UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Acassio Junior da Silva

GRAFOS: ÁRVORE E EMPARELHAMENTO, ABORDAGEM E SUGESTÕES DE APLICAÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO

RECIFE
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Acassio Junior da Silva

GRAFOS: ÁRVORE E EMPARELHAMENTO, ABORDAGEM E SUGESTÕES DE APLICAÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Karla Ferreira de Arruda Duque.

RECIFE
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

586g Silva, Acassio Junior da
Grafos: árvore e emparelhamento, abordagem e sugestões de aplicações para o Ensino Médio / Acassio Junior da Silva. - 2020.
111 f. : il.

Orientadora: Karla Ferreira de Arruda Duque.
Inclui referências e apêndice(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2020.

1. Grafos. 2. Árvores. 3. Emparelhamento. 4. Aplicações. 5. Interação. I. Duque, Karla Ferreira de Arruda, orient. II. Título

CDD 510

ACASSIO JUNIOR DA SILVA

Grafos: árvores e emparelhamento, abordagem e sugestões de aplicações para o ensino médio

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 08 / 09 / 2020

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Karla Ferreira de Arruda Duque (Orientadora)– UFRPE

____

Prof. Dr. Ives Lima de Jesus – IFBA – Salvador

____

Prof. Dr. Ricardo Nunes Machado Junior– PROFMAT/UFRPE

Primeiramente, a Deus, pelo dom da vida, fonte de toda a inspiração e sabedoria.
Também a todos os professores de Matemática da Educação Básica que se desdobram para levar conhecimento aos alunos, apesar de todas as dificuldades encontradas e desvalorização.

Agradecimentos

Agradeço à minha família que direta ou indiretamente me apoiou nesse processo de estudos do mestrado e conclusão do TCC.

Aos meus colegas do PROFMAT que muito contribuíram para o meu crescimento dentro do curso, deram apoio e incentivo, dispuseram-se a ajudar e formaram uma grande família. Em especial, à Andreia Silva, Débora Queiroz, Ilso Santos e Luiz Santana Neto.

Aos professores do PROFMAT, em especial a Adriano Rodrigues, Bárbara Silva, Gabriel Guedes, Maité Kulesza, Marcelo Santos, Ricardo Machado Jr. e Tarciana Silva, pois fazem da sua profissão um exemplo para todos que, de uma forma ou de outra, têm contato com eles nessa troca de saberes.

À professora Karla Arruda, pela sua orientação, sugestões, disponibilidade, suporte e contribuições, sem ela eu não teria chegado até aqui e concluído esse TCC.

À coordenadora do PROFMAT na UFRPE, Anete Cavalcanti, por se fazer presente e ativa durante todo o período do curso e por sua competência.

Aos meus colegas e amigos, pelo incentivo e apoio, em especial, à professora Leidiane Silva, que muito me ajudou nos momentos de dificuldades em conciliar o trabalho com as aulas presenciais do curso, à professora Jennifer Lima, pelas contribuições e disponibilidade, ao gestor Tony Catta e à analista Marta Aguiar, por compreenderem minha ausência na escola em alguns momentos e fazerem o possível para conciliar meu horário de trabalho com o dos estudos.

À capes pelo incentivo financeiro.

"As nuvens mudam sempre de posição,
mas são sempre nuvens no céu.
Assim devemos ser todo dia, mutantes,
porém leais com o que pensamos e sonhamos;
lembre-se, tudo se desmancha no ar,
menos os pensamentos."
(Paulo Beleki)

DECLARAÇÃO

Eu, **Acassio Junior da Silva** declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título **GRAFOS: ÁRVORE E EMPARELHAMENTO, ABORDAGEM E SUGESTÕES DE APLICAÇÔES PARA O ENSINO MÉDIO**, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processo administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como a professora orientadora **Dra. Karla Ferreira de Arruda Duque**, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 08 de setembro de 2020.

Assinatura: ____

ACASSIO JUNIOR DA SILVA

Resumo

Neste trabalho abordaremos os conceitos básicos e fundamentais para o estudo e entendimento sobre a Teoria dos Grafos, uma estrutura combinatória da Matemática. Acreditamos que o estudo deste objeto combinatório contribui para uma ampliação na visão dos alunos nas técnicas de modelagens e soluções de problemas. De início, abordaremos as definições de grafos, árvore e emparelhamento de grafos, com exemplos, teoremas principais e suas respectivas demonstrações. Os assuntos de grafos serão abordados no Ensino Médio por meio de sugestões de atividades metodológicas que trabalham problemas ligados ao nosso cotidiano e na exposição de conteúdos através de sequências didáticas de forma experiencial, dinâmica, coletiva e autônoma. Vamos orientar o professor, através da sequência didática, a mediar as atividades propostas, para uma condução mais eficiente na aprendizagem dos alunos do Ensino Médio para que os mesmos aprendam com protagonismo e interação, percebam a aplicação dos conteúdos abordados, conjecturem e relacionem com a parte teórica, proporcionando assim o estímulo para a busca de estudos que corroborem com o tema abordado.

Palavras-chave: grafos, árvores, emparelhamento, aplicação, interação.

Abstract

In this work we will address the basic and fundamental concepts for the study and understanding of Graph Theory, a combinatorial structure of Mathematics. We believe that the study of this combinatorial object contributes to an expansion of the students' understanding of modeling techniques and problem solving. To begin with, we will present the definitions of graphs, tree and graph pairing, with examples, main theorems and their respective demonstrations. Graph subjects will be approached in High School through suggestions of methodological activities that deal with problems related to our daily lives and in the exposure of contents through didactic sequences in an experiential, dynamic, collective and autonomous way. The teacher will be instructed, through the didactic sequence, to mediate the proposed activities for a more efficient conduct in the learning of high school students so that they can learn with protagonism and interaction, perceive the application of the contents covered, conjecture and relate them to the theoretical part, thus providing the stimulus for the search for studies that corroborate the topic addressed.

Keywords: graphs, trees, pairing, application, interaction.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

A educação está, a cada dia mais, em um processo crescente de atualizações devido as grandes mudanças decorrentes dos avanços tecnológicos e da globalização, por isso se faz necessária uma adaptação na forma de transferir o conhecimento, de modo que o aluno possa perceber a aplicação prática dos conteúdos e não apenas receber a parte teórica através da exposição oral, uso do quadro e leitura de materiais impressos.

Essa necessidade de aplicação prática na exposição de conhecimentos fica clara na fala de Paulo Freire quando ele diz:

> Mudar o mundo é tão difícil quanto possível. O educador não deve só ensinar bem sua disciplina, mas desafiar o educando a pensar criticamente a realidade social e política do meio em que vive, mostrar que o homem é um ser social capaz de intervir no mundo e não de se adaptar a ele. Ele pode transformar o mundