo geral de uma sequência é $a_n = 143 - 4n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Qual é a soma de seus 3 primeiros termos?

b) Os números 71, −345 e −195 pertencem à sequência? Em caso afirmativo, determine suas posições.

5 Construa a sequência definida pela relação:

$$\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

6 Determine o sexto termo da sequência definida pela lei de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

7 Seja $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n^3 + n^2 + 1$. Ao representar a sequência associada a **f**, um estudante apresentou a seguinte resolução:

(3, 13, [redacted], 81, 151, [redacted], ...)

Por algum motivo, dois números da sequência acima saíram borrados. Determine-os, reescrevendo a sequência.

8 Os termos gerais de duas sequências (a_n) e (b_n) são, respectivamente, $a_n = -193 + 3n$ e $b_n = 220 - 4n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

a) Escreva os cinco primeiros termos de (a_n) e de (b_n).

b) Qual é o primeiro termo positivo de (a_n)? Que posição ele ocupa na sequência?

c) Qual é o primeiro termo negativo de (b_n)? Que posição ele ocupa na sequência?

d) As duas sequências apresentam algum termo em comum? Em caso afirmativo, determine-o.

Fonte: [Iezzi et al. 2016, p. 173]

Os livros de Souza e Garcia 2016 e Balestri 2016 trazem nos exercícios, uma proposta de produção textual na parte de sequência.

Figura 32 – Produção textual.

7. Escreva uma sequência numérica e solicite a um colega que determine a fórmula do termo geral dessa sequência. Em seguida, verifique se ele resolveu corretamente.

Fonte: [Balestri 2016, p. 182]

Os livros de Leonardo 2016, Chavante e Prestes 2016, Dante 2016, Souza e Garcia 2016, Balestri 2016 e Smole e Diniz 2017 trazem na parte de sequência exercícios que envolvem geometria.

3.3 Progressão Aritmética

Todos os livros, com exceção do livro de Smole e Diniz 2017, introduzem progressão aritmética através de uma contextualização. O livro de Iezzi et al. 2016 contextualiza com quadrados justapostos formados por palitos de fósforo.

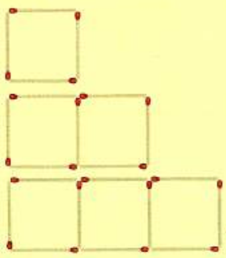
Figura 33 – Observação de regularidades.

As figuras seguintes mostram a construção de quadrados justapostos usando palitos.

1ª figura:

2ª figura:

3ª figura:



Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

a) Mantendo o padrão apresentado, desenhe, em seu caderno, a 4ª, 5ª e 6ª figuras.

b) Construa a sequência correspondente à quantidade de palitos usados na construção de cada figura. Qual é a regularidade que você observa?

c) Obtenha o termo geral dessa sequência.

d) Quantos palitos são usados na construção da 25ª figura?

e) Qual é a posição da figura feita com 493 palitos?

Fonte: [Iezzi et al. 2016, p. 174]

O livro de Leonardo 2016, utiliza uma tabela de preços relacionando números de fotocópias ao valor a ser pago.

Figura 34 – Tabela de preços por fotocópias.

O dono de uma papelaria preparou uma tabela com o valor a ser pago de acordo com a quantidade de fotocópias simples pedida pelos clientes.

Número de fotocópias simples	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor a ser pago (R$)	0,15	0,30	0,45	0,60	0,75	0,90	1,05	1,20	1,35	1,50

Observe que o valor a ser pago, em função do número de fotocópias simples, determina a sequência: (0,15; 0,30; 0,45; 0,60; 0,75; 0,90; 1,05; 1,20; 1,35; 1,50).

Os termos dessa sequência, a partir do segundo, são obtidos somando a constante 0,15 ao termo antecedente. Esse é um exemplo de progressão aritmética.

Fonte: [Leonardo 2016, p. 193]

O livro de Chavante e Prestes 2016, apresenta a quantidade total de livros lido por um aluno com o objetivo de ler dois deles a cada mês.

Figura 35 – Quantidade de livros lido por mês.

Carlos tornou a leitura um hábito pessoal. Ele havia lido, até o início de janeiro de 2018, 20 livros e se dispôs a ler 2 livros por mês, sem repeti-los. Caso consiga cumprir sua meta, observe a quantidade total de livros que Carlos terá lido, mês a mês, a partir do início de janeiro.

Mês	Quantidade total de livros lidos
1º	20
2º	22
3º	24
4º	26
5º	28

Estudantes da Escola Estadual Professora Leila Mara Avelino, em Sumaré (SP), lendo na biblioteca, em dezembro de 2014. O hábito de ler expande nossa visão de mundo, aumenta nosso vocabulário e torna-se um momento de lazer quando a história é agradável para nós.

A sequência formada pela quantidade total de livros lidos, mês a mês, a partir do início de janeiro, é um exemplo de **progressão aritmética**, abreviadamente conhecida como **PA**. Observe que um termo qualquer dessa sequência, a partir do segundo, é obtido por meio da adição do termo anterior com 2, ou seja:

- $a_2 = \underbrace{20}_{a_1} + 2 = 22$
- $a_3 = \underbrace{22}_{a_2} + 2 = 24$
- $a_4 = \underbrace{24}_{a_3} + 2 = 26$
- $a_5 = \underbrace{26}_{a_4} + 2 = 28$

Nesse caso, tem-se $a_{n+1} = a_n + 2$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

Fonte: [Chavante e Prestes 2016, p. 176]

O livro de Dante 2016, a quantidade de produtos que foram produzidos em um determinado ano.

Figura 36 – Produção de uma empresa.

Situações envolvendo grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais são muito comuns. Acompanhe uma delas:

Uma empresa produziu, em 2012, 100 000 unidades de certo produto. Quantas unidades deveria ter produzido, anualmente, de 2012 a 2017, se o aumento anual de produção fosse estabelecido em 20 000 unidades?

Esquematizamos da seguinte forma:

- produção de 2012: 100 000
- produção de 2013:
  (produção de 2012) + 20 000 = 100 000 + 20 000 = 120 000
- produção de 2014:
  (produção de 2013) + 20 000 = 120 000 + 20 000 = 140 000
- produção de 2015:
  (produção de 2014) + 20 000 = 140 000 + 20 000 = 160 000
- produção de 2016:
  (produção de 2015) + 20 000 = 160 000 + 20 000 = 180 000
- produção de 2017:
  (produção de 2016) + 20 000 = 180 000 + 20 000 = 200 000

Nessas condições, a produção anual desse período pode ser representada pela sequência:

(100 000, 120 000, 140 000, 160 000, 180 000, 200 000)

Note que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é obtido por meio da adição do termo anterior a este e um número fixo (20 000, nesse caso). Ou seja, a produção sofreu aumentos iguais de 20 000 unidades, em intervalos de tempo iguais (1 ano, nesse caso).

Sequências desse tipo são chamadas **progressões aritméticas (PAs)**. Observe que a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante (20 000 unidades, nessa sequência).

Fique atento!
Já estudamos alguns aspectos da PA relacionados a funções nos capítulos anteriores. Agora, vamos formalizar o conceito.

Fonte: [Dante 2016, p. 213]

O livro de Souza e Garcia 2016 utiliza uma tabela de preços com a quantidade de passagens em certa companhia de transporte coletivo.

Figura 37 – Companhia de transporte coletivo.

Certa companhia de transporte coletivo urbano fixou em seu guichê de vendas uma tabela de preços. Observe.

Tabela de preços

Quantidade de passagens	Preço (R$)
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
⋮	⋮

A direção

Desenhorama Estúdio

Desenhorama Estúdio

Podemos representar o valor cobrado em função da quantidade de passagens nessa companhia por meio da seguinte sequência:

$$(4, 8, 12, 16, 20, \ldots)$$

Fonte: [Souza e Garcia 2016, p. 200]

O livro de Balestri 2016 utiliza a organização da fileira de soldados para um treinamento, onde de uma fileira para outra existem dois soldados a mais.

Figura 38 – Tabela: Quantidade de soldados.

Em certo treinamento, os soldados de um batalhão militar foram organizados em fileiras, obedecendo ao seguinte padrão:

Ordem da fileira	Quantidade de soldados
1ª	1
2ª	3
3ª	5
4ª	7
⋮	⋮
19ª	37
20ª	39

A quantidade de soldados de cada fileira pode ser escrita como uma sequência:

$$(1, 3, 5, 7, \ldots, 37, 39)$$

Observe que a partir do segundo termo, subtraindo de um termo o seu antecessor, obtemos sempre o mesmo resultado, nesse caso 2.

$$a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$$
$$a_3 - a_2 = 5 - 3 = 2$$
$$a_4 - a_3 = 7 - 5 = 2$$
$$\vdots$$
$$a_{20} - a_{19} = 39 - 37 = 2$$

Esse tipo de sequência é conhecida como **progressão aritmética** ou simplesmente PA. O resultado constante obtido subtraindo de um termo o seu antecessor é chamado de **razão** da PA.

Note que cada termo dessa sequência é duas unidades maior que seu antecessor. Assim, para obter um termo dessa sequência, basta adicionar ao termo antecessor a razão 2.

$$1, \underbrace{3}_{1+2}, \underbrace{5}_{3+2}, \underbrace{7}_{5+2}, \ldots, \underbrace{37}_{35+2}, \underbrace{39}_{37+2}$$

Fonte: [Balestri 2016, p. 183]

O livro de Paiva 2015, utiliza uma construção de linha de metrô, onde a partir do início de janeiro, tinham sido construídos 12 km, mostrando que essa linha cresceu $0,5$ km ao mês.

Figura 39 – Construção da nova linha de metrô.

Uma nova linha do metrô, ainda em construção, tinha 12 km no início de janeiro do ano passado. De lá para cá, essa linha cresceu 0,5 km ao mês.

A sequência a seguir apresenta os comprimentos, em quilômetro, dessa linha do metrô, mês a mês, a partir do início de janeiro do ano passado:

(12; 12,5; 13; 13,5; 14; 14,5; ...)

Essa sequência numérica é chamada de **progressão aritmética**, porque, adicionando a cada um de seus termos uma mesma constante, obtemos o termo seguinte; nesse caso, adicionamos 0,5 a cada termo.

Construção da nova linha do metrô, em São Paulo. Foto de 2014.

Fonte: [Paiva 2015, p. 12]

O livro de Smole e Diniz 2017, apresenta três sequências em progressão aritmética e pede para que observemos como podem ser obtidas as sequências usando sempre o termo anterior.

Figura 40 – Sequência em progressão aritmética.

Observe estas sequências:

a) 2, 5, 8, 11, ...

b) 35, 30, 25, 20, 15, ...

c) 1; 1,01; 1,02; 1,03; 1,04; ...

Pense em como você pode obter, em cada uma dessas sequências, o segundo termo a partir do primeiro, o terceiro termo a partir do segundo, o quarto termo a partir do terceiro, e assim por diante.

Você deve ter notado que, na primeira sequência, cada termo a partir do segundo é obtido pela adição do 3 ao termo anterior a ele:

$$2 \underbrace{\quad}_{+3} 5 \underbrace{\quad}_{+3} 8 \underbrace{\quad}_{+3} 11 \ldots$$

Já na segunda sequência, cada termo a partir do segundo é obtido quando subtraímos 5, ou somamos −5, ao termo anterior a ele:

$$35 \underbrace{\quad}_{-5} 30 \underbrace{\quad}_{-5} 25 \underbrace{\quad}_{-5} 20 \underbrace{\quad}_{-5} 15 \ldots$$

Finalmente, na terceira sequência, cada termo a partir do segundo é obtido quando somamos 0,01 ao termo anterior a ele:

$$1 \underbrace{\quad}_{+0,01} 1,01 \underbrace{\quad}_{+0,01} 1,02 \underbrace{\quad}_{+0,01} 1,03 \underbrace{\quad}_{+0,01} 1,04 \ldots$$

A esse tipo de sequência chamamos **progressão aritmética**.

Fonte: [Smole e Diniz 2017, p. 149]

Os livros de Iezzi et al. 2016, Leonardo 2016, Chavante e Prestes 2016, Paiva 2015 e Smole e Diniz 2017 definem progressão aritmética como uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se ao anterior uma constante; os livros de Dante 2016, Souza e Garcia 2016 e Balestri 2016 definem progressão aritmética como toda sequência numérica em que, a partir do segundo termo, a diferença entre um termo qualquer e seu antecessor é igual a uma constante.

Todos os livros apresentam exercícios contextualizados sobre progressão aritmética, relacionando questões envolvendo geometria, com exceção do livro de Smole e Diniz 2017; os livros de Leonardo 2016, Dante 2016 e Balestri 2016 trazem exercícios envolvendo matemática financeira e nos livros de Paiva 2015 e Smole e Diniz 2017 trazem uma proposta de produção textual envolvendo progressão aritmética.

3.3.1 Conexão entre Progressão Aritmética e Funções

Todos fazem uma conexão entre função afim e progressão aritmética, em que nos livros de Iezzi et al. 2016, Dante 2016, Paiva 2015 e Smole e Diniz 2017 essa conexão é mostrada apenas pela representação gráfica formada por um conjunto discreto de pontos.

O livro de Leonardo 2016, apresenta a conexão entre progressão aritmética com função afim através de uma contextualização usando a visita de um técnico em reparo de uma instalação elétrica relacionando tempo de serviço ao custo, fazendo em seguida a representação gráfica.

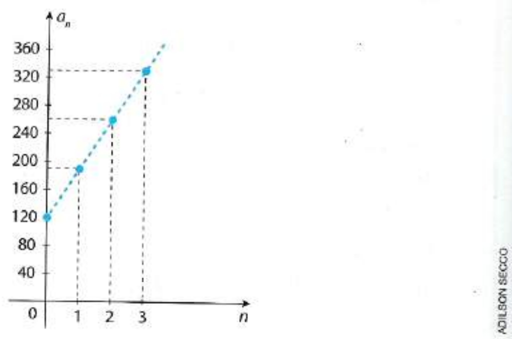
Figura 41 – Tempo de serviço x custo.

Para fazer reparos na instalação elétrica, um técnico cobra R$ 120,00 pela visita mais R$ 70,00 por hora adicional. Observe a tabela a seguir.

Tempo (h)	0	1	2	3
Custo (R$)	120,00	190,00	260,00	330,00

O custo, em função das horas gastas no reparo, forma uma PA (120, 190, 260, 330, ...), em que $a_0 = 120$ e $r = 70$.

O termo geral (a_n) de uma PA, de primeiro termo a_0 e razão r, é uma função que associa a cada número natural n o valor $a_n = a_0 + nr$, com $n \in \mathbb{N}$. Essa função se assemelha a uma função afim, mas com domínio no conjunto dos números naturais. Assim, o gráfico dessa função será formado por pontos colineares: $(0, a_0)$, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ..., (n, a_n), ... Veja abaixo os pontos de coordenadas (0, 120), (1, 190), (2, 260) e (3, 330).



Fonte: [Leonardo 2016, p. 196]

O livro de Chavante e Prestes 2016, além de fazer a representação gráfica, ele mostra que a progressão aritmética $a_n = a_1 + (n-1)r$ possui a mesma lei de formação de $f(x) = ax + b$, sendo $a = r$ e $b = a_1 - r$ e demonstra que a função afim $f(x) = ax + b$ e (a_n) uma progressão aritmética de razão r, então $(f(n))$ é uma progressão aritmética de razão a e $(f(a_n))$ é uma progressão aritmética de razão ar.

Os livros de Souza e Garcia 2016 e Balestri 2016 fazem a conexão entre progressão aritmética e função afim considerando a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ elementos de uma progressão aritmética de razão r, f será uma função afim, definida por $f(x) = ax + b$, se, e somente se, $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ for uma progressão aritmética de razão ar.

Figura 42 – Progressão aritmética e função afim

Estudamos anteriormente que as sequências numéricas são funções de domínio $\mathbb{N}^*$ e contradomínio não vazio e que PA é toda sequência numérica em que, a partir do segundo termo, a diferença entre um termo e seu antecessor resulta em uma constante, chamada de razão (r).

Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 1$ e a PA $(8, 5, 2, -1, -4, \ldots)$ de razão -3. Calculando f(8), f(5), f(2), f(−1), f(−4),... obtém-se uma nova sequência.

x	8	5	2	−1	−4	...
f(x)	15	9	3	−3	−9	...

Note que a sequência $(15, 9, 3, -3, -9, \ldots)$ é uma PA de razão -6 e essa razão é igual ao produto entre o coeficiente a da função afim $(a = 2)$ e a razão da PA anterior $(r = -3)$, isto é, $-6 = 2 \cdot (-3)$.

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será definida por uma função afim do tipo $f(x) = ax + b$ se, e somente se, para qualquer PA $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots)$, a sequência das imagens $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots, f(x_n), \ldots)$ for uma PA de razão $a \cdot r$, em que a é coeficiente de f e r é a razão da PA inicial.

Fonte: [Balestri 2016, p. 190]

Apenas os livros de Souza e Garcia 2016 e Balestri 2016 trazem conexão entre progressão aritmética e função quadrática apresentado que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será uma função quadrática, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, se, e somente se, para toda progressão aritmética $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ de razão não nula r as diferenças $f(x_2) - f(x_1), f(x_3) - f(x_2), f(x_4) - f(x_3), \ldots, f(x_n) - f(x_{n-1}), \ldots$ formam uma nova progressão aritmética e essa razão dessa nova progressão será $2ar^2$.

Figura 43 – Progressão aritmética e função quadrática

Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 2$ e a PA $(0, 2, 4, 6, 8, ...)$ de razão 2. Calculando $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$, $f(8)$,... obtém-se uma outra sequência.

$$(-2, 2, 14, 34, 62, ...)$$

Note que essa sequência não é uma PA, pois a diferença entre os termos consecutivos não é constante.

$$f(2) - f(0) = 2 - (-2) = 4$$
$$f(4) - f(2) = 14 - 2 = 12$$
$$f(6) - f(4) = 34 - 14 = 20$$
$$f(8) - f(6) = 62 - 34 = 28$$
$$\vdots$$

No entanto, esses resultados formam uma nova sequência $(4, 12, 20, 28, ...)$, que é uma PA, nesse caso, de razão 8.

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será definida por uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, se, e somente se, para qualquer PA $(x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, ...)$ de razão r diferente de zero, a sequência das diferenças $(f(x_2) - f(x_1), f(x_3) - f(x_2), f(x_4) - f(x_3), ..., f(x_n) - f(x_{n-1}), ...)$ for uma PA de razão $2ar^2$.

Fonte: [Balestri 2016, p. 190]

3.4 Progressão Geométrica

Todos os livros, com exceção do livro de Smole e Diniz 2017, introduzem Progressão Geométrica (PG) através de uma contextualização. O livro de Iezzi et al. 2016, usa a criação de um blog por dois amigos, onde cada um deles convida mais três novos amigos e assim sucessivamente.

Figura 44 – A propagação de uma notícia

Você já imaginou a velocidade com que uma notícia, corrente, foto, vídeo ou boato podem ser multiplicados pelas redes sociais?

Suponha que, em certo dia, dois amigos criaram um blogue sobre saúde e bem-estar, com dicas, receitas de comidas saudáveis, relatos de experiências pessoais etc.

No dia seguinte, cada um desses amigos convidou três novos amigos para visitar o blogue. Cada um desses três novos amigos convidou, no outro dia, três outros amigos para visitar o blogue e assim sucessivamente.

Faça o que se pede a seguir.

Suponha que esse padrão seja mantido e que ninguém seja convidado a visitar o blogue por mais de um amigo. Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

a) Começando pelo dia em que o blogue foi criado, escreva a sequência que representa o número diário de visitantes do blogue.

b) Responda: qual é a regularidade que você observa nessa sequência?

c) Obtenha um termo geral dessa sequência.

d) Responda: em quantos dias (considere o dia 1 o dia da criação do blogue) o número de visitas diárias ao blogue terá superado 1 milhão? Use uma calculadora.

Fonte: [Iezzi et al. 2016, p. 182]

O livro de Leonardo 2016, com dados do IBGE, compara-se o crescimento populacional em relação ao ano anterior e faz-se estimativa para os anos seguintes usando a mesma taxa.

Figura 45 – Dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE)

Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em julho de 2015 o estado mais populoso do Brasil era São Paulo, com aproximadamente 44.400.000 habitantes, população essa maior que das regiões Norte e Centro-Oeste juntas. Sabendo que a população do estado de São Paulo teve um crescimento de cerca de 0,8% em relação a julho de 2014, e supondo que esse crescimento anual se mantenha, qual seria a estimativa para a população desse estado em julho de 2018?

Pedestres na Rua XV de Novembro, centro histórico de São Paulo (SP), 2014.

Para calcular esse valor, vamos partir da população em julho de 2015.

Reflita

Por que os números obtidos a partir de julho de 2017 não são números inteiros?

População estimada do estado de São Paulo	
Data	Número de habitantes
julho/2015	44.400.000
julho/2016	44.400.000 · 1,008 = 44.755.200
julho/2017	44.755.200 · 1,008 = 45.113.241,6
julho/2018	45.113.241,6 · 1,008 = 45.474.147,5328

Logo, em julho de 2018, a população estimada seria de aproximadamente 45.474.148 habitantes.

Observe que, a partir de julho de 2016, a estimativa da população do estado de São Paulo foi obtida multiplicando-se a população de julho do ano anterior pela constante 1,008.

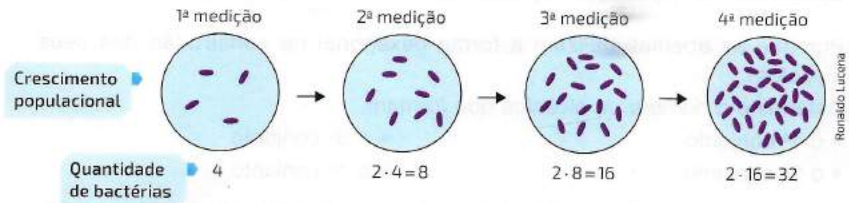
A sequência (44.400.000; 44.755.200; 45.113.241,6; 45.474.147,5328) é um exemplo de progressão geométrica.

Fonte: [Leonardo 2016, p. 200]

O livro de Souza e Garcia 2016, apresenta duplicação de bactérias a cada dia.

Figura 46 – Crescimento populacional com quantidade de bactérias.

Em certo experimento, foi observado que a quantidade de bactérias de uma amostra duplica a cada dia, conforme o esquema.



A quantidade de bactérias dessa amostra, a cada dia, pode ser representada por meio da sequência $(4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$.

Fonte: [Souza e Garcia 2016, p. 214]

O livro de Chavante e Prestes 2016 apresenta uma questão de juros compostos dando um capital $R\$\ 10.000,00$ e uma taxa de 1% ao mês e calculando seus montantes em n meses.

Figura 47 – Introdução a PG com Juros compostos.

No início deste capítulo, vimos uma situação em que o capital de R$ 10 000,00 era rentabilizado a uma taxa de juro composto de 1% ao mês. Conforme estudamos no capítulo **6**, a característica fundamental do juro composto é que a taxa de juros incide sobre o montante do período anterior. Assim, se M_k é o montante do período k, obtemos o montante do período seguinte multiplicando M_k pelo número $(1 + i)$, em que i é a taxa de juro. Dessa maneira, tem-se $M_{k+1} = M_k \cdot (1 + i)$. Assim:

- $M_2 = M_1 \cdot (1 + i)$
- $M_3 = M_2 \cdot (1 + i)$

$\vdots$

- $M_n = M_{n-1} \cdot (1 + i)$

A sequência $(10\,000; 10\,100; 10\,201; \ldots; 10\,000 \cdot 1{,}01^{n-1})$, dos montantes, em reais, obtidos mês a mês, a partir do início da aplicação realizada por Mirela, é um exemplo que possui essa característica. Essa sequência é denominada **progressão geométrica**, abreviadamente conhecida como **PG**.

Fonte: [Chavante e Prestes 2016, p. 186]

O livro de Dante 2016, apresenta taxa de crescimento de uma usina de açúcar.

Figura 48 – Usina de cana-de-açúcar.

A taxa de crescimento relativo de uma grandeza é dada pela razão entre seu aumento e seu valor inicial. Assim, uma grandeza que passa do valor a para o valor b tem taxa de crescimento relativo igual a $\frac{b - a}{a}$.

Por exemplo, a taxa de crescimento relativo da produtividade de uma usina de açúcar, cuja produção semanal passa de 5 toneladas para 8 toneladas, é de 60%, pois $\frac{8 - 5}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}60 = 60\%$.

Usina de cana-de-açúcar na cidade de Cerqueira César (SP). Fotografia de 2014.

Agora, estudaremos as sequências que variam com taxa de crescimento relativo constante. Examine, por exemplo, a seguinte situação-problema:

Em 2017 uma usina produziu 200 000 kg de açúcar. Quantos quilogramas essa usina produzirá no período de 2017 a 2022 se o aumento de produção anual for sempre de 10% em relação ao ano anterior?

Esquematizamos o problema da seguinte forma:

- produção em 2017 = 200 000
- produção em 2018 = produção em 2017 · 1,10 = 200 000 · 1,10 = 220 000
- produção em 2019 = produção em 2018 · 1,10 = 220 000 · 1,10 = 242 000
- produção em 2020 = produção em 2019 · 1,10 = 242 000 · 1,10 = 266 200
- produção em 2021 = produção em 2020 · 1,10 = 266 200 · 1,10 = 292 820
- produção em 2022 = produção em 2021 · 1,10 = 292 820 · 1,10 = 322 102

Fique atento!
Se uma grandeza tem taxa de crescimento relativo igual a i, o novo valor é obtido fazendo $(1 + i)$ vezes o valor anterior.
No exemplo, $(1 + i) = (1 + 0{,}10) = 1{,}10$ ou $1{,}1$.

Nessas condições, a produção anual, nesse período, será representada pela sequência (200 000, 220 000, 242 000, 266 200, 292 820, 322 102).

Note que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por um número fixo (no caso, 1,10), ou seja, a produção anual teve uma taxa de crescimento relativo constante de 10% em relação ao ano anterior.

Sequências com esse tipo de lei de formação são chamadas **progressões geométricas** (**PGs**). Nesse exemplo, o valor 1,10 é chamado **razão** da progressão geométrica e indicado por q (no exemplo, $q = 1{,}10$). Dizemos que os termos dessa sequência estão em progressão geométrica (PG).

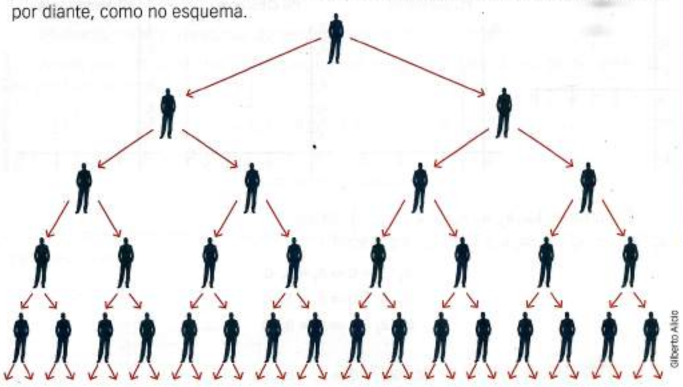
Fique atento!
Também já estudamos alguns aspectos das PGs em capítulos anteriores.

Fonte: [Dante 2016, p. 221]

O livro de Balestri 2016, apresenta “correntes” em rede social.

Figura 49 – Corrente formada por pessoas.

Suponha que uma pessoa envie um *e-mail* a duas pessoas diferentes e cada uma dessas duas pessoas encaminhe esse mesmo *e-mail* a outras duas pessoas e assim por diante, como no esquema.



A quantidade de pessoas que enviaram o *e-mail* pode ser escrita como uma sequência:

$$(1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$$

Observe que a partir do segundo termo, ao se dividir um termo por seu antecessor, sempre se obtém o mesmo resultado, nesse caso 2.

$$a_2 : a_1 = 2 : 1 = 2$$
$$a_3 : a_2 = 4 : 2 = 2$$
$$a_4 : a_3 = 8 : 4 = 2$$
$$a_5 : a_4 = 16 : 8 = 2$$
$$\vdots$$

“Corrente”

As “correntes” são mensagens virtuais, geralmente de autor desconhecido, que exigem o envio de uma cópia a certa quantidade de pessoas. Na maioria dos casos existe a promessa de benefício, caso as recomendações sejam seguidas, ou malefício, se a “corrente” for quebrada.

Esta imagem é uma representação artística. As cores utilizadas não correspondem às reais.

Para obter o termo sucessor, basta multiplicar o termo antecessor pela razão 2.

$$1, \underset{1\cdot 2}{2}, \underset{2\cdot 2}{4}, \underset{4\cdot 2}{8}, \underset{8\cdot 2}{16}, \ldots$$

Fonte: [Balestri 2016, p. 195]

O livro de Paiva 2015 apresenta um capital de $R\$\ 50.000,00$, uma taxa de 10% ao ano e calcula-se os montantes durante 4 anos.

Figura 50 – Juro composto.

Um fundo de investimento oferece a taxa de juro constante de 10% ao ano, em regime de juro composto. Se um capital de R$ 50.000,00 for aplicado nesse fundo durante 4 anos, obteremos o montante acumulado ao final de cada ano do seguinte modo:

Capital inicial: 50.000

Montante ao final do 1º ano: $50.000 \cdot 1,1 = 55.000$

Montante ao final do 2º ano: $55.000 \cdot 1,1 = 60.500$

Montante ao final do 3º ano: $60.500 \cdot 1,1 = 66.550$

Montante ao final do 4º ano: $66.550 \cdot 1,1 = 73.205$

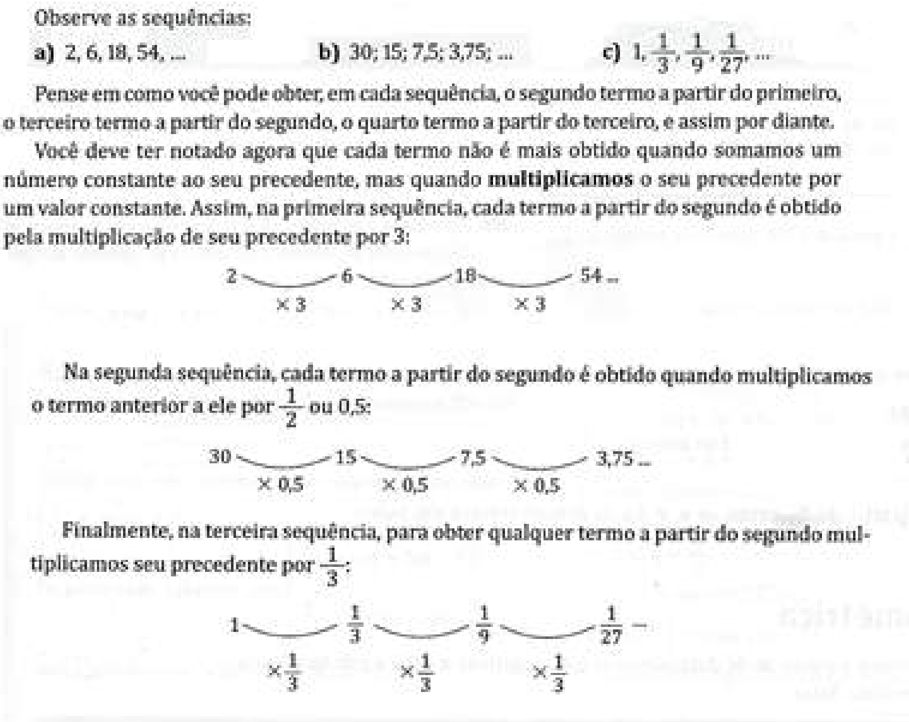
A sequência formada pelo capital inicial e pelos montantes acumulados ao final de cada um dos quatro anos é:

$$(50.000, 55.000, 60.500, 66.550, 73.205)$$

Fonte: [Paiva 2015, p. 22]

O livro de Paiva 2015, apresenta três sequências em progressão geométrica e pede para observar como podem ser obtidas as sequências usando sempre o termo anterior, definindo em seguida progressão geométrica como toda sequência de números, na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante. Esta mesma forma é apresentada nos livros de Iezzi et al. 2016, Leonardo 2016, Chavante e Prestes 2016 e Paiva 2015.

Figura 51 – Sequência em progressão geométrica.



Observe as sequências:

a) 2, 6, 18, 54, ... **b)** 30; 15; 7,5; 3,75; ... **c)** $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

Pense em como você pode obter, em cada sequência, o segundo termo a partir do primeiro, o terceiro termo a partir do segundo, o quarto termo a partir do terceiro, e assim por diante.

Você deve ter notado agora que cada termo não é mais obtido quando somamos um número constante ao seu precedente, mas quando **multiplicamos** o seu precedente por um valor constante. Assim, na primeira sequência, cada termo a partir do segundo é obtido pela multiplicação de seu precedente por 3:

$$2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{\times 3} 18 \xrightarrow{\times 3} 54 \ldots$$

Na segunda sequência, cada termo a partir do segundo é obtido quando multiplicamos o termo anterior a ele por $\frac{1}{2}$ ou 0,5:

$$30 \xrightarrow{\times 0,5} 15 \xrightarrow{\times 0,5} 7,5 \xrightarrow{\times 0,5} 3,75 \ldots$$

Finalmente, na terceira sequência, para obter qualquer termo a partir do segundo multiplicamos seu precedente por $\frac{1}{3}$:

$$1 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{3} \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{9} \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{27} \ldots$$

Fonte: [Smole e Diniz 2017, p. 156-157]

Os livros de Dante 2016, Souza e Garcia 2016 e Balestri 2016 definem progressão geométrica como toda sequência numérica em que, a partir do segundo termo, o quociente entre um termo e seu antecessor é igual a uma constante.

Todos os livros trazem questões contextualizadas sobre progressão geométrica, assim como relacionam questões sobre matemática financeira e todos, com exceção dos livros de Chavante e Prestes 2016 e Dante 2016, questões envolvendo geometria. Os livros de Souza e Garcia 2016, Balestri 2016, Paiva 2015 e Smole e Diniz 2017 trazem nos exercícios propostos de produção textual em progressão geométrica.

Todos os livros, com exceção dos livros de Paiva 2015 e Smole e Diniz 2017 trazem problemas que envolvem progressão aritmética e progressão geométrica ao mesmo tempo.

3.4.1 Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica

Os livros de Iezzi et al. 2016, Leonardo 2016, Dante 2016 e Souza e Garcia 2016, ao introduzir soma finita dos termos de uma progressão geométrica, fazem primeiro sua demonstração.

No livro de Smole e Diniz 2017, apresenta uma sequência e faz passo a passo da demonstração desses valores; em seguida, faz a parte algébrica.

Figura 52 – Exemplo usando a soma de uma progressão geométrica.

Do mesmo modo que para a P.A., também para a P.G. é possível encontrar uma forma de calcular a soma de seus termos, caso ela seja finita, ou de seus **n** primeiros termos, se ela for infinita.

Tomemos, por exemplo, a P.G. (2, 6, 18, 54, 162). Vemos que nela $a_1 = 2$ e $q = 3$. Para calcular a soma de seus termos, fazemos $S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 = 242$.

Multiplicando todos os termos dessa P.G. pela razão 3, temos:

$$2 \cdot 3 = 6$$
$$6 \cdot 3 = 18$$
$$18 \cdot 3 = 54$$
$$54 \cdot 3 = 162$$
$$162 \cdot 3 = 486$$

Se somarmos todos os produtos dessas multiplicações, obteremos como resultado a soma da P.G. multiplicada por 3. Veja: $6 + 18 + 54 + 162 + 486 = 3 \cdot S$.

Observe que em **S** e **3 · S** há muitas parcelas em comum. Se fizermos $3 \cdot S - S$, essas parcelas se anularão:

$$\left.\begin{aligned} 3 \cdot S &= \cancel{6} + \cancel{18} + \cancel{54} + \cancel{162} + 486 \\ S &= 2 + \cancel{6} + \cancel{18} + \cancel{54} + \cancel{162} \end{aligned}\right\} -$$

Logo, $3 \cdot S - S = 486 - 2 = 484$, o que nos fornece $S = \frac{484}{2} = 242$.

Vejamos como repetir esse raciocínio para deduzir uma fórmula geral para a soma dos **n** primeiros termos de uma P.G. qualquer.

Fonte: [Smole e Diniz 2017, p. 161]

Os livros de Balestri 2016, Chavante e Prestes 2016 e Paiva 2015 primeiro contextualizam, para em seguida, fazer a demonstração. O livro de Balestri 2016 traz a quantidade de e-mail's enviados nas "correntes" citado na apresentação de progressão geométrica.

Figura 53 – Quantidade de pessoas que enviaram as mensagens

Retornando à situação vista anteriormente, que relaciona a etapa com a quantidade de pessoas que enviaram o *e-mail*, tínhamos 1 pessoa na primeira etapa, 2 pessoas na segunda etapa, 4 pessoas na terceira etapa, e assim sucessivamente, formando a PG de razão 2 a seguir.

$$(1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$$

É possível calcular a quantidade total de pessoas que enviaram o *e-mail*, por exemplo, nas primeiras seis etapas, efetuando a seguinte adição:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$$

Portanto, nas primeiras seis etapas 63 pessoas enviaram o *e-mail*.

Contudo, tal como na PA, dependendo da quantidade de termos da PG, esse cálculo pode ser muito trabalhoso se efetuado termo a termo. Para isso, pode-se obter esse resultado com o auxílio de uma fórmula.

Considerando a PG finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ de n termos e indicando sua soma por S_n, temos:

Fonte: [Balestri 2016, p. 204]

O livro de Chavante e Prestes 2016 usa o faturamento de uma empresa no período de 36 meses.

Figura 54 – Faturamento de uma empresa.

Camila assumiu a direção de uma pequena empresa que teve um faturamento de R$ 100 000,00 no último mês. Ela espera um crescimento a uma taxa de 1% ao mês nos próximos 36 meses. Surgiu, então, o interesse de calcular o faturamento desse período de acordo com o esperado.

Observe que esse problema consiste em obter a soma dos 36 termos da PG de primeiro termo $a_1 = \underbrace{101\,000}_{100\,000 \cdot 1{,}01}$ e razão $q = 1{,}01$, caso seja desconsiderado que os valores monetários devam ser arredondados na segunda casa decimal.

Uma das maneiras de fazer esse cálculo é utilizando uma planilha eletrônica. Camila sabe que, nesse tipo de *software*, ela pode obter os 36 termos dessa PG com poucos comandos e, em seguida, calcular a soma desejada. Observe na figura os valores do faturamento esperado dos primeiros meses.

Os valores apresentados nesta planilha eletrônica estão arredondados até a segunda casa decimal. Com o auxílio de uma calculadora, junte-se a um colega e obtenham os dez primeiros termos dessa PG. Em seguida, comparem com os valores aqui apresentados.

Ao adicionar o faturamento esperado dos 36 meses, ainda utilizando a planilha eletrônica, obtemos R$ 4 350 764,71.

Fonte: [Chavante e Prestes 2016, p. 193]

E o livro de Paiva 2015 usa taxa anual de crescimento na produção de soja estimando um total da mesma em um determinado período.

Figura 55 – Produção de soja.

Em 2001, a produção de soja de um estado foi de 4 milhões de toneladas. A partir de então, a taxa anual de crescimento na produção de soja desse estado tem sido constante, em 5%.

Prevendo que essa taxa anual de crescimento continue constante até 2030, os técnicos da Secretaria da Agricultura estimaram o total de soja produzida nesse estado em 30 anos, de 2001 a 2030. Essa estimativa é a soma dos termos da seguinte P.G. de 30 termos e razão 1,05: $(4; 4{,}2; 4{,}41; \ldots; 4 \cdot (1{,}05)^{28}; 4 \cdot (1{,}05)^{29})$, em que cada termo representa a quantidade de soja produzida anualmente, em milhões de toneladas.

Mesmo dispondo de uma calculadora, os técnicos não somaram os termos um a um, pois o trabalho seria longo e tedioso. Eles usaram a fórmula a seguir, que expressa a soma dos n primeiros termos de uma P.G. não constante, em função do primeiro termo a_1 e da razão q:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

Observe a simplicidade do cálculo, que obviamente não dispensa o uso da calculadora:

$$S_{30} = \frac{4 \cdot [1 - (1{,}05)^{30}]}{1 - 1{,}05} \approx 265{,}8$$

Fonte: [Paiva 2015, p. 29]

Os livros de Iezzi et al. 2016, Leonardo 2016, Souza e Garcia 2016 e Balestri 2016 trazem a ideia de limite observando os valores de algumas potências formadas por base $0 < |a| < 1$, verificando que quanto maior for o valor do expoente, mais próximo de zero será o resultado. O livro de Smole e Diniz 2017, além desta observação, faz a representação gráfica dessa situação.

Figura 56 – Potência de base entre -1 e 1.

Já estudamos a soma nos n primeiros termos de uma PG para $n \in \mathbb{N}^*$. Agora veremos como calcular a soma dos termos de uma PG infinita. Para isso, vamos primeiro analisar o valor de algumas potências. Observe.

n	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$
1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4} = 0{,}75$
2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = 0{,}5625$
3	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} = 0{,}421875$
$\vdots$	$\vdots$
10	$\left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \frac{59.049}{1.048.576} \simeq 0{,}056314$

n	$\left(-\frac{1}{5}\right)^n$
1	$\left(-\frac{1}{5}\right)^1 = -\frac{1}{5} = -0{,}2$
2	$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} = 0{,}04$
3	$\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1}{125} = -0{,}008$
$\vdots$	$\vdots$
10	$\left(-\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{1}{9.765.625} \simeq 0{,}0000001$

Analisando os valores obtidos, verificamos que, em ambas as potências, quanto maior for o valor de n, mais próximo de zero será o resultado obtido. Intuitivamente, podemos considerar que para qualquer número real a, com $0 < |a| < 1$, quanto maior for o valor de n, mais próximo de zero estará o valor de a^n. Dizemos, então, que, para $-1 < a < 1$, quando n tende a infinito, o valor de a^n tende a zero, ou, ainda, para $-1 < a < 1$, o limite de a^n, quando n tende a infinito, é igual a zero.

Em linguagem simbólica: $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$, para $-1 < a < 1$

Exemplos

- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$
- $\lim\limits_{n \to \infty} (-0{,}6)^n = 0$

Fonte: [Leonardo 2016, p. 206]

O livro de Paiva 2015 apresenta a ideia de limite através de um exemplo sobre uma empresa que tinha reservado 1 milhão de reais para aplicar em obras sociais, onde no primeiro ano seria aplicado a metade desta verba, e em cada ano seguinte seria aplicada metade do que sobrou da verba no ano anterior.

Figura 57 – Verba a ser aplicada em obras sociais.

Uma empresa reservou 1 milhão de reais para aplicar em obras sociais. No primeiro ano será aplicada a metade dessa verba, e em cada ano seguinte será aplicada metade do que sobrou da verba no ano anterior. A P.G. infinita a seguir representa os valores, em milhão de reais, aplicados ano a ano:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$$

Observe que, a cada ano que passa, o total aplicado em obras sociais aumenta e se aproxima cada vez mais de 1 milhão de reais:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0{,}96875$$

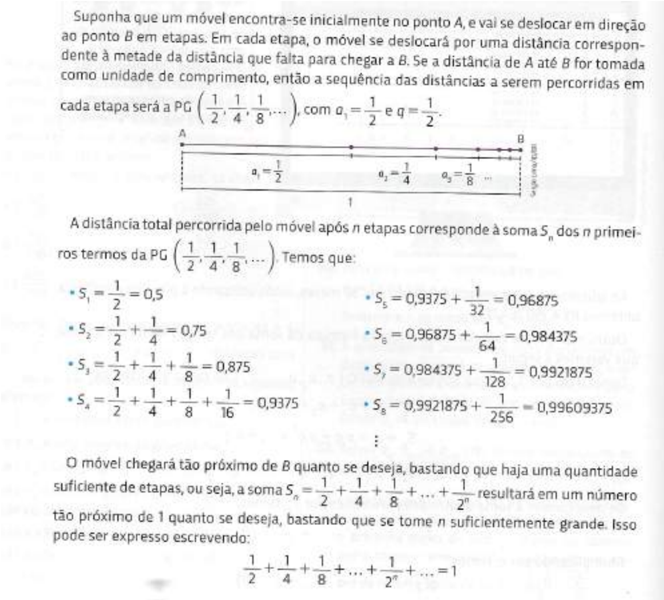
$\vdots$

Por mais que adicionemos termos a essa P.G., jamais chegaremos à soma 1; porém, adicionando mais e mais parcelas, vamos nos aproximar de 1 tanto quanto quisermos. Por isso, dizemos que 1 é o **limite** dessa soma.

Fonte: [Paiva 2015, p. 206]

O livro de Chavante e Prestes 2016 traz a ideia de limite através de um exemplo sobre um móvel que se encontra no ponto A, e vai se deslocar em direção ao ponto B em etapas, onde em cada etapa, o móvel se desloca à metade da distância que falta.

Figura 58 – Deslocamento de um móvel A em direção ao móvel B.



Suponha que um móvel encontra-se inicialmente no ponto A, e vai se deslocar em direção ao ponto B em etapas. Em cada etapa, o móvel se deslocará por uma distância correspondente à metade da distância que falta para chegar a B. Se a distância de A até B for tomada como unidade de comprimento, então a sequência das distâncias a serem percorridas em cada etapa será a PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$, com $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$.

A distância total percorrida pelo móvel após n etapas corresponde à soma S_n dos n primeiros termos da PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$. Temos que:

- $S_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$
- $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0{,}75$
- $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0{,}875$
- $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0{,}9375$
- $S_5 = 0{,}9375 + \frac{1}{32} = 0{,}96875$
- $S_6 = 0{,}96875 + \frac{1}{64} = 0{,}984375$
- $S_7 = 0{,}984375 + \frac{1}{128} = 0{,}9921875$
- $S_8 = 0{,}9921875 + \frac{1}{256} = 0{,}99609375$

$\vdots$

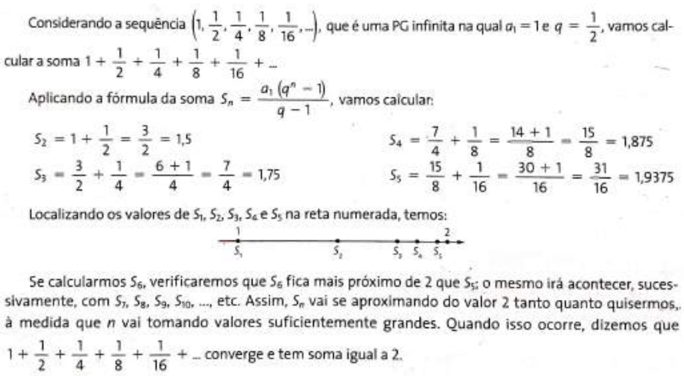
O móvel chegará tão próximo de B quanto se deseja, bastando que haja uma quantidade suficiente de etapas, ou seja, a soma $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ resultará em um número tão próximo de 1 quanto se deseja, bastando que se tome n suficientemente grande. Isso pode ser expresso escrevendo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$$

Fonte: [Chavante e Prestes 2016, p. 206]

O livro de Dante 2016 traz a ideia de limite através de exemplo com uma sequência infinita $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$.

Figura 59 – Soma infinita.



Considerando a sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$, que é uma PG infinita na qual $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$, vamos calcular a soma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

Aplicando a fórmula da soma $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, vamos calcular:

$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$S_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6+1}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75$

$S_4 = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{14+1}{8} = \frac{15}{8} = 1{,}875$

$S_5 = \frac{15}{8} + \frac{1}{16} = \frac{30+1}{16} = \frac{31}{16} = 1{,}9375$

Localizando os valores de S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5 na reta numerada, temos:

Se calcularmos S_6, verificaremos que S_6 fica mais próximo de 2 que S_5; o mesmo irá acontecer, sucessivamente, com S_7, S_8, S_9, S_{10}, ..., etc. Assim, S_n vai se aproximando do valor 2 tanto quanto quisermos, à medida que n vai tomando valores suficientemente grandes. Quando isso ocorre, dizemos que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ converge e tem soma igual a 2.

Fonte: [Dante 2016, p. 206]

Os livros de Souza e Garcia 2016 e Balestri 2016 apresentam série geométrica divergente, mostrando que se $q \leq -1$ ou $q \geq 1$ não existe um número real que corresponde ao limite da soma quando n tende ao infinito.

Todos os livros trazem questões de fração geratriz de uma dízima periódica na soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica.

3.4.2 Conexão entre Progressão Geométrica e Funções

Apenas o livro de Smole e Diniz 2017 não traz conexão de progressão geométrica com funções exponenciais, visto que nesse livro os assuntos sobre funções exponenciais e funções logarítmicas serão abordados após o assunto de sequências. No livro de Iezzi et al. 2016 essa conexão é apresentada apenas pela representação gráfica da progressão geométrica formada por pontos do gráfico da função exponencial. Nos livros de Chavante e Prestes 2016 e Paiva 2015, além da representação gráfica, é mostrada a lei de formação da função exponencial dada por $f(x) = b.a^x$, sendo $b = \frac{a_1}{q}$ e $a = q$. No livro de Chavante e Prestes 2016, ainda complementa dizendo que uma função exponencial $f(x) = b.a^x$ e (a_n) uma progressão aritmética de razão r, então $(f(n))$ é uma progressão geométrica de razão a e $(f(a_n))$ uma progressão geométrica de razão a^r. Essa mesma conexão de progressão geométrica com função exponencial é dada pelos livros Souza e Garcia 2016 e Balestri 2016.

Figura 60 – Conexão entre progressão geométrica e exponencial.

Considere a PA $(0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$ de razão 2, e a função do tipo exponencial $f(x) = 2 \cdot 3^x$. Podemos verificar que a sequência $(f(0), f(2), f(4), f(6), f(8), \ldots)$ é uma PG. Observe:

$$f(0) = 2 \cdot 3^0 = 2 \cdot 1 = 2$$
$$f(2) = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$
$$f(4) = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$$
$$f(6) = 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 729 = 1458$$
$$f(8) = 2 \cdot 3^8 = 2 \cdot 6561 = 13122$$
$$\vdots$$

Calculando a razão entre cada termo e seu antecessor, verificamos que $(2, 18, 162, 1458, 13122, \ldots)$ é uma PG de razão 9.

$$\frac{18}{2} = \frac{162}{18} = \frac{1458}{162} = \frac{13\,122}{1\,458} = 9$$

A razão dessa PG é igual ao coeficiente *a* da função $f(x) = b \cdot a^x$ elevado à razão *r* da PA, ou seja, $a^r = 3^2 = 9$.

Dados a função do tipo exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b \cdot a^x$ e $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots$ elementos de uma PA, a sequência $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots, f(x_n), \ldots)$ é uma progressão geométrica (PG) de razão a^r.

Fonte: [Souza e Garcia 2016, p. 221]

No livro de Dante 2016, à conexão de progressão geométrica com função exponencial é associando cada número natural positivo n o valor dado por $a_n = a_1.q^{n-1}$ e em seguida representa graficamente. No livro de Leonardo 2016, a conexão de progressão geométrica com função exponencial é apresentada através de uma contextualização sobre decaimento radioativo no organismo usando a meia-vida e em seguida constrói o gráfico dando restrição do domínio ao conjunto dos números naturais.

Figura 61 – Decaimento radioativo no organismo

Na medicina nuclear, é importante conhecer a velocidade com que um elemento radioativo se desintegra para saber por quanto tempo haverá radioatividade no organismo.

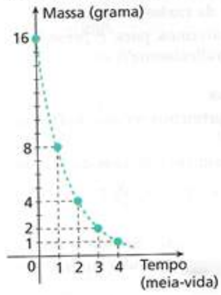
Chama-se *meia-vida* o tempo necessário para desintegrar metade dos átomos radioativos existentes em uma amostra. Um exemplo é o elemento radioativo iodo, cuja meia-vida é 8 dias. Esse elemento é usado no diagnóstico de doenças da glândula tireoide.

É possível interpretar graficamente o decaimento radioativo. Suponha que se deseje representar a desintegração de 16 gramas de iodo.

A lei de formação que descreverá a situação é do tipo exponencial: $f(n) = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, em que n é a quantidade de meias-vidas ($n \in \mathbb{R}_+$) e $f(n)$ é a massa.

Observe que, para $n \in \mathbb{N}$, temos a sequência (16, 8, 4, 2, 1, ...), que é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

O termo geral (a_n) de uma PG, de primeiro termo a_0 e razão q, é uma função que associa a cada número natural n o valor $a_n = a_0 \cdot q^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Para $a_0 \neq 0$, $q > 0$ e $q \neq 1$, essa função se assemelha a uma função exponencial com restrição do domínio ao conjunto dos números naturais. O gráfico dessa função será formado pelos pontos $(0, a_0)$, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ..., (n, a_n), ... Veja, no gráfico abaixo, os pontos de coordenadas (0, 16), (1, 8), (2, 4), (3, 2) e (4, 1).



Fonte: [Leonardo 2016, pp. 203-204]

3.4.3 Alguns Matemáticos Citados

O livro de Paiva 2015 cita um tópico sobre Mente Brilhante que fala do astrônomo Johann Daniel Tietz, o qual desenvolveu uma sequência em que cada termo a_n representa a distância, em unidade astronômica (UA) entre o Sol e o n-ésimo planeta.

Figura 62 – Mente brilhantes : Sequência de Titius.

A sequência de Titius

Em 1766, o astrônomo Johann Daniel Tietz, conhecido pelo nome latinizado de Titius (pronuncia-se: Tícius), desenvolveu uma sequência em que cada termo a_n representa a distância, em unidade astronômica (UA), entre o Sol e o n-ésimo planeta, contados a partir do mais próximo do Sol ao mais distante, isto é, Mercúrio é o número 1, Vênus é o número 2, a Terra é o número 3 e assim por diante. A lei de formação dessa sequência é:

$$a_n = \begin{cases} 0{,}4, \text{ se } n = 1 \\ 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^{n-2}, \text{ se } n \geq 2 \end{cases}$$

Johann Daniel Tietz (1729-1796).

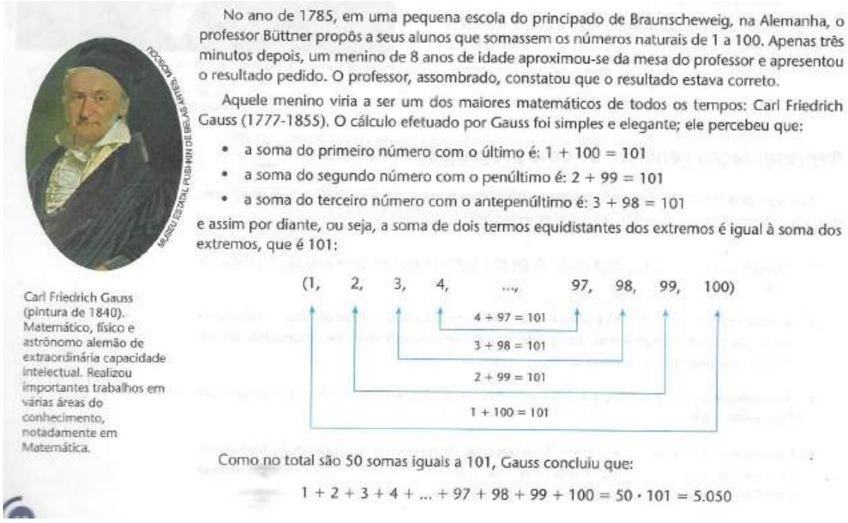
Com exceção de Netuno e Plutão (planeta-anão), a margem de erro da distância entre o Sol e cada um dos demais planetas, calculada por essa lei de formação, é menor que 5%.

Nota: A unidade astronômica (UA) é a distância média entre a Terra e o Sol, que é aproximadamente 150.000.000 km.

Fonte: [Paiva 2015, p. 11]

Todos os livros falam sobre o matemático alemão Carl Friedrich Gauss que teria observado que a soma dos termos equidistantes em uma progressão aritmética é sempre o mesmo resultado.

Figura 63 – Soma dos termos equidistantes de uma progressão aritmética.



No ano de 1785, em uma pequena escola do principado de Braunscheweig, na Alemanha, o professor Büttner propôs a seus alunos que somassem os números naturais de 1 a 100. Apenas três minutos depois, um menino de 8 anos de idade aproximou-se da mesa do professor e apresentou o resultado pedido. O professor, assombrado, constatou que o resultado estava correto.

Aquele menino viria a ser um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Carl Friedrich Gauss (1777-1855). O cálculo efetuado por Gauss foi simples e elegante; ele percebeu que:

- a soma do primeiro número com o último é: $1 + 100 = 101$
- a soma do segundo número com o penúltimo é: $2 + 99 = 101$
- a soma do terceiro número com o antepenúltimo é: $3 + 98 = 101$

e assim por diante, ou seja, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, que é 101:

$(1, 2, 3, 4, ..., 97, 98, 99, 100)$

$4 + 97 = 101$

$3 + 98 = 101$

$2 + 99 = 101$

$1 + 100 = 101$

Carl Friedrich Gauss (pintura de 1840). Matemático, físico e astrônomo alemão de extraordinária capacidade intelectual. Realizou importantes trabalhos em várias áreas do conhecimento, notadamente em Matemática.

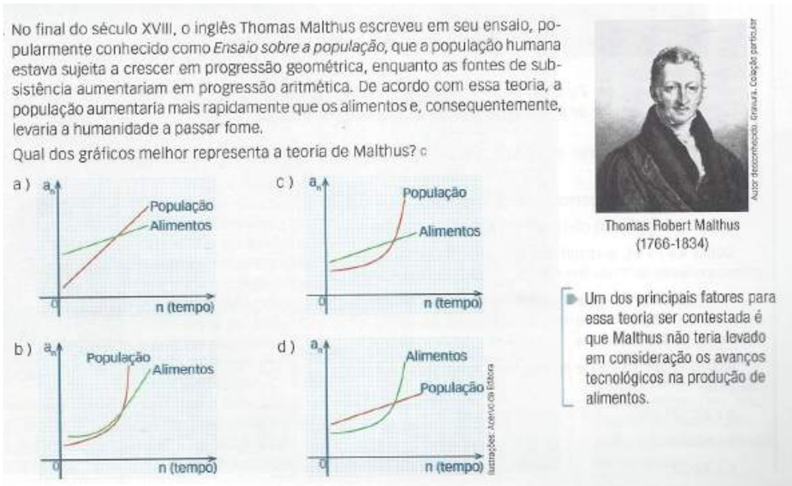
Como no total são 50 somas iguais a 101, Gauss concluiu que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5.050$$

Fonte: [Paiva 2015, p. 18]

O livro de Leonardo 2016 cita o economista inglês Thomas Robert Malthus, ele afirmava que a população mundial tenderia a crescer em progressão geométrica, e a produção de alimentos, em progressão aritmética e nos livros de Souza e Garcia 2016 e Balestri 2016 trazem como exercício fazendo leitura de gráficos.

Figura 64 – Ensaio sobre a população.



No final do século XVIII, o inglês Thomas Malthus escreveu em seu ensaio, popularmente conhecido como *Ensaio sobre a população*, que a população humana estava sujeita a crescer em progressão geométrica, enquanto as fontes de subsistência aumentariam em progressão aritmética. De acordo com essa teoria, a população aumentaria mais rapidamente que os alimentos e, consequentemente, levaria a humanidade a passar fome.

Qual dos gráficos melhor representa a teoria de Malthus? c

Thomas Robert Malthus (1766-1834)

Um dos principais fatores para essa teoria ser contestada é que Malthus não teria levado em consideração os avanços tecnológicos na produção de alimentos.

Fonte: [Balestri 2016, p. 211]

O livro de Chavante e Prestes 2016 como exercício e o livro de Balestri 2016 como apresentação do capítulo, trazem o polonês Benoit Maldelbrot, o primeiro matemático a estudar os fractais e o polonês Waclaw Sierpinki, outro matemático que teve bastante influência no desenvolvimento da Geometria Fractal.

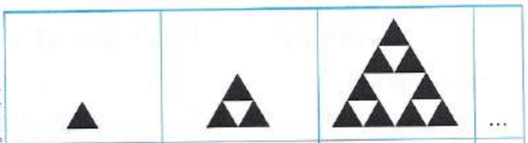
Figura 65 – Geometria fractal.

6. Fractais, do latim *fractus*, significa fração, quebrado, e referem-se a figuras geométricas que têm como uma das principais características a autossimilaridade, ou seja, um padrão repetido tanto na parte quanto no todo. Um dos primeiros matemáticos a estudar os fractais foi o polonês Benoit Maldelbrot (1924-2010), e os estudos nessa área avançaram muito com os recursos computacionais atuais. Na natureza são encontrados exemplos de fractais em estruturas vegetais e animais. Eles também são artificialmente criados, como na imagem computadorizada abaixo, na qual cada parte do fractal é exatamente uma cópia do original.

Vlad_Nikon/Shutterstock.com/ID/BR

Representação colorida de fractal na forma de sucessivos caracóis, compondo um padrão de espiral em duas partes.

Outro matemático com grande influência no desenvolvimento da Geometria Fractal foi o polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969), que tornou conhecido o Triângulo de Sierpinski no início do século XX, uma das formas elementares da geometria fractal. Observe.



1ª	2ª	3ª	...
$1 = 3^0$	$3 = 3^1$	$9 = 3^2$	...

Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Baseando-se nas informações acima, resolva:

a) Quantos triângulos pretos terá a 4ª figura?

b) Qual das sentenças a seguir pode expressar a quantidade de triângulos pretos da figura, que ocupam a n-ésima posição?

- $a_n = 3n$
- $a_n = n^3$
- $a_n = 3^{n-1}$
- $a_n = 3 + n$

Fonte: [Chavante e Prestes 2016, p. 175]

Os livros de Paiva 2015, Balestri 2016 e Leonardo 2016 citam o matemático italiano Leonardo do Pisa, mais conhecido como Fibonacci, apresentando o problema que o consagrou conhecido como sequência de Fibonacci, na parte dos exercícios sobre sequências.

Figura 66 – Sequência de Fibonacci - Manoel Paiva

7 O matemático italiano Leonardo de Pisa (aprox. 1180-1250), mais conhecido como Fibonacci (ao lado em um retrato de 1200), propôs em sua obra *Liber abaci* (Livro dos cálculos), de 1202, o problema a seguir, de grande repercussão, por ter aplicações em várias áreas do conhecimento, como Economia, Biologia, Física etc.:

"Admitindo-se que cada casal de coelhos só procrie pela primeira vez aos dois meses, exatamente, após o seu nascimento e que, a partir de então, gere um casal de filhotes a cada mês, quantos casais haverá ao final de doze meses, partindo-se de um único casal de coelhos recém-nascidos?"

A sequência (a_n), em que a_n é o número de casais de coelhos no mês n, é conhecida como **sequência de Fibonacci**.

Agora, em duplas, resolvam os itens a seguir.

a) Representem os doze primeiros termos da sequência de Fibonacci. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

b) Considerando infinita a sequência de Fibonacci, deem sua lei de formação. $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$, para todo n natural, com $n \geq 3$

(*Curiosidade*: Na sequência (a_n) de Fibonacci, a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tende ao número 1,61803..., quando n aumenta indefinidamente. Esse número é conhecido como número de ouro.)

Fonte: [Paiva 2015, p. 11]

Figura 67 – Sequência de Fibonacci - Balestri

5 A partir do terceiro, cada termo da famosa sequência de Fibonacci é obtido com a adição dos dois termos anteriores. Observe alguns termos dessa sequência:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots, x, y, x+y, \ldots)$$

Os dois primeiros termos da sequência de Fibonacci são iguais a 1.

a) O número 377 pertence à sequência de Fibonacci? E o número 436? sim; não

b) A lei de formação dos termos da sequência de Fibonacci dada por $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$, com $a_1 = a_2 = 1$, é válida para quais valores de n? para todo $n \geq 2$ com $n \in \mathbb{N}^*$

Autor desconhecido. Gravura. Coleção particular. Foto: Bettmann/ Corbis/ Latinstock

Leonardo de Pisa (c. 1175-1250) considerado o matemático mais talentoso da Idade Média.

Fonte: [Balestri 2016, p. 182]

Figura 68 – Sequência de Fibonacci - Leonardo

7. Leonardo de Pisa, também conhecido por Leonardo Fibonacci ou "filho de Bonaccio", foi um dos mais talentosos matemáticos da Idade Média. Entre suas descobertas, pode ser citada a "sequência de Fibonacci":

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$$

a) Analisando os sete primeiros termos dessa sequência, descubra o padrão de formação para essa sequência e escreva um parágrafo para explicar sua descoberta. Você pode resolver esse item com um colega.

b) Utilizando o padrão de formação identificado no item anterior, escreva os termos a_8, a_9 e a_{10} dessa sequência.

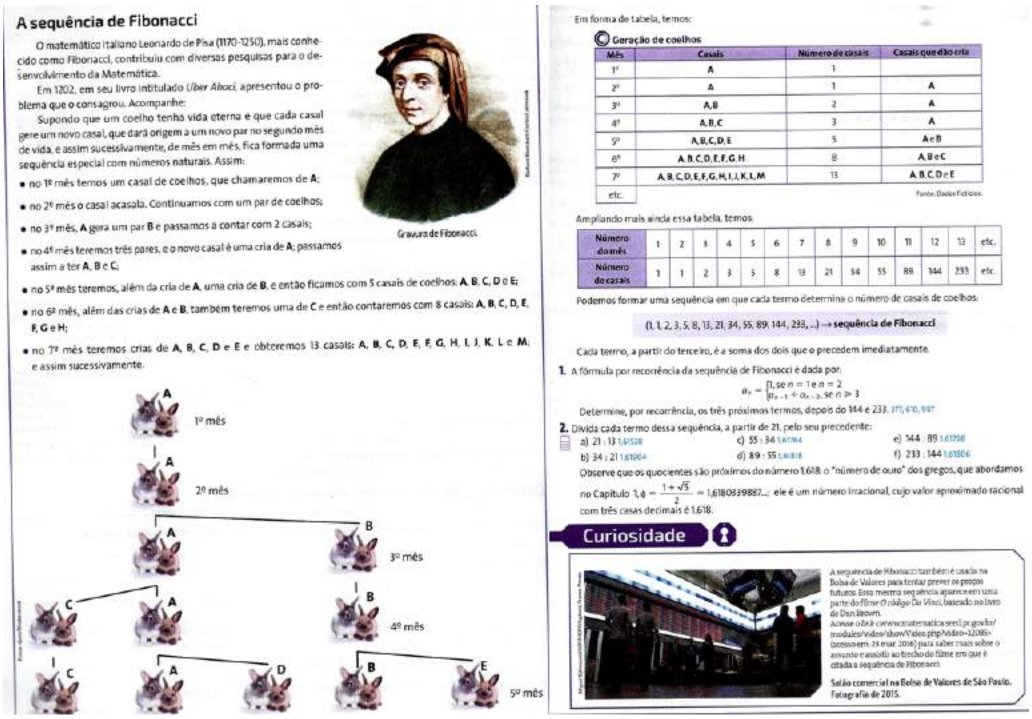
c) Escreva a lei de formação dessa sequência.

d) A "sequência de Fibonacci" pode ser aplicada no desenvolvimento de diversos padrões relacionados a fenômenos naturais. Faça uma pesquisa e identifique algumas dessas aplicações.

Fonte: [Leonardo 2016, p. 192]

No livro de Dante 2016 a sequência de Fibonacci apresenta em uma seção de leitura.

Figura 69 – Sequência de Fibonacci - Dante



A sequência de Fibonacci

O matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), mais conhecido como Fibonacci, contribuiu com diversas pesquisas para o desenvolvimento da Matemática.

Em 1202, em seu livro intitulado *Liber Abaci*, apresentou o problema que o consagrou. Acompanhe:

Supondo que um coelho tenha vida eterna e que cada casal gere um novo casal, que dará origem a um novo par no segundo mês de vida, e assim sucessivamente, de mês em mês, fica formada uma sequência especial com números naturais. Assim:

- no 1º mês temos um casal de coelhos, que chamaremos de **A**;
- no 2º mês o casal acasala. Continuamos com um par de coelhos;
- no 3º mês, **A** gera um par **B** e passamos a contar com 2 casais;
- no 4º mês teremos três pares, e o novo casal é uma cria de **A**; passamos assim a ter **A**, **B** e **C**;
- no 5º mês teremos, além da cria de **A**, uma cria de **B**, e então ficamos com 5 casais de coelhos: **A**, **B**, **C**, **D** e **E**;
- no 6º mês, além das crias de **A** e **B**, também teremos uma de **C** e então contaremos com 8 casais: **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** e **H**;
- no 7º mês teremos crias de **A**, **B**, **C**, **D** e **E** e obteremos 13 casais: **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H**, **I**, **J**, **K**, **L** e **M**; e assim sucessivamente.

Gravura de Fibonacci.

Em forma de tabela, temos:

Geração de coelhos

Mês	Casais	Número de casais	Casais que dão cria
1º	A	1	
2º	A	1	A
3º	A, B	2	A
4º	A, B, C	3	A
5º	A, B, C, D, E	5	A e B
6º	A, B, C, D, E, F, G, H	8	A, B e C
7º	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M	13	A, B, C, D e E
etc.			

Fonte: Dados fictícios.

Ampliando mais ainda essa tabela, temos:

Número do mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	etc.
Número de casais	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	etc.

Podemos formar uma sequência em que cada termo determina o número de casais de coelhos:

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...) → **sequência de Fibonacci**

Cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois que o precedem imediatamente.

1. A fórmula por recorrência da sequência de Fibonacci é dada por:

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 1 \text{ e } n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ se } n \geq 3 \end{cases}$$

Determine, por recorrência, os três próximos termos, depois do 144 e 233. 377, 610, 987

2. Divida cada termo dessa sequência, a partir de 21, pelo seu precedente:

a) 21 : 13 1,61538
b) 34 : 21 1,61904
c) 55 : 34 1,61764
d) 89 : 55 1,61818
e) 144 : 89 1,61798
f) 233 : 144 1,61806

Observe que os quocientes são próximos do número 1,618, o "número de ouro" dos gregos, que abordamos no Capítulo 1, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$; ele é um número irracional, cujo valor aproximado racional com três casas decimais é 1,618.

Curiosidade

A sequência de Fibonacci também é usada na Bolsa de Valores para tentar prever os preços futuros. Essa mesma sequência aparece em uma parte do filme *O código Da Vinci*, baseado no livro de Dan Brown.

Acesse o link (...) (acesso em: 23 mar. 2016) para saber mais sobre o assunto e assistir ao trecho do filme em que é citada a sequência de Fibonacci.

Salão comercial na Bolsa de Valores de São Paulo. Fotografia de 2015.

Fonte: [Dante 2016, pp. 210-211]

Os livros de Iezzi et al. 2016 e Smole e Diniz 2017, também como seção de leitura, falam da sequência de Fibonacci, citando Leonardo de Pisa e o matemático escocês Robert Simson, com a relação entre a sequência de Fibonacci e a razão áurea.

Figura 70 – Sequência de Fibonacci - Iezzi

A sequência de Fibonacci

Uma sequência muito conhecida na Matemática é a sequência de Fibonacci, nome pelo qual ficou conhecido o italiano Leonardo de Pisa (c. 1180-1250). Em 1202, Fibonacci apresentou em seu livro *Liber Abaci* o problema que o consagrou.

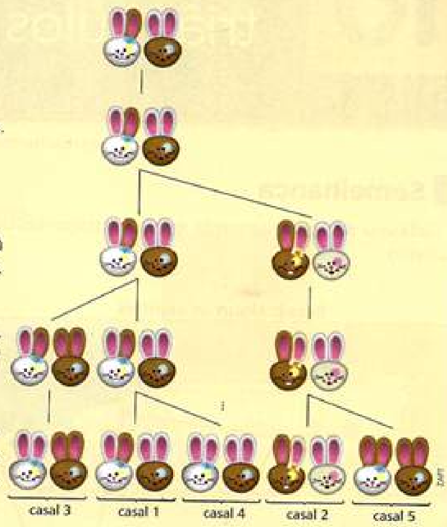
Fibonacci considerou, no período de um ano, um cenário hipotético para a reprodução de coelhos. Veja:

- No início, há apenas um casal que acabou de nascer.
- Os casais atingem a maturidade sexual e se reproduzem ao final de um mês.
- Um mês é o período de gestação dos coelhos.
- Todos os meses, cada casal maduro dá à luz um novo casal.
- Os coelhos nunca morrem.

Retrato de Leonardo Fibonacci. Gravura de Pelle, sem data.

Acompanhe, a seguir, a quantidade de pares de coelhos, ao final de cada mês:

- Início: um único casal.
- Ao final de um mês, o casal acasala. Continuamos com um par.
- Ao final de dois meses, a fêmea dá à luz um novo par. Agora são dois pares.
- Ao final de três meses o "primeiro casal" dá à luz outro par, e o "segundo" casal acasala. São 3 pares.
- Ao final de quatro meses, o "primeiro" casal dá à luz outro par; o "segundo casal" dá à luz pela primeira vez e o terceiro par acasala. São 5 pares.



⋮

e assim por diante...

A sequência de pares de coelhos existentes, ao final de cada mês, evolui segundo os termos da sequência:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots)$$

Note que, a partir do terceiro, cada termo dessa sequência é igual à soma dos dois termos anteriores. Assim, essa sequência pode ser definida pela lei de recorrência:

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3 \end{cases}$$

Mais de quinhentos anos mais tarde, o escocês Robert Simson provou a seguinte propriedade dessa sequência: à medida que consideramos cada vez mais termos, o quociente entre um termo qualquer e o termo antecedente aproxima-se de 1,61803398..., que é o número de ouro, apresentado no capítulo 2.

Vejamos alguns exemplos:

$$\frac{f_{10}}{f_9} = \frac{55}{34} \simeq 1{,}6176; \quad \frac{f_{13}}{f_{12}} = \frac{233}{144} \simeq 1{,}61806; \quad \frac{f_{20}}{f_{19}} = \frac{6765}{4181} \simeq 1{,}6180$$

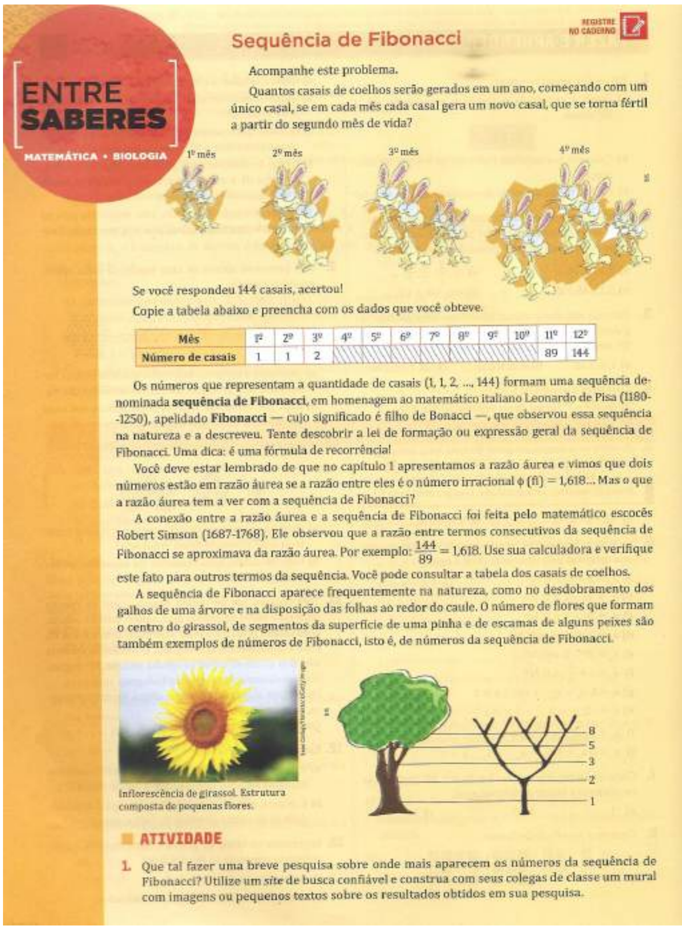
Outros estudos mostram uma ligação entre os números de Fibonacci e a natureza, como a quantidade de arranjos das folhas de algumas plantas em torno do caule, a organização das sementes na coroa de um girassol etc.

Fontes de pesquisa:
BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.; *Eu acho que vi um coelhinho*, Unicamp – M3. Disponível em: <m3.ime.unicamp.br/recursos/1044>. Acesso em: 7 mar. 2016.; *O número de ouro e a sequência de Fibonacci*. Disponível em: <www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-fibonacci-br.html>. Acesso: 7 mar. 2016.

Fonte: [Iezzi et al. 2016, pp. 192-193]

Em que o livro de Smole e Diniz 2017 propõe também uma pesquisa para que os estudantes possam desenvolver as habilidades de busca, coleta e seleção de informações.

Figura 71 – Sequência de Fibonacci - Smole e Diniz



REGISTRE NO CADERNO

ENTRE SABERES

MATEMÁTICA • BIOLOGIA

Sequência de Fibonacci

Acompanhe este problema.

Quantos casais de coelhos serão gerados em um ano, começando com um único casal, se em cada mês cada casal gera um novo casal, que se torna fértil a partir do segundo mês de vida?

Se você respondeu 144 casais, acertou!

Copie a tabela abaixo e preencha com os dados que você obteve.

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Número de casais	1	1	2								89	144

Os números que representam a quantidade de casais (1, 1, 2, ..., 144) formam uma sequência denominada **sequência de Fibonacci**, em homenagem ao matemático italiano Leonardo de Pisa (1180-1250), apelidado **Fibonacci** — cujo significado é filho de Bonacci —, que observou essa sequência na natureza e a descreveu. Tente descobrir a lei de formação ou expressão geral da sequência de Fibonacci. Uma dica: é uma fórmula de recorrência!

Você deve estar lembrado de que no capítulo 1 apresentamos a razão áurea e vimos que dois números estão em razão áurea se a razão entre eles é o número irracional ϕ (fi) = 1,618... Mas o que a razão áurea tem a ver com a sequência de Fibonacci?

A conexão entre a razão áurea e a sequência de Fibonacci foi feita pelo matemático escocês Robert Simson (1687-1768). Ele observou que a razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci se aproximava da razão áurea. Por exemplo: $\frac{144}{89} = 1{,}618$. Use sua calculadora e verifique este fato para outros termos da sequência. Você pode consultar a tabela dos casais de coelhos.

A sequência de Fibonacci aparece frequentemente na natureza, como no desdobramento dos galhos de uma árvore e na disposição das folhas ao redor do caule. O número de flores que formam o centro do girassol, de segmentos da superfície de uma pinha e de escamas de alguns peixes são também exemplos de números de Fibonacci, isto é, de números da sequência de Fibonacci.

Inflorescência de girassol. Estrutura composta de pequenas flores.

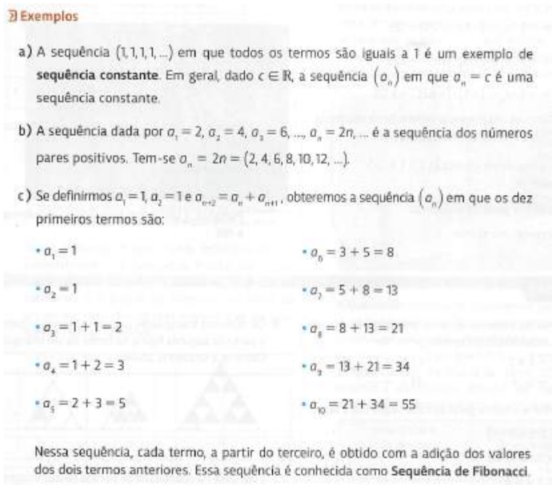
ATIVIDADE

1. Que tal fazer uma breve pesquisa sobre onde mais aparecem os números da sequência de Fibonacci? Utilize um *site* de busca confiável e construa com seus colegas de classe um mural com imagens ou pequenos textos sobre os resultados obtidos em sua pesquisa.

Fonte: [Smole e Diniz 2017, p. 148]

O livro de Chavante e Prestes 2016 traz, na parte dos exemplos, algumas sequências e uma delas cita que é a sequência de Fibonacci.

Figura 72 – Sequência de Fibonacci - Chavante e Prestes



Exemplos

a) A sequência (1, 1, 1, 1, ...) em que todos os termos são iguais a 1 é um exemplo de **sequência constante**. Em geral, dado $c \in \mathbb{R}$, a sequência (a_n) em que $a_n = c$ é uma sequência constante.

b) A sequência dada por $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, ..., $a_n = 2n$, ... é a sequência dos números pares positivos. Tem-se $a_n = 2n = (2, 4, 6, 8, 10, 12, ...)$.

c) Se definirmos $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, obteremos a sequência (a_n) em que os dez primeiros termos são:

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 1$
- $a_3 = 1 + 1 = 2$
- $a_4 = 1 + 2 = 3$
- $a_5 = 2 + 3 = 5$
- $a_6 = 3 + 5 = 8$
- $a_7 = 5 + 8 = 13$
- $a_8 = 8 + 13 = 21$
- $a_9 = 13 + 21 = 34$
- $a_{10} = 21 + 34 = 55$

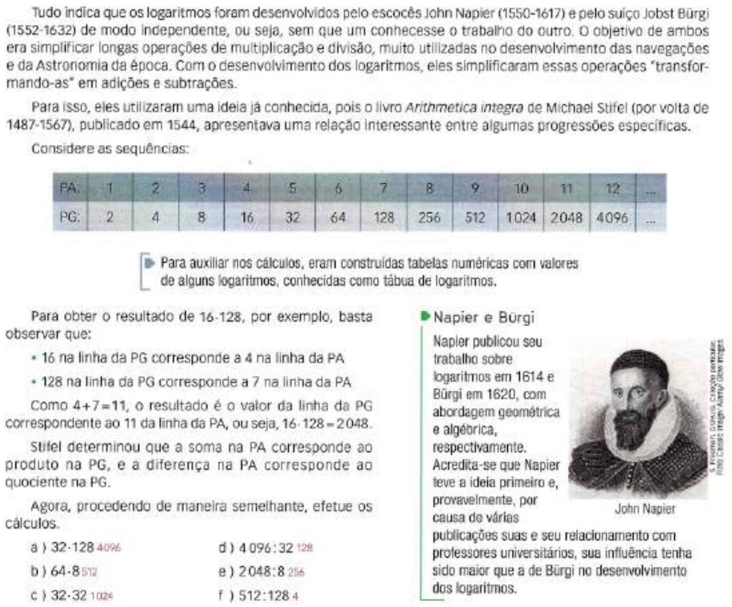
Nessa sequência, cada termo, a partir do terceiro, é obtido com a adição dos valores dos dois termos anteriores. Essa sequência é conhecida como **Sequência de Fibonacci**.

Fonte: [Chavante e Prestes 2016, p. 173]

A sequência de Fibonacci não é citada em nenhum momento no livro de Souza e Garcia 2016.

O livro de Balestri 2016 cita o escocês John Napier e o suíço Jobst Burgi que apresenta um texto sobre progressão aritmética, progressão geométrica e a origem dos logaritmos para simplificar as longas operações de multiplicação e divisão transformando em adição e subtração.

Figura 73 – PA, PG e a origem dos logaritmos.


Tudo indica que os logaritmos foram desenvolvidos pelo escocês John Napier (1550-1617) e pelo suíço Jobst Bürgi (1552-1632) de modo independente, ou seja, sem que um conhecesse o trabalho do outro. O objetivo de ambos era simplificar longas operações de multiplicação e divisão, muito utilizadas no desenvolvimento das navegações e da Astronomia da época. Com o desenvolvimento dos logaritmos, eles simplificaram essas operações "transformando-as" em adições e subtrações.

Para isso, eles utilizaram uma ideia já conhecida, pois o livro *Arithmetica integra* de Michael Stifel (por volta de 1487-1567), publicado em 1544, apresentava uma relação interessante entre algumas progressões específicas.

Considere as sequências:

PA:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
PG:	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	...

Para auxiliar nos cálculos, eram construídas tabelas numéricas com valores de alguns logaritmos, conhecidas como tábua de logaritmos.

Para obter o resultado de 16·128, por exemplo, basta observar que:

- 16 na linha da PG corresponde a 4 na linha da PA
- 128 na linha da PG corresponde a 7 na linha da PA

Como 4+7=11, o resultado é o valor da linha da PG correspondente ao 11 da linha da PA, ou seja, 16·128=2048.

Stifel determinou que a soma na PA corresponde ao produto na PG, e a diferença na PA corresponde ao quociente na PG.

Agora, procedendo de maneira semelhante, efetue os cálculos.

a) 32·128 4096
b) 64·8 512
c) 32·32 1024
d) 4096:32 128
e) 2048:8 256
f) 512:128 4

Napier e Bürgi

Napier publicou seu trabalho sobre logaritmos em 1614 e Bürgi em 1620, com abordagem geométrica e algébrica, respectivamente. Acredita-se que Napier teve a ideia primeiro e, provavelmente, por causa de várias publicações suas e seu relacionamento com professores universitários, sua influência tenha sido maior que a de Bürgi no desenvolvimento dos logaritmos.

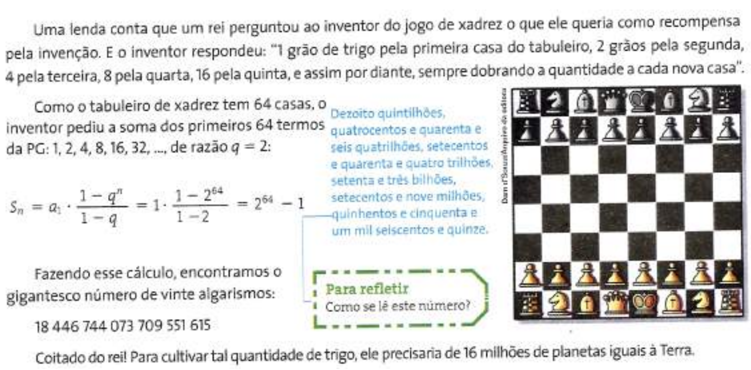
John Napier

Fonte: [Balestri 2016, p. 212]

3.4.4 Particularidades de Alguns Livros

O livro de Dante 2016, com um tópico de curiosidade e em Balestri 2016, como exercício, falam sobre a lenda do xadrez onde encontramos a sequência formada pela quantidade de grãos equivalentes a cada casa.

Figura 74 – Lenda do xadrez.


Uma lenda conta que um rei perguntou ao inventor do jogo de xadrez o que ele queria como recompensa pela invenção. E o inventor respondeu: "1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira, 8 pela quarta, 16 pela quinta, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa".

Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o inventor pediu a soma dos primeiros 64 termos da PG: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., de razão $q = 2$:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$$

Fazendo esse cálculo, encontramos o gigantesco número de vinte algarismos:

18 446 744 073 709 551 615

Dezoito quintilhões, quatrocentos e quarenta e seis quatrilhões, setecentos e quarenta e quatro trilhões, setenta e três bilhões, setecentos e nove milhões, quinhentos e cinquenta e um mil seiscentos e quinze.

Para refletir
Como se lê este número?

Coitado do rei! Para cultivar tal quantidade de trigo, ele precisaria de 16 milhões de planetas iguais à Terra.

Fonte: [Dante 2016, p. 227]

O livro de Iezzi et al. 2016, ao apresentar o cálculo da soma dos termos de uma progressão geométrica, traz em seguida sua interpretação geométrica usando um quadrado de lado unitário.

Figura 75 – Interpretação geométrica da soma dos termos da PG infinita.

Vamos calcular a soma dos termos da P.G. infinita $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$.

Inicialmente, note que $q = \frac{1}{2}$ e $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

Assim: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

Podemos interpretar geometricamente esse fato.

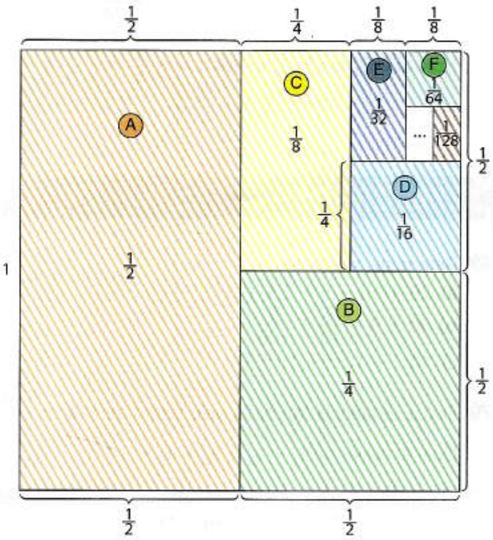
Vamos considerar o seguinte experimento:

Seja um quadrado de lado unitário. Vamos dividi-lo em duas partes iguais, hachurar uma delas e, na outra, repetir o procedimento, isto é, dividir essa parte em duas partes iguais, hachurando uma delas e dividindo a outra em duas partes iguais.

Vamos continuar, em cada etapa, dividindo a parte não hachurada em duas até que não seja mais possível fazê-lo, devido ao tamanho reduzido da parte. A operação pode ser repetida indefinidamente usando, por exemplo, um programa computacional.

A figura ao lado ilustra esse procedimento.

A soma das áreas dos "infinitos" retângulos assim construídos deve ser igual à área do quadrado original, isto é:



$$\underbrace{1 \cdot \frac{1}{2}}_{A} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{B} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}_{C} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}_{D} + \underbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}}_{E} + \underbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}}_{F} + \ldots = 1$$

ou, melhor:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = 1$$

Fonte: [Iezzi et al. 2016, p. 189]

Outro problema interessante no livro de Iezzi et al. 2016 é um desafio clássico de análise combinatória sobre cumprimentos, mas que pode ser resolvido por progressão aritmética.

Figura 76 – Desafio.

Em um congresso havia 600 profissionais da área de saúde. Suponha que, na cerimônia de encerramento, todos os participantes resolveram cumprimentar-se (uma única vez), com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram dados ao todo?

Fonte: [Iezzi et al. 2016, p. 192]

Os livros de Balestri 2016 e Smole e Diniz 2017, no final do capítulo trazem uma proposta para o aluno elaborar uma síntese do que ele aprendeu sobre sequência, funções, progressões aritméticas, progressões geométricas e limite.

Figura 77 – Palavras-chave.

As expressões abaixo denotam as principais ideias apresentadas neste capítulo. Use-as para fazer uma síntese do que você aprendeu sobre sequências.

- Sequências
- Função
- P.A.
- P.G.
- Limite

Aproveite também para esclarecer suas dúvidas, consultando novamente o texto e, se necessário, conversando com seu professor.

Fonte: [Smole e Diniz 2017, p. 169]

O livro de Leonardo 2016, usam-se planilhas eletrônicas para determinar os termos de uma sequência.

Figura 78 – Usando planilhas eletrônicas para determinar os termos de uma sequência.

Algumas vezes, o termo geral de uma sequência é dado por uma lei tal que para calcular um termo é necessário conhecer os termos anteriores. Por exemplo, a sequência dada pela lei de formação:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 10 \\ a_n = n + a_{n-1} - a_{n-2}, \text{ com } n \geq 3 \end{cases}$$

Como você faria para calcular o termo a_{57} dessa sequência?

Para calcular o termo a_{57}, seria necessário conhecer os valores de a_{56} e a_{55} e, para calcular esses valores, por sua vez, seria necessário saber os valores de a_{54} e a_{53} e assim por diante; ou seja, para determinar o termo a_{57}, seria preciso calcular todos os termos do a_3 ao a_{56}.

Perceba que realizar esse procedimento fazendo as contas uma a uma, mesmo que usando uma calculadora, seria extremamente trabalhoso. Uma maneira de facilitar esse processo seria usar uma planilha eletrônica, como mostrado a seguir.

Vamos usar duas colunas da planilha: A e B. A coluna A será usada para os valores de n, e a coluna B, para os valores de a_n.

Inicialmente, para preencher a coluna A, basta digitar 1 na célula A2 e, na célula A3, digitar a fórmula:
= A2 + 1
(Adiciona 1 ao valor da célula A2)
Para preencher as próximas células dessa coluna, basta selecionar a célula A3, levar o cursor até a quina e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção para baixo, até onde for conveniente; no nosso caso, pelo menos até $n = 57$.

B4 | Fórmula | =A4+B3−B2

	A	B
1	n	a_n
2	1	−2
3	2	10
4	3	15
5	4	
6	5	
7	6	
8	7	
9	8	
	⋮	

Digitamos os valores de a_1 e de a_2 nas células B2 e B3, respectivamente.
Então, na célula B4, digitamos a fórmula:
= A4 + B3 − B2
(No caso da sequência, o valor de A4 é o valor correspondente a n, o valor de B3 é o correspondente a a_{n-1} e o valor de B2 é o correspondente a a_{n-2})

B58 | Fórmula | =A58+B57−B56

	A	B
1	n	a_n
2	1	−2
3	2	10
4	3	15
5	4	9
6	5	−1
7	6	−4
	⋮	
52	51	63
53	52	57
54	53	47
55	54	44
56	55	52
57	56	64
58	57	69
59	58	

Para copiar a fórmula para as outras células da coluna, basta selecionar a célula B4, levar o cursor até a quina da seleção e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção para baixo. Assim, preenchemos os valores de a_n até $n = 57$.

Assim, encontramos o termo a_{57} da sequência: $a_{57} = 69$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

Note que, para determinar qualquer outro termo dessa sequência, bastaria continuar arrastando a seleção da célula B4 até a célula conveniente.

Reflita

Determine o 86º termo e o 104º termo dessa sequência.

Fonte: [Leonardo 2016, p. 191]

O livro de Paiva 2015, apresenta um tópico com o nome Conectado, que incentiva o aluno a fazer uma pesquisa na internet sobre “Arte e matemática – o número de ouro”; análise da resolução de uma questão sobre soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica onde o aluno deve apontar o erro e refazer a resolução, corrigindo-a e interpretação geométrica da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética através de retângulos.

Figura 79 – Conectado.

Pesquise na internet a relação do **número de ouro** com a natureza e as artes. Você vai se surpreender!

Não deixe de assistir ao programa "Arte e matemática – O número de ouro", disponível em: <http://tvescola.mec.gov.br/tve/video?idItem=7253>. Acesso em: 14 abr. 2016.

Nesse programa é apresentada a **razão áurea**, a partir da qual se obtém uma equação polinomial do 2º grau que tem como uma das raízes o número de ouro. Qual é essa equação?

Fonte: [Paiva 2015, p. 11]

Figura 80 – Análise da resolução.

Nesta seção, vamos explorar determinados erros cometidos com frequência em alguns tópicos de Matemática. Uma questão resolvida é apresentada, em que um erro é cometido. Vocês devem apontar o erro e corrigir a resolução. Só leiam o comentário, na seção *Respostas*, depois de ter tentado descobrir o erro e corrigi-lo.

Um aluno resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Apontem o erro e refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Na seção *Análise da resolução*, vamos explorar determinados erros cometidos com frequência em alguns tópicos de Matemática. Apresentaremos uma questão resolvida na qual um erro foi cometido. Os alunos deverão corrigir a resolução. Caso tenham dificuldades, sugira que leiam o comentário na seção *Respostas*, no final do livro. Esta seção tem como objetivos: despertar o senso crítico, estimular a investigação e levar a aprender com os erros.

Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \ldots = 6 - 4x$, em que o primeiro membro é a soma das infinitas parcelas da forma $\frac{x^n}{2^{n-1}}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Resolução

$$\underbrace{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \ldots}_{\text{soma } S_\infty \text{ de uma P.G.}} = 6 - 4x$$

O aluno esqueceu de considerar a condição de existência da soma dos infinitos termos de uma P.G.

$0 < q < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < 1$

$\therefore 0 < x < 2$

Logo: $x = 1$

Cálculo da soma S_∞

$a_1 = x$

razão: $\frac{x}{2}$

$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$

$$S_\infty = \frac{x}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{x}{\frac{2 - x}{2}} = \frac{2x}{2 - x}$$

Substituindo S_∞ na equação inicial:

$$\frac{2x}{2 - x} = 6 - 4x$$

$$2x = (2 - x)(6 - 4x)$$

$$2x = 12 - 8x - 6x + 4x^2$$

$$4x^2 - 16x + 12 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x' = \frac{6}{2} = 3 \\ x'' = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Logo, $S = \{1, 3\}$.

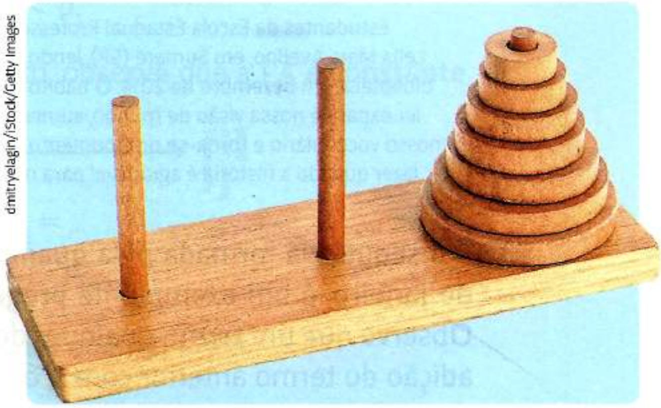
Fonte: [Paiva 2015, p. 37]

O livro de Chavante e Prestes 2016 apresenta em um dos exercícios, a sequência da quantidade de movimentos dos discos em uma torre de Hanói. E ao classificar uma progressão aritmética e uma progressão geométrica faz uma demonstração numa reta numérica real.

Figura 81 – Exercícios com a Torre de Hanói.

8. A Torre de Hanói é um jogo cujo objetivo é transferir todos os discos de uma haste para outra, movendo-os um a um de maneira que, durante esse processo ou ao final dele, os discos com raios maiores não fiquem posicionados sobre discos com raios menores. Observe na imagem a representação de uma Torre de Hanói.

dmitryelagin/iStock/Getty Images



Torre de Hanói com sete discos em posição inicial de jogo.

A quantidade mínima de movimentos para transferir os discos de uma haste para outra varia conforme a quantidade de discos, formando uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, em que 1, 2, 3, …, n representam as quantidades de discos da torre. Observe no quadro a quantidade mínima de movimentos necessários de acordo com a quantidade de discos.

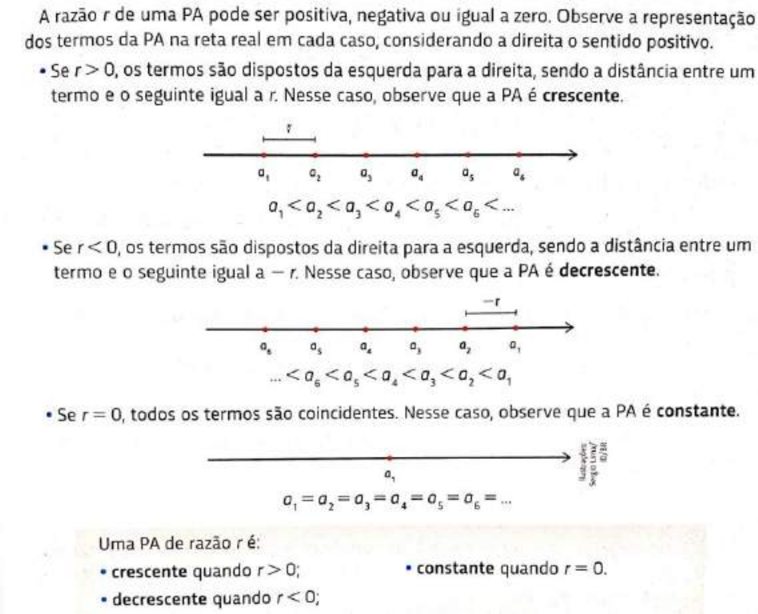
Quantidade de discos	Quantidade mínima de movimentos
1	$2^1 - 1 = 1$
2	$2^2 - 1 = 3$
3	$2^3 - 1 = 7$
⋮	⋮

a) Qual é a quantidade mínima de movimentos necessária para transferir os discos de uma haste para a outra em uma torre com quatro discos? E em uma torre com cinco discos?

b) Qual é a expressão que permite calcular cada um dos termos dessa sequência de movimentos?

Fonte: [Chavante e Prestes 2016, p. 175]

Figura 82 – Representação de uma progressão aritmética na reta real.



A razão r de uma PA pode ser positiva, negativa ou igual a zero. Observe a representação dos termos da PA na reta real em cada caso, considerando a direita o sentido positivo.

- Se $r > 0$, os termos são dispostos da esquerda para a direita, sendo a distância entre um termo e o seguinte igual a r. Nesse caso, observe que a PA é **crescente**.

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < \ldots$

- Se $r < 0$, os termos são dispostos da direita para a esquerda, sendo a distância entre um termo e o seguinte igual a $-r$. Nesse caso, observe que a PA é **decrescente**.

$\ldots < a_6 < a_5 < a_4 < a_3 < a_2 < a_1$

- Se $r = 0$, todos os termos são coincidentes. Nesse caso, observe que a PA é **constante**.

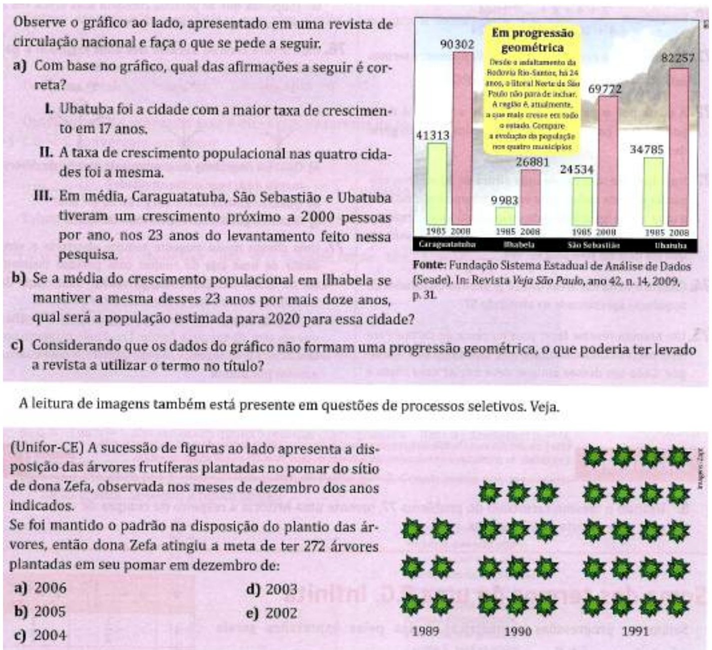
$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = \ldots$

Uma PA de razão r é:
- **crescente** quando $r > 0$;
- **decrescente** quando $r < 0$;
- **constante** quando $r = 0$.

Fonte: [Chavante e Prestes 2016, p. 177]

O livro de Smole e Diniz 2017, apresenta um tópico chamado “Foco na leitura”, no qual analisa duas situações que apresentam gráficos e figuras cujas informações estão presentes nessas imagens e um tópico sobre Cálculo rápido usando apenas potenciação.

Figura 83 – Informações através do gráfico e da imagem.



Observe o gráfico ao lado, apresentado em uma revista de circulação nacional e faça o que se pede a seguir.

a) Com base no gráfico, qual das afirmações a seguir é correta?

I. Ubatuba foi a cidade com a maior taxa de crescimento em 17 anos.

II. A taxa de crescimento populacional nas quatro cidades foi a mesma.

III. Em média, Caraguatatuba, São Sebastião e Ubatuba tiveram um crescimento próximo a 2000 pessoas por ano, nos 23 anos do levantamento feito nessa pesquisa.

b) Se a média do crescimento populacional em Ilhabela se mantiver a mesma desses 23 anos por mais doze anos, qual será a população estimada para 2020 para essa cidade?

c) Considerando que os dados do gráfico não formam uma progressão geométrica, o que poderia ter levado a revista a utilizar o termo no título?

Fonte: Fundação Sistema Estadual de Análise de Dados (Seade). In: Revista *Veja São Paulo*, ano 42, n. 14, 2009, p. 31.

A leitura de imagens também está presente em questões de processos seletivos. Veja.

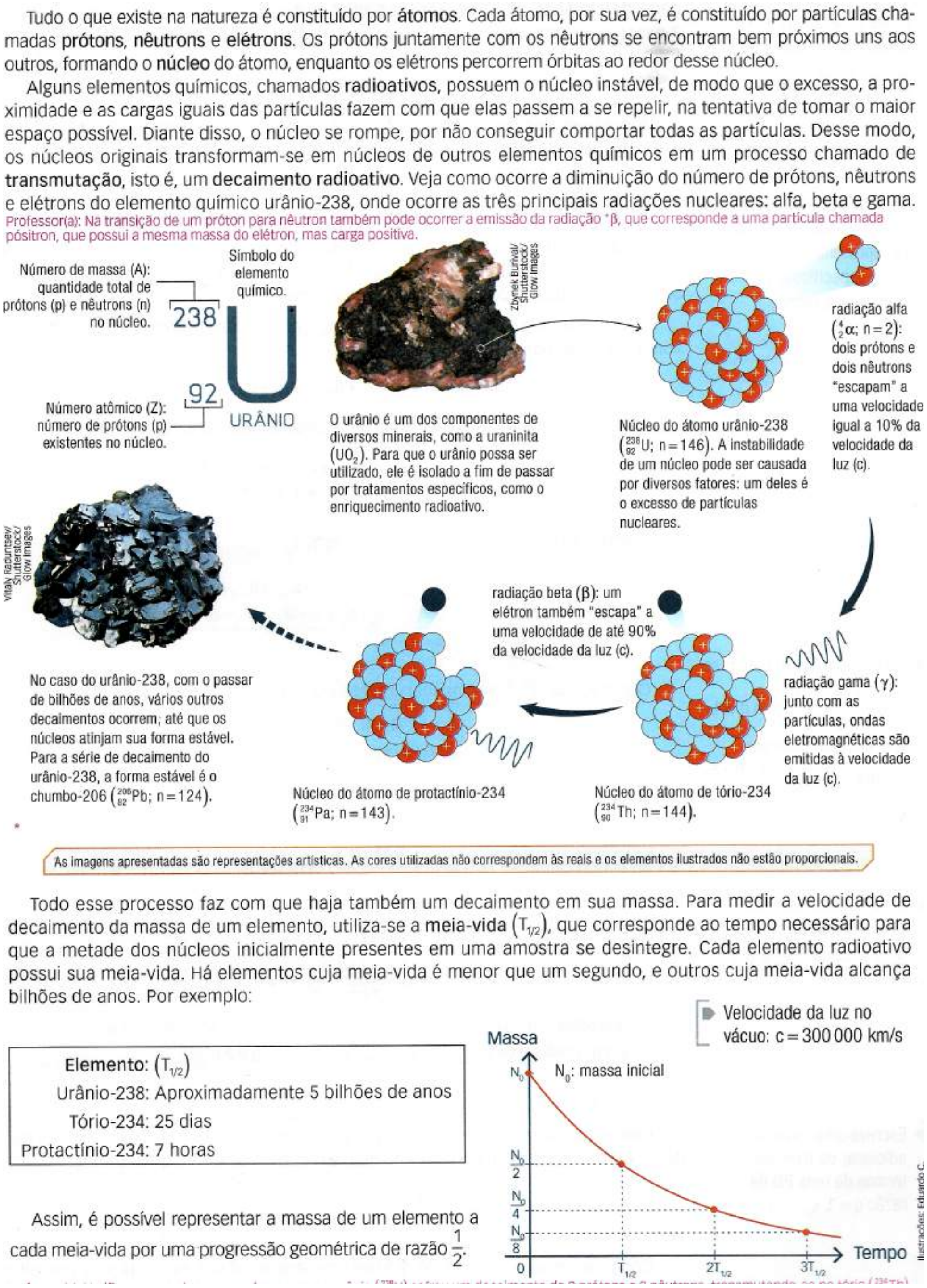
(Unifor-CE) A sucessão de figuras ao lado apresenta a disposição das árvores frutíferas plantadas no pomar do sítio de dona Zefa, observada nos meses de dezembro dos anos indicados.
Se foi mantido o padrão na disposição do plantio das árvores, então dona Zefa atingiu a meta de ter 272 árvores plantadas em seu pomar em dezembro de:

a) 2006
b) 2005
c) 2004
d) 2003
e) 2002

Fonte: [Smole e Diniz 2017, p. 163]

O livro de Balestri 2016 apresenta um texto sobre o funcionamento de um processo de decaimento radioativo, onde para medir a velocidade do decaimento da massa de um elemento, utiliza-se a meia-vida na qual sua representação é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Figura 84 – O decaimento radioativo.



Tudo o que existe na natureza é constituído por **átomos**. Cada átomo, por sua vez, é constituído por partículas chamadas **prótons**, **nêutrons** e **elétrons**. Os prótons juntamente com os nêutrons se encontram bem próximos uns aos outros, formando o **núcleo** do átomo, enquanto os elétrons percorrem órbitas ao redor desse núcleo.

Alguns elementos químicos, chamados **radioativos**, possuem o núcleo instável, de modo que o excesso, a proximidade e as cargas iguais das partículas fazem com que elas passem a se repelir, na tentativa de tomar o maior espaço possível. Diante disso, o núcleo se rompe, por não conseguir comportar todas as partículas. Desse modo, os núcleos originais transformam-se em núcleos de outros elementos químicos em um processo chamado de **transmutação**, isto é, um **decaimento radioativo**. Veja como ocorre a diminuição do número de prótons, nêutrons e elétrons do elemento químico urânio-238, onde ocorre as três principais radiações nucleares: alfa, beta e gama.

Professor(a): Na transição de um próton para nêutron também pode ocorrer a emissão da radiação $^{+}\beta$, que corresponde a uma partícula chamada pósitron, que possui a mesma massa do elétron, mas carga positiva.

Todo esse processo faz com que haja também um decaimento em sua massa. Para medir a velocidade de decaimento da massa de um elemento, utiliza-se a **meia-vida** ($T_{1/2}$), que corresponde ao tempo necessário para que a metade dos núcleos inicialmente presentes em uma amostra se desintegre. Cada elemento radioativo possui sua meia-vida. Há elementos cujas meia-vida é menor que um segundo, e outros cuja meia-vida alcança bilhões de anos. Por exemplo:

Elemento: ($T_{1/2}$)
Urânio-238: Aproximadamente 5 bilhões de anos
Tório-234: 25 dias
Protactínio-234: 7 horas

Assim, é possível representar a massa de um elemento a cada meia-vida por uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Fonte: [Balestri 2016, p. 203]

O livro de Dante 2016, traz uma leitura sobre o papiro de Rhind, onde apresenta a progressão geométrica mais antiga e cuja resolução na época é equivalente à fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica que conhecemos até hoje; no último tópico traz um material para discussão interdisciplinar sobre automedicação e o uso indiscriminado de medicamentos.

Figura 85 – A progressão geométrica mais antiga.

Há sete casas; em cada casa há sete gatos; cada gato mata sete ratos; cada rato comeu sete grãos de cevada; cada grão teria produzido sete "hekats" de cevada. Qual é a soma de todas as coisas enumeradas?

Em primeiro lugar, o enunciado fala em "hekats de cevada". Não sabemos exatamente o que era isso. No Egito antigo, um "hekat" era uma porção de alguma coisa que era referida, ora ao peso, ora ao volume. Estima-se que 1 hekat de cevada seja uma porção de um pouco mais do que 3 kg de farinha de cevada.

Em segundo lugar, o que surpreende é o cálculo que o escriba mostra para calcular a soma de todas as coisas. Em notação moderna Ahmes escreve que a soma de todas as coisas enumeradas é:

$$\frac{7 \cdot 16\,806}{6} = 19\,607$$

Fonte: [Dante 2016, p. 227]

Figura 86 – Quantidade de medicamento acumulado no organismo.

A quantidade de medicamento acumulado no organismo depois de 9 doses de 750 mg pode ser calculada por meio da fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica.

Como a meia-vida do medicamento é de 4 horas, de 4 em 4 horas a quantidade de medicamento fica reduzida à metade, assim temos uma PG de razão $\frac{1}{2}$ e, nesse caso, o número de termos é 9.

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_9 = \frac{750\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right]}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{750(1-0{,}001953125)}{\frac{1}{2}} = 1\,500 \cdot (0{,}998046875) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n \simeq 1\,497{,}1$$

1 497,1 representa a quantidade residual aproximada do medicamento, em miligramas, no organismo após 9 doses de 4 em 4 horas.

Fique atento!
Por mais que pareça inofensivo, **todo medicamento deve ser usado somente mediante prescrição médica**. A medicação não é prejudicial à saúde se o uso for adequado e efetuado segundo receituário médico.

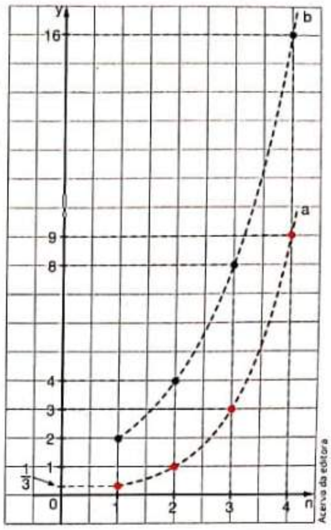
Hora \ Doses	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
0 h	400	100	25	6,25	1,5625
4 h		400	100	25	6,25
8 h			400	100	25
16 h				400	100
					400
Quantidade no organismo (mg)	400	500	525	531,25	532,8125

Fonte: [Dante 2016, p. 234]

No livro de Souza e Garcia 2016, temos aplicações usando as propriedades dos logaritmos nas questões resolvidas com o uso da calculadora científica. Ainda nesse livro, na seção "Ser consciente", disserta sobre o combate à dengue fazendo em seguida uma análise matemática sobre a quantidade de fêmeas infectadas em um reservatório, levando a escrever uma sequência e perguntando se essa mesma é uma progressão aritmética ou uma progressão geométrica.

Figura 87 – Aplicações usando as propriedades dos logaritmos.

R19. Observe a representação gráfica das progressões geométricas $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$.



Uma PG é uma **função do tipo exponencial** $a(n) = a_1 \cdot q^{n-1}$ de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$. Assim, a representação gráfica dos termos da PG é formada pelos pares ordenados (n, a_n).

a) Qual PG tem uma razão maior?

b) A partir de qual termo $a_n > b_n$?

Resolução

a) Sejam q_a e q_b as razões das progressões geométricas $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, respectivamente. Observando o gráfico, temos:

- $q_a = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$
- $q_b = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{4}{2} = 2$

Assim, $q_a > q_b$.

b) Inicialmente, escrevemos a fórmula do termo geral das sequências.

$$a_n = a_1 \cdot q_a^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{3} \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_n = 3^{-1} \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_n = 3^{n-2}$$

$$b_n = b_1 \cdot q_b^{n-1} \Rightarrow b_n = 2 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow b_n = 2^1 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow b_n = 2^n$$

Para resolver a inequação exponencial $a_n > b_n$, podemos aplicar o logaritmo de base 10 nos membros da desigualdade.

$$a_n > b_n \Rightarrow 3^{n-2} > 2^n \Rightarrow \overbrace{\log 3^{n-2} > \log 2^n \Rightarrow (n-2) \cdot \underbrace{\log 3}_{0,477} > n \cdot \underbrace{\log 2}_{0,301}}^{\text{logaritmo da potência}} \Rightarrow$$

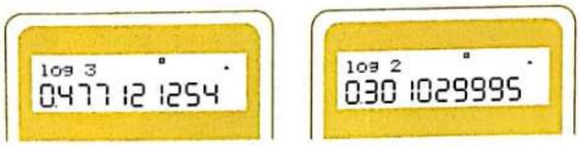
$$\Rightarrow (n-2) \cdot 0,477 > 0,301 \cdot n \Rightarrow 0,477n - 0,954 > 0,301n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,176n > 0,954 \Rightarrow n > 5,42$$

O menor inteiro que satisfaz a condição é $n = 6$. Portanto, $a_n > b_n$ a partir do 6º termo.

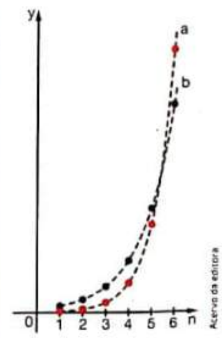
O cálculo da aproximação de $\log 3$ e $\log 2$ pode ser feito com uma calculadora científica:

log → 3 → =   log → 2 → =



Em algumas calculadoras, a tecla log deve ser digitada depois do número.

Representando mais alguns termos das progressões geométricas, podemos observar no gráfico as conclusões dos itens **a** e **b**.



Fonte: [Souza e Garcia 2016, pp. 218-219]

Analisando os livros, podemos buscar um material que se adeque a nossa turma, com diversas aplicabilidades, de maneira que possam apresentar várias visões para os alunos, despertando sua motivação pela matéria. Em que, segundo [Lorenzato 2010] o professor deve está em "constante procura de informações que possam melhorar sua prática pedagógica."

4 Atividades Realizadas

A proposta aqui apresentada foi aplicada no ano letivo de 2019 em duas turmas do 1º ano do Ensino Médio, no turno da tarde na Escola Estadual Professora Amélia Coelho, Vitória de Santo Antão, com média de 32 alunos em cada turma. Uma das salas, é composta por alunos oriundos da Rede Municipal da cidade e alegam que no ano anterior quase não houve aula de matemática por falta de profissional da área na escola onde estudavam. Com isso, é nítido que os alunos trazem bastante dificuldades e chegam a expressar que não são inteligentes e não são capazes de aprender o assunto. [Jófili 2002], em seu artigo relata que "O conhecimento prévio do aluno é importante e altamente relevante para o processo de ensino."

Inicialmente fizemos uma revisão literária e uma análise dos oito livros sugeridos pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018/2020, do Ensino Médio. A partir dessa análise foram selecionadas atividades que apareceram com frequência, observando os diferentes tipos de contextualizações usando geometria, matemática financeira e contextos do dia-a-dia, levando em consideração aquelas que talvez despertassem interesse nos alunos. Após isso, partimos para a aplicação da proposta: primeiramente vimos com os discentes o conteúdo sobre "Sequência", apresentando para eles as primeiras questões contextualizadas, visto que os livros didáticos apresentam diversos tipos de contextualizações que servem como ferramenta e permitem ao professor explorar tal conteúdo de forma que facilite os alunos a compreendê-lo. Em seguida continuamos com exercícios em sala de aula. Posteriormente aplicamos um questionário que apresentamos como teste com intuito de verificar como os estudantes concebem esses diferentes tipos de contextualizações trazidas pelos livros.

Nesse momento houve uma mudança no cronograma escolar, antecipando as avaliações da quarta unidade. Então com o consentimento da direção e dos professores, foram vivenciados nessas turmas, três dias consecutivos (de segunda-feira a quarta-feira), duas aulas de matemática por dia, de 50 minutos cada. Dando continuidade à aplicação da proposta, passamos à explanação do conteúdo sobre "Progressão Aritmética(P.A.)", trabalhando com diferentes tipos de contextualização, a regularidade dos termos equidistantes e demonstrando, em seguida, a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética. Na quinta-feira foi aplicada uma atividade individual e sem consulta, sobre Progressão Aritmética. Como proposta inicial repetiria os procedimentos para o conteúdo de Progressão Geométrica (P.G.) na semana seguinte. Após os resultados dos primeiros testes de progressão aritmética observou-se que os estudantes apresentaram dificuldades em interpretar as questões sozinhos. Por isso optamos em trabalhar um pouco mais as progressões aritméticas deixando progressões geométricas para o próximo ano letivo dos discentes, visto que estarão no 2º ano do Ensino Médio onde revisitaremos o assunto de sequência, progressão aritmética e em seguida vivenciaremos o conteúdo de progressão geométrica com suas diversas contextualizações. A suspensão das aulas em março por causa da pandemia inviabilizou a aplicação das atividades. Dado a importância da conclusão do assunto sobre progressões geométricas, ao retorno às aulas presenciais aplicaremos as atividades propostas.

Com a finalização das aplicações dos questionários partimos para a correção e comparação do desempenho dos alunos. Os resultados serão expostos através da média aritmética.

4.1 Comentários Sobre as Atividades Realizadas

As seguintes atividades, aqui comentadas, foram aplicadas no ano de 2019 em duas turmas da 1^a série do Ensino Médio, do turno da tarde, da Escola Estadual Professora Amélia Coelho, situada em Vitória de Santo Antão - PE, com média de 32 alunos em cada turma.

Para a aplicação da proposta, utilizamos nas aulas de matemática o quadro branco, data show, materiais impressos (atividades). Já em relação aos questionários, os discentes os receberam impressos e responderam utilizando caneta esferográfica preta ou azul.

O objetivo das atividades propostas é observar como os discentes concebem os diferentes tipos de contextualizações, identificando as questões que eles apresentavam mais dificuldade, tinha mais interesse e as que tinham mais facilidade.

A primeira questão sobre sequência tem como objetivo encontrar os próximos termos e perceber que a sequência pode ser crescente, decrescente, constante ou alternante.

Questão 1 - Determine o padrão ou regularidade e complete cada uma das sequências seguindo esse padrão.

a) $3, 8, 13, 18, 23, 28,$ ___,___,___

b) $31, 27, 23, 19, 15,$ ___,___,___

c) $0,6; 0,8; 1; 1,2;$ ___;___;___

d) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6};$ ___;___;___

Os alunos tiveram em média 80% de acertos nesse tipo de atividade.

A segunda questão tem como objetivo determinar os quatro primeiros termos da sequência usando uma lei formação.

Questão 2 - Determine os quatro primeiros termos de cada sequência a seguir:

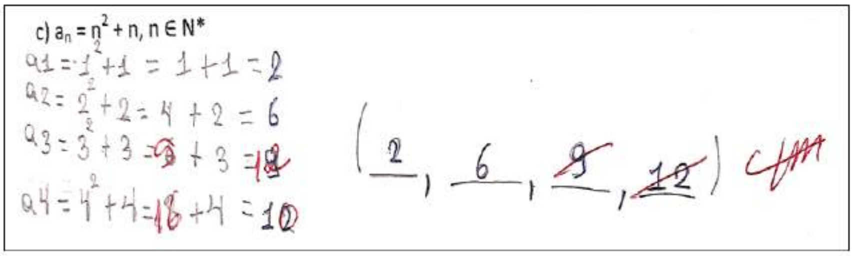
a) $a_n = 2n + 3,\ x \in \mathbb{N}^*$

b) $a_n = 3n - 4,\ x \in \mathbb{N}^*$

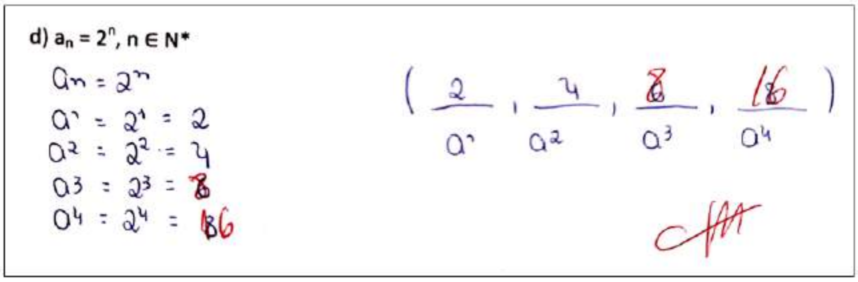
c) $a_n = n^2 + n,\ x \in \mathbb{N}^*$

d) $a_n = 2^n,\ x \in \mathbb{N}^*$

Nos itens a e b em média 58% da turma acertou esse tipo de questão, mas alguns tiveram dificuldades em fazer as operações. Nos itens c e d houve uma média de 25% de acertos, pois os alunos trazem dificuldades em resolver potenciação.



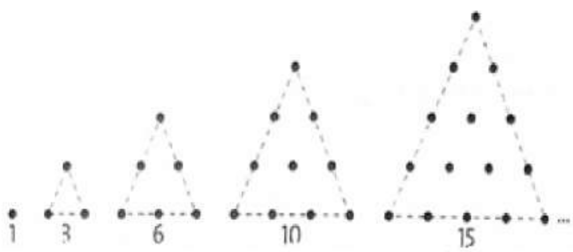
Fonte: Resposta dada por alguns estudantes.



Fonte:Resposta dada por alguns estudantes.

A terceira questão tem como objetivo a aplicação de sequência na geometria.

Questão 3 – Examine a sequência dos números triangulares $(1, 3, 6, 10, 15, \ldots)$.

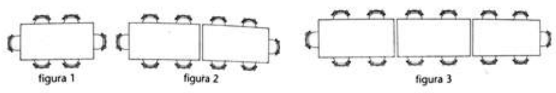


Escreva a sequência dos dez primeiros números triangulares.

Apenas 47% dos alunos conseguiram identificar qual seriam os dez primeiros números triangulares.

A quarta e a quinta questões tinham como objetivo apresentar algumas aplicações de sequência no dia a dia.

Questão 4 - Todas as mesas de um restaurante são retangulares com 6 cadeiras em volta, conforme mostra a figura 1. Se mais de 6 pessoas pretendem sentar-se juntas, então duas ou mais mesas são enfileiradas, conforme mostram as figuras 2 e 3.



a) Enfileirando-se 11 mesas, conforme as disposições mostradas nas figuras, quantas cadeiras serão colocadas à sua volta?

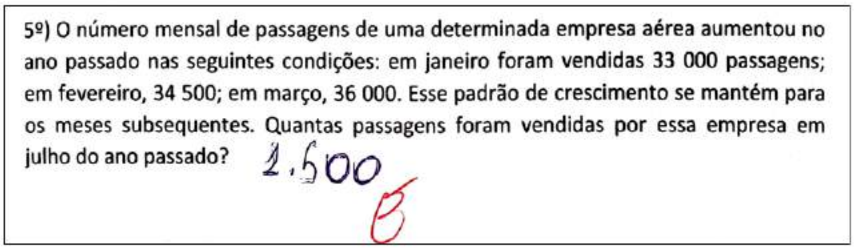
b) Enfileirando-se n mesas, conforme as disposições mostradas ao lado, quantas cadeiras serão colocadas à sua volta?

c) Em uma festa de fim de ano, 36 funcionários de uma empresa farão um almoço de confraternização nesse restaurante. Qual é o número mínimo de mesas que deverão ser enfileiradas, conforme a disposição ao lado, para que as pessoas se sentem juntas?

Na quarta questão, a letra “a” apresentou 39% de acertos, na letra “b” os alunos mostraram bastante dificuldade, pois nenhum deles conseguiu determinar o termo geral que expressava a sequência deixando a questão em branco e na letra “c” apenas 42% de acertos, mostrando assim a dificuldade de interpretar a contextualização dos problemas.

Questão 5 - (Enem) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

Apenas 14% dos alunos conseguiram fazer a quinta questão.


5º) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado? 1.500

Fonte:Resposta dada por alguns estudantes.

Observamos que os alunos tiveram dificuldades para interpretar a questão, pois estava sendo solicitada a quantidade de passagens vendidas pela empresa no mês de julho, continuando com o mesmo padrão de crescimento do mês de janeiro, fevereiro e março. Alguns alegaram por ter colocado números altos, outros chegaram até a identificar a razão envolvida na questão, porém não concluíram o que estava sendo solicitado. No segundo momento colocamos a mesma questão de forma não contextualizada em que observamos uma considerável quantidade de acertos.

Nas atividades sobre Progressão Aritmética (PA), a primeira questão tem como objetivo analisar se os alunos eram capazes de encontrar o próximo termo da sequência (a quarta questão da atividade anterior, que estava presente de forma contextualizada).

Questão 1 - Determine o padrão ou regularidade e complete a sequência seguindo esse padrão.
33.000, 34.500, 36.000, ___,___,___ e ____

Apenas 14% dos alunos tinham conseguido resolvê-la, já na segunda aplicação os alunos tiveram uma média de 69% de acertos. Houve um aumento de 55% de acertos em relação à mesma questão contextualizada.

Na segunda questão o objetivo era determinar um termo qualquer da sequência sem a necessidade de calcular todos os elementos anteriores da sequência.

Questão 2 - Determine o 30° termo da PA $(6, 10, \ldots)$.
Nessa questão houve 69% de acertos, onde alguns deles erraram nas operações básicas e outros na ordem de resolução das expressões numéricas.

A terceira questão tinha como objetivo determinar quantos termos possuía uma determinada PA.

Questão 3 - Quantos termos tem a PA $(17, 26, 35, \ldots, 197)$?
Nesse tipo de questão os alunos tiveram 30% de acertos, onde se confundiram bastante no momento de fazer a resolução da equação do 1° grau encontrada.

A quarta questão tem como objetivo determinar a soma dos termos de uma PA, onde os alunos deveriam encontrar o último termo para depois encontrar a soma.

Questão 4 - Calcule a soma dos 40 primeiros termos da PA $(5, 12, \ldots)$.
Nessa questão 50% dos alunos encontraram o último termo, mas apenas 20% conseguiram determinar essas somas.

Da quinta questão em diante tínhamos como objetivo apresentar algumas aplicações do dia a dia usando as progressões aritméticas.

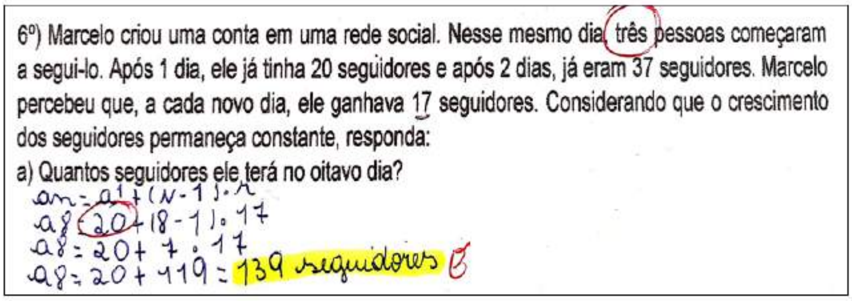
Questão 5 - Em um rally de motociclismo com 13 etapas, Luiz percorreu 325 quilômetros na primeira etapa. Para conseguir ser o vencedor, ele teria que percorrer 28 quilômetros a mais em relação a cada etapa anterior até o final da competição. Luiz foi o vencedor desse rally.
Quantos quilômetros ele percorreu na décima terceira etapa?
Nesse tipo de questão 46% dos alunos acertaram, muitos não chegaram nem a fazer o levantamento dos dados, deixando a questão em branco.

Questão 6 - Marcelo criou uma conta em uma rede social. Nesse mesmo dia, três pessoas começaram a segui-lo. Após 1 dia, ele já tinha 20 seguidores e após 2 dias, já eram 37 seguidores. Marcelo percebeu que, a cada novo dia, ele ganhava 17 seguidores. Considerando que o crescimento dos seguidores permaneça constante, responda:

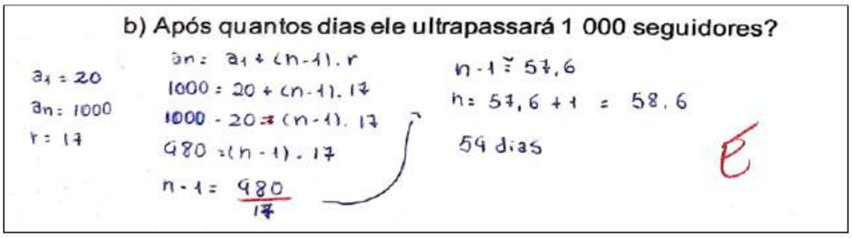
a) Quantos seguidores ele terá no oitavo dia?

b) Após quantos dias ele ultrapassará 1.000 seguidores?

Houve em média 41% de acertos na letra a e 16% na letra b; como o número três foi escrito por extenso, muitos não conseguiram identificá-lo como sendo o primeiro termo ou a expressão "após um dia", não identificaram como sendo o segundo termo.


6º) Marcelo criou uma conta em uma rede social. Nesse mesmo dia, três pessoas começaram a segui-lo. Após 1 dia, ele já tinha 20 seguidores e após 2 dias, já eram 37 seguidores. Marcelo percebeu que, a cada novo dia, ele ganhava 17 seguidores. Considerando que o crescimento dos seguidores permaneça constante, responda:
a) Quantos seguidores ele terá no oitavo dia?
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$
$a_8 = 20 + (8-1) \cdot 17$
$a_8 = 20 + 7 \cdot 17$
$a_8 = 20 + 119 = 139$ seguidores

Fonte:Resposta dada por alguns estudantes.


b) Após quantos dias ele ultrapassará 1 000 seguidores?

$a_1 = 20$
$a_n: 1000$
$r: 17$

$a_n: a_1 + (n-1).r$
$1000 = 20 + (n-1).17$
$1000 - 20 = (n-1).17$
$980 = (n-1).17$
$n-1 = \frac{980}{17}$

$n-1 \cong 57,6$
$n = 57,6 + 1 = 58,6$
59 dias

E

Fonte:Resposta dada por alguns estudantes.

Considerando 20 como sendo o primeiro termo, teríamos um acréscimo de 32% de acertos.

Questão 7 - Um capital de R$ 3.200,00 foi aplicado a juros simples a uma taxa de 7% ao mês.

a) Qual o montante dessa aplicação no final do quarto mês?

b) Ao final de qual mês de aplicação, o montante será igual a R$ 5.664,00?

Nessa questão sobre juros simples, apenas 21% dos alunos acertaram a letra a e 11,5% a letra b, muitos deixaram em branco e outros não fizeram a interpretação correta em relação ao termo procurado.

Questão 8 - Dado um quadrado Q_1 de lado $l = 1$ cm, considere a sequência de quadrados $(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots)$, em que o lado de cada quadrado é 2 cm maior que o lado do quadrado anterior. Determine:

a) o perímetro de Q_{20};

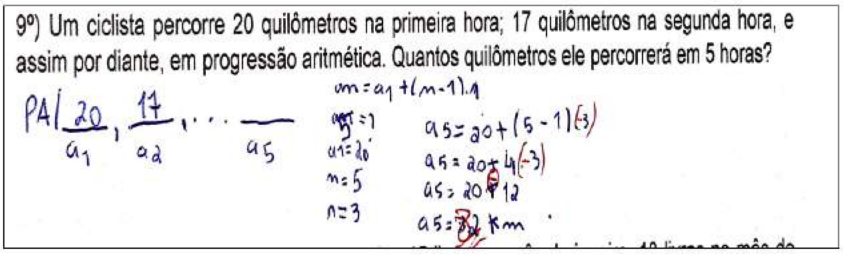
b) a área de Q_{31};

c) a diagonal de Q_{10}.

Em média 36% dos alunos conseguiu determinar a medida do lado do vigésimo quadrado, porém apenas 26% soube calcular o perímetro, na letra a. Na letra b, 29,5% dos alunos conseguiu encontrar a medida do lado do trigésimo primeiro quadrado, porém apenas 23% conseguiu determinar a área e na letra c, 23% dos alunos determinou a medida do lado do décimo quadrado e apenas 18% conseguiu determinar o valor da diagonal do quadrado.

Questão 9 - Um ciclista percorre 20 quilômetros na primeira hora; 17 quilômetros na segunda hora, e assim por diante, em progressão aritmética. Quantos quilômetros ele percorrerá em 5 horas?

Como a razão encontrada é negativa, muitos alunos se confundiram nos cálculos com as expressões numéricas, outros não conseguiram identificar.


9º) Um ciclista percorre 20 quilômetros na primeira hora; 17 quilômetros na segunda hora, e assim por diante, em progressão aritmética. Quantos quilômetros ele percorrerá em 5 horas?

PA/ 20, 17, ... ; a_1, a_2, a_5

$a_n = a_1 + (n-1).r$

$a_1 = 20$; $n = 5$; $r = 3$

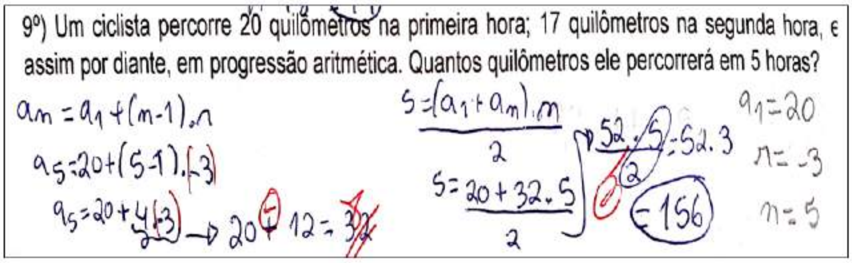
$a_5 = 20 + (5-1)(-3)$

$a_5 = 20 + 4(-3)$

$a_5 = 20 + 12$

$a_5 = 32$ km

Fonte:Resposta dada por alguns estudantes.


9º) Um ciclista percorre 20 quilômetros na primeira hora; 17 quilômetros na segunda hora, e assim por diante, em progressão aritmética. Quantos quilômetros ele percorrerá em 5 horas?

$a_n = a_1 + (n-1).r$

$a_5 = 20 + (5-1).(-3)$

$a_5 = 20 + 4(-3) \to 20 + 12 = 32$

$S = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$

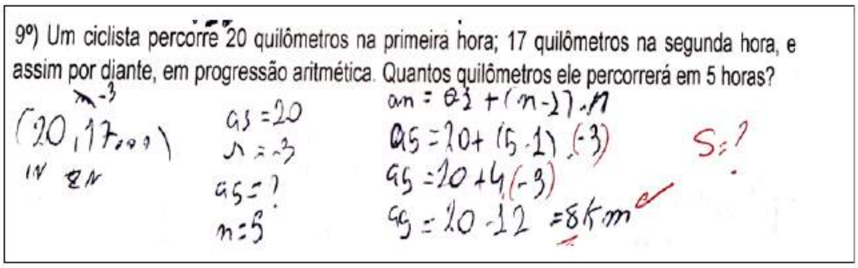
$S = \frac{20 + 32.5}{2}$

$\frac{52.5}{2} = 52.3 = 156$

$a_1 = 20$; $r = -3$; $n = 5$

Fonte:Resposta dada por alguns estudantes.

Em média, 28% dos alunos calcularam o valor do último percurso e apenas 8% dos alunos chegaram determinar o percurso total feito pelo ciclista.


9º) Um ciclista percorre 20 quilômetros na primeira hora; 17 quilômetros na segunda hora, e assim por diante, em progressão aritmética. Quantos quilômetros ele percorrerá em 5 horas?

(20, 17, ...)

$a_1 = 20$; $r = -3$; $a_5 = ?$; $n = 5$

$a_n = a_1 + (n-1).r$

$a_5 = 20 + (5-1).(-3)$

$a_5 = 20 + 4(-3)$

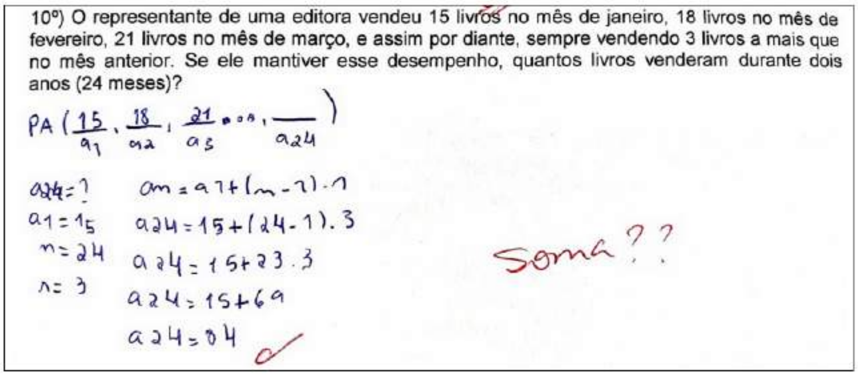
$a_5 = 20 - 12 = 8$ km

$S = ?$

Fonte:Resposta dada por alguns estudantes.

Questão 10 - O representante de uma editora vendeu 15 livros no mês de janeiro, 18 livros no mês de fevereiro, 21 livros no mês de março, e assim por diante, sempre vendendo 3 livros a mais que no mês anterior. Se ele mantiver esse desempenho, quantos livros venderam durante dois anos (24 meses)?

Em média 47,5%, dos alunos calcularam apenas a quantidade de livros que seriam vendidos no 24º mês e apenas 15% dos alunos conseguiram determinar quantos livros venderam durante os dois anos.


10º) O representante de uma editora vendeu 15 livros no mês de janeiro, 18 livros no mês de fevereiro, 21 livros no mês de março, e assim por diante, sempre vendendo 3 livros a mais que no mês anterior. Se ele mantiver esse desempenho, quantos livros venderam durante dois anos (24 meses)?

PA ($\underset{a_1}{15}$, $\underset{a_2}{18}$, $\underset{a_3}{21}$ ..., $\underset{a_{24}}{\_\_\_}$)

$a_{24} = ?$ $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$a_1 = 15$ $a_{24} = 15 + (24-1) \cdot 3$

$n = 24$ $a_{24} = 15 + 23 \cdot 3$

$r = 3$ $a_{24} = 15 + 69$

$a_{24} = 84$

Soma??

Fonte:Resposta dada por alguns estudantes.

No momento da aula, os alunos estavam bastante motivados participando das questões contextualizadas, porém quando ficaram sozinhos para responder as atividades contextualizadas eles mostraram muitas dificuldades em ler e interpretar o que estava sendo solicitado. [Prates e Lindino], em seu artigo relata que "A leitura torna-se imprescindível na formação dos alunos, pois para se formar um leitor, este necessitará realizar um trabalho de construção de significação do texto a partir do conhecimento linguístico e da intencionalidade do autor."

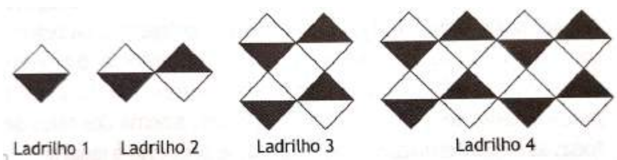
Mesmo não tendo um bom número de acertos nas questões mais próximas do seu convívio, como rede social e ciclista, os alunos se esforçaram em respondê-las; por outro lado, as de geometria não despertaram interesse algum.

4.2 Atividades Propostas sobre PG

A seguir, apresentaremos algumas atividades que seriam trabalhadas em sala de aula sobre Progressão Geométrica com as duas turmas do 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Professora Amélia Coelho, que pela mudança do cronograma escolar, não conseguimos vivenciar. O objetivo é apresentar aos alunos o conteúdo sobre progressão geométrica de forma contextualizada que torne mais significativa a aprendizagem.

1. - (SAEPE) João faz depósitos mensais em sua poupança. Em janeiro de 2011, ele fez um deposito de R$ 5,00 e, a cada mês seguinte, depositou o dobro da quantia correspondente ao mês anterior. Qual foi a quantia depositada por João no mês de setembro de 2011?

2. - (G1 – ifpe) Lopes é aluno do curso de Artes Visuais do campus Olinda e, entre uma aula e outra, gosta de desenhar ladrilhos triangulares conforme a figura.



Seguindo o padrão, quantos triângulos pretos Lopes desenharão no ladrilho de número 10?

3. - (UFSM) Uma fábrica vendia 12 camisetas por mês para certa rede de academias desde janeiro de um determinado ano. No verão, essa venda foi triplicada a cada mês, de setembro a dezembro. O total de camisetas vendidas nesse quadrimestre e a média de vendas, por mês, durante o ano, foram, respectivamente:

   a) 1536 e 128
   b) 1440 e 128
   c) 1440 e 84
   d) 480 e 84
   e) 480 e 48

4. - (Pucmg) Depois de percorre um comprimento de arco de 7 m, uma criança deixa de empurrar o balanço em que está brincando e aguarda até o balanço parar completamente. Se o atrito diminui a velocidade do balanço de modo que o comprimento de arco percorrido seja sempre igual a 80% ao do anterior, a distância total percorrida pela criança, até que o balanço pare completamente, é dada pela expressão

$$D = 7 + 0,80.7 + 0,80.(0,80.7) + \cdots$$

   Considerando-se que o segundo membro dessa igualdade é a soma dos termos de uma progressão geométrica, é correto estimar que o valor de D, em metros, é igual a:

   a) 28
   b) 35
   c) 42
   d) 49

5. - (FPS) Um paciente toma 20 mg de uma droga medicinal em intervalos de 4 horas. Durante cada intervalo de 4 horas, a quantidade da droga no organismo do paciente se reduz a 75% da quantidade presente no início do intervalo. Se o tratamento se prolonga indefinidamente, qual dos valores abaixo melhor se aproxima da quantidade da droga que se acumula no organismo do paciente?

   a) 120 mg
   b) 110 mg
   c) 100 mg
   d) 90 mg
   e) 80 mg

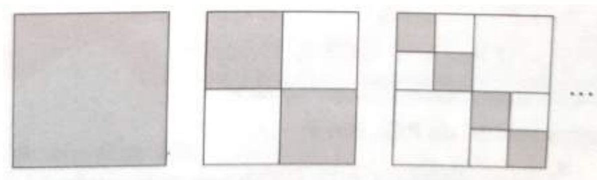
6. – Uma doença contagiosa se propaga dentro de um navio, que está fazendo um cruzeiro pela costa brasileira, da seguinte forma; a cada dia são contaminadas o dobro de pessoas contaminadas no dia anterior. Sabendo que no primeiro dia havia três pessoas contaminadas, determine quantas pessoas serão contaminadas num período de 10 dias.

7. - Ângela e seus amigos gostam de compartilhar notícias WhatsApp. Assim que Ângela soube de uma notícia, à 1h da tarde, ela compartilhou com três amigos. Cada um desses amigos compartilhou a notícia a três outras pessoas durante a segunda hora da tarde. E assim a notícia foi se espalhando até às 6h da tarde.

   a) Além de Ângela, quantas pessoas sabiam da notícia às 3 h da tarde?

   b) E quantas sabiam da notícia às 6 h da tarde?

8. - Na sequência de figuras seguir, todos os quadriláteros são quadrados. O lado do primeiro quadrado sombreado mede 4 cm, e cada quadrado sombreado, a partir da segunda figura, foi obtido unindo-se os pontos médios dos lados opostos de cada quadrado sombreado da figura anterior.

   Qual é a soma das áreas dos quadrados sombreados nas infinitas figuras?

Considerações Finais

Apresentamos, nesse trabalho, um estudo sobre sequências e séries, abordando diversos teoremas que, normalmente, não são estudados no Ensino Médio. No entanto, os mesmos são de suma importância para a formação do professor como domínio aprofundado de conteúdos matemáticos. Uma particularidade desses conteúdos são as sequências elementares, conhecidas como progressões aritméticas e progressões geométricas. Por muito tempo, elas foram trazidas fora da realidade dos alunos, de forma descontextualizada, embora essa prática tem sido combatida pela BNCC.

No presente trabalho foi feita uma síntese desses conteúdos, baseada nos livros didáticos, trazendo para os professores diversas aplicabilidades, de maneira que possam apresentar várias visões para os alunos, despertando sua motivação pela matéria.

A proposta de atividade feita com os alunos, demonstrou que eles despertam o interesse por questões que apresentam maior contextualização, havendo um aumento do engajamento durante a aula. Porém, quando sozinhos, tiveram dificuldades para interpretá-las.

Por isso, considera-se benéfico aplicar essa contextualização em sala de aula, além de apoiar os alunos na busca por uma melhor leitura e interpretação de texto, o que não as beneficiará apenas nos enunciados dos problemas matemáticos, mas também em todas as demais áreas de conhecimento.

Referências

BALESTRI, R. *Matemática: interação e tecnologia*. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016. v. 1.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. [S.l.]: MEC Brasília, 2017.

BRASIL, S. Pcn+ ensino médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. *Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC*, 2002.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. *quadrante - Matemática*. 1. ed. São Paulo: [s.n.], 2016. v. 1.

DANTE, L. R. *Matemática Contexto & Aplicações*. 3. ed. São Paulo: [s.n.], 2016. v. 1.

IEZZI, G. et al. *Matemática ciência e aplicacões*. 9. ed. São Paulo: [s.n.], 2016. v. 1.

JÓFILI, Z. Piaget, vygotsky, freire e a construção do conhecimento na escola. *Educação: teorias e práticas*, v. 2, n. 2, p. 191–208, 2002.

LEONARDO, F. M. *conexões com a Matemática*. 3. ed. São Paulo: [s.n.], 2016. v. 1.

LIMA, E. L. *Análise Real Volume 1: Funçoes de Uma Variável Real*. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. v. 1.

LORENZATO, S. Para aprender matemática. rev. *Campinas, SP: Autores Associados*, 2010.

MATOS, M. P. *Séries e Equações Diferenciais*. PB: Editora Ciências Moderna, 2016.

MORGADO, A. C. Matemática discreta/augusto césar morgado; paulo cezar pinto carvalho. capa de pablo diego regino. *Rio de Janeiro: SBM*, 2015.

PAIVA, M. *Matemática: Paiva*. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015. v. 2.

PRATES, H. A. G.; LINDINO, T. C. A sala de apoio à aprendizagem (saa) como alternativa ao ensino e à aprendizagem de leitura.

SMOLE, k. S.; DINIZ, M. I. *Matemática para compreender o mundo*. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2017. v. 1.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. d. S. R. *contato Matemática*. 1. ed. São Paulo: [s.n.], 2016. v. 1.

Anexos

Anexo 1 - ATIVIDADE SOBRE SEQUÊNCIA

1. Determine o padrão ou regularidade e complete cada uma das sequências seguindo esse padrão.

   a) $3, 8, 13, 18, 23, 28,$ ___,___,___

   b) $31, 27, 23, 19, 15,$ ___,___,___

   c) $0,6; 0,8; 1; 1,2;$ ___;___;___

   d) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6};$ ___;___;___

2. Determine os quatro primeiros termos de cada sequência a seguir:

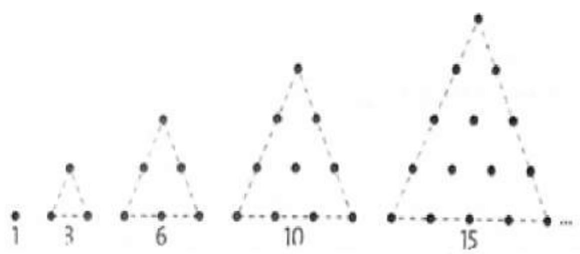
   a) $a_n = 2n + 3,\ x \in \mathbb{N}^*$

   b) $a_n = 3n - 4,\ x \in \mathbb{N}^*$

   c) $a_n = n^2 + n,\ x \in \mathbb{N}^*$

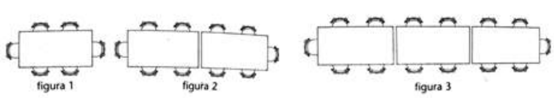
   d) $a_n = 2^n,\ x \in \mathbb{N}^*$

3. Examine a sequência dos números triangulares $(1, 3, 6, 10, 15, \ldots)$.



   Escreva a sequência dos dez primeiros números triangulares.

4. Todas as mesas de um restaurante são retangulares com 6 cadeiras em volta, conforme mostra a figura 1. Se mais de 6 pessoas pretendem sentar-se juntas, então duas ou mais mesas são enfileiradas, conforme mostram as figuras 2 e 3.



5. Enfileirando-se 11 mesas, conforme as disposições mostradas nas figuras, quantas cadeiras serão colocadas à sua volta?

6. Enfileirando-se n mesas, conforme as disposições mostradas ao lado, quantas cadeiras serão colocadas à sua volta?

7. Em uma festa de fim de ano, 36 funcionários de uma empresa farão um almoço de confraternização nesse restaurante. Qual é o número mínimo de mesas que deverão ser enfileiradas, conforme a disposição ao lado, para que as pessoas se sentem juntas?

8. (Enem) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

Anexo 2 - ATIVIDADE SOBRE PROGRESSÃO ARITMÉTICA

1. Determine o padrão ou regularidade e complete a sequência seguindo esse padrão.
   $33.000, 34.500, 36.000,$ ___,___,___ e ____

2. Determine o 30º termo da progressão aritmética $(6, 10, \ldots)$.

3. Quantos termos tem a progressão aritmética $(17, 26, 35, \ldots, 197)$?

4. Calcule a soma dos 40 primeiros termos da progressão aritmética $(5, 12, \ldots)$.

5. Em um rally de motociclismo com 13 etapas, Luiz percorreu 325 quilômetros na primeira etapa. Para conseguir ser o vencedor, ele teria que percorrer 28 quilômetros a mais em relação a cada etapa anterior até o final da competição. Luiz foi o vencedor desse rally. Quantos quilômetros ele percorreu na décima terceira etapa?

6. Marcelo criou uma conta em uma rede social. Nesse mesmo dia, três pessoas começaram a segui-lo. Após 1 dia, ele já tinha 20 seguidores e após 2 dias, já eram 37 seguidores. Marcelo percebeu que, a cada novo dia, ele ganhava 17 seguidores. Considerando que o crescimento dos seguidores permaneça constante, responda:

   a) Quantos seguidores ele terá no oitavo dia?

   b) Após quantos dias ele ultrapassará 1.000 seguidores?

7. Um capital de R$ 3.200,00 foi aplicado a juros simples a uma taxa de 7% ao mês.

   a) Qual o montante dessa aplicação no final do quarto mês?

   b) Ao final de qual mês de aplicação, o montante será igual a R$ 5.664,00?

8. Dado um quadrado Q_1 de lado $l = 1$ cm, considere a sequência de quadrados $(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots)$, em que o lado de cada quadrado é 2 cm maior que o lado do quadrado anterior. Determine:

a) o perímetro de Q_{20};

b) a área de Q_{31};

c) a diagonal de Q_{10}.

9. Um ciclista percorre 20 quilômetros na primeira hora; 17 quilômetros na segunda hora, e assim por diante, em progressão aritmética. Quantos quilômetros ele percorrerá em 5 horas?

10. O representante de uma editora vendeu 15 livros no mês de janeiro, 18 livros no mês de fevereiro, 21 livros no mês de março, e assim por diante, sempre vendendo 3 livros a mais que no mês anterior. Se ele mantiver esse desempenho, quantos livros venderam durante dois anos (24 meses)?

Soluções Esperadas

Sequência Numérica

Questão 1 -

a) $33, 38, 43.$

b) $11, 7, 3.$

c) $1,4; 1,6; 1,8.$

d) $\frac{6}{7}; \frac{7}{8}; \frac{8}{9}$

Questão 2 -

a) $a_n = 2n + 3$
Se $n = 1$, então $a_1 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$;
Se $n = 2$, então $a_2 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$;
Se $n = 3$, então $a_3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$;
Se $n = 4$, então $a_4 = 2 \cdot 4 + 3 = 11$.
Portanto, os quatro primeiros termos da sequência são: $(5, 7, 9, 11)$.

b) $a_n = 3n - 4$
Se $n = 1$, então $a_1 = 3 \cdot 1 - 4 = 3 - 4 = -1$;
Se $n = 2$, então $a_2 = 3 \cdot 2 - 4 = 6 - 4 = 2$;
Se $n = 3$, então $a_3 = 3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5$;
Se $n = 4$, então $a_4 = 3 \cdot 4 - 4 = 12 - 4 = 8$.
Assim, os quatro primeiros termos da sequência são: $(-1, 2, 5, 8)$.

c) $a_n = n^2 + n$
Se $n = 1$, então $a_1 = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$;
Se $n = 2$, então $a_2 = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$;
Se $n = 3$, então $a_3 = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$;
Se $n = 4$, então $a_4 = 4^2 + 4 = 16 + 4 = 20$.
Então, os quatro primeiros termos da sequência são: $(2, 6, 12, 20)$.

d) $a_n = 2^n$
Se $n = 1$, então $a_1 = 2^1 = 2$;
Se $n = 2$, então $a_2 = 2^2 = 4$;
Se $n = 3$, então $a_3 = 2^3 = 8$;
Se $n = 4$, então $a_4 = 2^4 = 16$.
Implica que os quatro primeiros termos da sequência são: $(2, 4, 8, 16)$.

Questão 3 -

Observamos que o primeiro termo para o segundo termo foi acrescentado 2 unidades, do segundo termo para o terceiro termo foi acrescentado 3 unidades, do terceiro termo para o quarto termo foi acrescentado 4 unidades. Continuando a sequência, teremos como os dez primeiros números triangulares $(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55)$

Questão 4 -

a) Enfileirando-se 11 mesas teremos: 4 cadeiras em volta de cada mesa mais duas cadeiras nas extremidades, ou seja, $11 \cdot 4 + 2 = 44 + 2 = 46$.
Portanto temos 46 cadeiras colocadas em volta das 11 mesas.

b) Serão colocados em volta das n mesas $4n + 2$ cadeiras.

c) Como teremos 36 funcionários o número de mesas será:

$$4n + 2 = 36$$
$$4n = 34$$
$$n = 8,5$$

No mínimo 9 mesas deverão ser enfileiradas.

Questão 5 -

Observamos que de um mês para outro sempre está sendo vendida 1.500 passagens a mais, nesse caso temos:

$\underbrace{33.000}_{janeiro}, \underbrace{34.500}_{fevereiro}, \underbrace{36.000}_{maro}, \underbrace{37.500}_{abril}, \underbrace{39.000}_{maio}, \underbrace{40.500}_{junho}, \underbrace{42.000}_{julho}.$

Portanto, em julho do ano passado foram vendidas 42.000 passagens.

Progressão Aritmética

Questão 1 -

Observamos que a sequência é uma progressão aritmética de razão $r = 34.500 - 30.000 = 36.000 - 34.500 = 1.500$.

Então completando a sequência teremos: $37.500, 39.000, 40.500$ e 42.000.

Questão 2 -

Na progressão aritmética dada temos o primeiro termos $a_1 = 6$, a razão $r = 10 - 6 = 4$ e o número de termos $n = 30$. Na expressão (2.4), encontraremos o trigésimo termo.

Ou seja,

$$\begin{aligned} a_{30} &= 6 + (30 - 1) \cdot 4 \\ a_{30} &= 6 + (29) \cdot 4 \\ a_{30} &= 6 + 116 \\ a_{30} &= 122 \end{aligned}$$

Logo, o trigésimo termo da progressão aritmética é 122.

Questão 3 -

Na PA dada temos o primeiro termo $a_1 = 17$, a razão $r = 26 - 17 = 9$, o último termo $a_n = 197$. Vamos determinar o número de termos n usando a expressão (2.4), temos

$$\begin{aligned} 197 &= 17 + (n-1) \cdot 9 \\ 197 - 17 &= (n-1) \cdot 9 \\ 180 &= (n-1) \cdot 9 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (n-1) \cdot 9 &= 180 \\ n - 1 &= 20 \\ n &= 21 \end{aligned}$$

Logo, a progressão aritmética tem 21 termos.

Questão 4 -

Na progressão aritmética dada temos o primeiro termo $a_1 = 5$, a razão $r = 12 - 5 = 7$ e o número de termos $n = 40$. Na expressão (2.4) encontraremos o quadragésimo termo, ou seja,

$$\begin{aligned} a_{40} &= 5 + (40 - 1) \cdot 7 \\ a_{40} &= 5 + (39) \cdot 7 \\ a_{40} &= 5 + 273 \\ a_{40} &= 278 \end{aligned}$$

Como queremos a soma dos 40 primeiros termos, usando na Proposição 2.12, temos

$$\begin{aligned} S_{40} &= \frac{(5 + 278) \cdot 40}{2} \\ S_{40} &= \frac{283 \cdot 40}{2} \\ S_{40} &= \frac{11320}{2} \\ S_{40} &= 5660 \end{aligned}$$

Portanto, a soma dos 40 primeiros termos é 5660.

Questão 5 -

Sabe-se que de uma etapa para outra teria que percorrer 28 quilômetros a mais, trata-se de uma PA, cuja razão $r = 28$. Como o rally tem 13 etapas $n = 13$, na primeira etapa Luiz percorreu 325 km, ou seja, $a_1 = 325$. Usando a expressão (2.4), encontramos

$$\begin{aligned} a_{13} &= 325 + (13-1)\cdot 28 \\ a_{13} &= 325 + (12)\cdot 28 \\ a_{13} &= 325 + 336 \\ a_{13} &= 661 \end{aligned}$$

Logo na décima terceira etapa Luiz percorreu 661 km.

Questão 6 -

Do enunciado, observa-se que a cada dia aumenta 17 seguidores, então o número de seguidores por dia forma a PA $(3, 20, 37, \ldots)$.

a) Temos o primeiro termo $a_1 = 3$, a razão $r = 17$. Para determinar a quantidade de seguidores que terá no oitavo dia temos $n = 8$. Usando a expressão (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} a_8 &= 3 + (8-1)\cdots 17 \\ a_8 &= 3 + 7\cdot 17 \\ a_8 &= 3 + 119 \\ a_8 &= 122 \end{aligned}$$

Portanto, no oitavo dia ele terá 122 seguidores.

b) Nesse caso $a_n > 1000$. Como o primeiro termo $a_1 = 3$ e a razão $r = 17$, usando a expressão (2.4), temos

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + (n-1)\cdot 17 \\ a_n &= 3 + 17n - 17 \\ a_n &= 17n - 14 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} 17n - 14 &> 1.000 \\ 17n &> 1.000 + 14 \\ 17n &> 1.014 \\ n &> 59,64 \end{aligned}$$

Assim, apos 60 dias ultrapassará 1000 seguidores.

Questão 7 -

Como o juros é de 7% ao mês, o montante da aplicação aumenta em:

$$\underbrace{0,07}_{7\%} \cdot 3.200 = 224.$$

Então o montante no decorrer da aplicação forma uma PA de razão $r = 224$ e no final do primeiro mês $a_1 = 3.200 + 224 = 3.424$.

a) O montante ao final de 4 meses temos $n = 4$. Usando a expressão (2.4), segue que

$$\begin{aligned} a_4 &= 3.424 + (4-1) \cdot 224 \\ a_4 &= 3.424 + 3 \cdot 224 \\ a_4 &= 3.424 + 672 \\ a_4 &= 4.096 \end{aligned}$$

Portanto no final do quarto mês o montante é de R$ 4.096,00.

b) Para saber o mês que o montante é igual a R$ 5.664,00, significa encontrar o valor de n para que o último termo $a_n = 5.664$. Usando a expressão (2.4), encontramos

$$\begin{aligned} 5.664 &= 3.424 + (n-1) \cdot 224 \\ 5.664 - 3.424 &= (n-1) \cdot 224 \\ 2.240 &= (n-1) \cdot 224 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (n-1) \cdot 224 &= 2.240 \\ n - 1 &= 10 \\ n &= 11 \end{aligned}$$

Portanto, o montante será R$ 5.664,00 ao final de 11 meses.

Questão 8 -

Como a medida do lado de cada quadrado é 2 cm maior que a medida do lado do quadrado anterior, percebe-se que a medida dos lados desses quadrados forma uma progressão aritmética de razão $r = 2$. Do enunciado , sabendo que a medida do lado do primeiro quadrado é 1 cm, temos a PA $(1, 3, 5, 7, \ldots)$.

a) Para determinar a medida do lado do vigésimo quadrado temos n = 20. Usando a expressão (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} a_{20} &= 1 + (20-1) \cdot 2 \\ a_{20} &= 1 + 19 \cdot 2 \\ a_{20} &= 1 + 38 \\ a_{20} &= 39 \end{aligned}$$

Como o perímetro é o contorno da figura, temos o perímetro do vigésimo quadrado igual a $4 \cdot 39 = 156$ cm.

b) Para determinar a medida do lado do trigésimo primeiro quadrado temos n = 31. Usando a expressão (2.4), encontramos

$$\begin{aligned} a_{31} &= 1 + (31 - 1) \cdot 2 \\ a_{31} &= 1 + 30 \cdot 2 \\ a_{31} &= 1 + 60 \\ a_{31} &= 61 \end{aligned}$$

Como a área de um quadrado é a região interna determinada pela medida do lado do quadrado elevado ao quadrado temos $61^2 = 3.721$ cm^2.

c) Para determinar a medida do lado do décimo quadrado temos n = 10. Usando a expressão (2.4), segue que

$$\begin{aligned} a_{10} &= 1 + (10 - 1) \cdot 2 \\ a_{10} &= 1 + 9 \cdot 2 \\ a_{10} &= 1 + 18 \\ a_{10} &= 19 \end{aligned}$$

Como a medida da diagonal de um quadrado é o segmento de reta que ligam dois vértices dessa figura geométrica que não são os lados desse quadrado e pode ser determinada pela medida do lado multiplicado pela $\sqrt{2}$ temos $19\sqrt{2}$ cm a medida da diagonal.

Questão 9 -

Do enunciado, observamos que o percurso em cada hora realizado pelo ciclista é a progressão aritmética $(20, 17, \ldots)$. Temos o primeiro termo $a_1 = 20$, a razão $r = 17 - 20 = -3$, para determinar o total de quilômetros percorrido em 5 horas, devemos encontrar a soma dos cinco primeiros termos dessa progressão. Portanto, precisamos primeiro determinar o último termo a_n, ou seja, o quinto termo dessa progressão. Usando a expressão (2.4), temos

$$\begin{aligned} a_5 &= 20 + (5 - 1) \cdot (-3) \\ a_5 &= 20 + 4 \cdot (-3) \\ a_5 &= 20 - 12 \\ a_5 &= 8 \end{aligned}$$

Usando Proposição 2.12, encontramos

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{(20 + 8) \cdot 5}{2} \\ S_5 &= \frac{28 \cdot 5}{2} \\ S_5 &= \frac{140}{2} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$S_5 = 70$$

Portanto,nas cinco primeiras horas ele percorrerá 70 km.

Questão 10 -

Como de um mês para outro foram vendidos 3 livros a mais, observamos que a quantidade de livros vendidos por mês forma uma PA $(15, 18, 21, \ldots)$ cujo primeiro termo $a_1 = 15$ e razão $r = 18 - 15 = 3$. A quantidade de livros vendidos durante dois anos é a soma dos 24 primeiros termos dessa PA. Para determinar o vigésimo quarto termo temos $n = 24$ e usando a expressão (2.4), segue que

$$\begin{aligned} a_{24} &= 15 + (24 - 1) \cdot 3 \\ a_{24} &= 15 + 23 \cdot 3 \\ a_{24} &= 15 + 69 \\ a_{24} &= 84 \end{aligned}$$

Usando a Proposição 2.12, temos

$$\begin{aligned} S_{24} &= \frac{(15 + 84) \cdot 24}{2} \\ S_{24} &= \frac{99 \cdot 24}{2} \\ S_{24} &= 99 \cdot 12 \\ S_{24} &= 1.188 \end{aligned}$$

Logo, durante 2 anos serão vendidos 1.188 livros.

Progressão Geométrica

Questão 1 -

Como João deposita a cada mês o dobro da quantidade correspondente ao mês anterior, temos uma PG cuja razão $q = 2$. Em janeiro foi depositado R$ 5,00 temos o primeiro termo $a_1 = 5$ e para determinar a quantia depositada por João no mês de setembro precisamos determinar o nono termo, ou seja, $n = 9$. Usando a expressão (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} a_9 &= 5 \cdot 2^{(9-1)} \\ a_9 &= 5 \cdot 2^8 \\ a_9 &= 5 \cdot 256 \\ a_9 &= 1.280 \end{aligned}$$

Portanto, no mês de setembro João depositou R $ 1.280,00.

Questão 2 -

O número de triângulos pretos desenhados nos ladrilhos forma uma PG $(1, 2, 4, 8, \ldots)$, cujo primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = 2$. Para determinar o número de triângulos pretos no décimo ladrilho temos $n = 10$. Usando a expressão (2.9), encontramos

$$\begin{aligned} a_{10} &= 1 \cdot 2^{(10-1)} \\ a_{10} &= 1 \cdot 2^{9} \\ a_{10} &= 1 \cdot 512 \\ a_{10} &= 512 \end{aligned}$$

Portanto, no décimo ladrilho teremos 512 triângulos pretos.

Questão 3 -

Do enunciado sabemos que de janeiro a agosto foram vendidas 12 camisetas por mês e que a partir de setembro, as vendas foram triplicadas a cada mês, ou seja, no último quadrimestre temos uma PG de razão $q = 3$, com setembro sendo nosso primeiro termo $a_1 = 3 \cdot 12 = 36$ e $n = 4$. Usando o Teorema 2.13, temos

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{36 \cdot (3^4 - 1)}{3 - 1} \\ S_4 &= \frac{36 \cdot (81 - 1)}{2} \\ S_4 &= \frac{36 \cdot (80)}{2} \\ S_4 &= 36 \cdot 40 \\ S_4 &= 1.440 \end{aligned}$$

Então, no último foram vendidas 1.440 camisetas.

Para determinar a média de camisetas vendidas por mês durante o ano temos que somar o número de camisetas vendidas neste ano e dividir pela quantidade de meses. Ou seja:
De janeiro à agosto temos $12 \cdot 8 = 96$, mais o último quadrimestre, 1.440 obtemos durante o ano 1.536 camisetas vendidas. Logo, $1.536 : 12 = 128$ Portanto, foram vendidas em média 128 camisetas por mês.

Questão 4 -

Pelo enunciado devemos determinar a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, pois o atrito diminui a velocidade do balanço sempre em 80% em relação ao anterior. Em que o primeiro termo $a_1 = 7$ e $q = 0, 8$. Usando a expressão (2.15), encontramos

$$S = \frac{7}{1 - 0,8} = \frac{7}{0,2} = \frac{7}{\frac{1}{5}} = 7 \cdot 5 = 35$$

Assim, a distância total percorrida pela criança foi de 35 metros.

Questão 5 -

Do enunciado sabemos que um paciente toma 20 mg de uma droga medicinal em um intervalo de 4 horas e a quantidade da droga no organismo do paciente se reduz a 75% da quantidade presente no início do intervalo, ou seja,

$$20 + 20 \cdot 75\% + (20 \cdot 75\%) \cdot 75\% + ... =$$

$$20 + 20 \cdot 0,75 + 20 \cdot (0,75)^2 + ...$$

Para determinar a quantidade de droga que se acumula no organismo do paciente temos a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita com primeiro termo $a_1 = 20$ e razão $q = 0,75$. Usando a expressão (2.15), temos

$$S = \frac{20}{1 - 0,75} = \frac{20}{0,25} = \frac{20}{\frac{1}{4}} = 20 \cdot 4 = 80$$

Conclui-se que a quantidade de drogas acumulada no organismo do paciente é de 80 mg.

Questão 6 -

Como a cada dia são contaminadas o dobro de pessoas contaminadas no dia anterior, trata-se de uma progressão geométrica de razão q = 2. Como no primeiro dia havia 3 pessoas contaminadas nosso primeiro termo $a_1 = 3$. Para determinar quantas pessoas serão contaminadas num período de 10 dias, temos $n = 10$. Usando a expressão (2.13), obtemos

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} \\ S_{10} &= \frac{3(1.024 - 1)}{1} \\ S_{10} &= 3 \cdot 1.023 \\ S_{10} &= 3.069 \end{aligned}$$

Então em um período de 10 dias terão 3.069 pessoas contaminadas.

Questão 7 -

Como a cada hora que passa cada amigo compartilha a notícia com mais três novos amigos, temos uma progressão geométrica de razão $q = 3$.

a - Além de Ângela, para determinar o número de pessoas que sabem da notícia em três horas temos o número de termos $n = 3$. Sabendo que na primeira hora Ângela compartilhou com três amigos obtemos o primeiro termos $a_1 = 3$. Usando a expressão (2.13), segue que

$$\begin{aligned}
S &= \frac{3(3^3-1)}{3-1}\\
S &= \frac{3(27-1)}{2}\\
S &= \frac{3\cdot 26}{2}\\
S &= 3\cdot 13\\
S &= 39
\end{aligned}$$

Logo, nas três primeiras horas, além de Ângela 39 pessoas sabiam da notícia.

b - Para determinar quantas pessoas sabiam da notícia além de Ângela às 6 horas da tarde, temos $n = 6$. Usando a expressão (2.13), encontramos

$$\begin{aligned}
S &= \frac{3(3^6-1)}{3-1}\\
S &= \frac{3(729-1)}{2}\\
S &= \frac{3\cdot 728}{2}\\
S &= 3\cdot 364\\
S &= 1.092
\end{aligned}$$

Portanto, além de Ângela às 6 horas, 1.092 pessoas sabiam da notícia.

Questão 8 -

Do enunciado sabemos que o primeiro quadrado tem lado 4 cm, como a área de um quadrado é a região interna determinada pela medida do lado do quadrado elevado ao quadrado, temos que a área do 1^{o} quadrado sendo $4^2 = 16$ cm^2. Cada figura seguinte é composta pela metade da área da figura anterior, ou seja, do segundo quadrado em diante observamos que a área dos quadrados sombreados em cada figura é composta pela soma da metade da área do quadrado sombreados na figura anterior. Determinando assim a área sombreada de cada figura uma progressão geométrica $(16, 8, 4, 2, ...)$, cujo primeiro termo $a_1 = 16$ e razão $q = \frac{1}{2}$. Como queremos encontrar a soma das áreas dos quadrados sombreados nas infinitas figura, devemos determinar a soma infinita da progressão geométrica. Usando a expressão (2.15), encontramos

$$S = \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = \frac{16}{\frac{1}{2}} = 32.$$

Assim, a soma das áreas dos quadrados sombreados nas infinitas figuras é 32 cm^2.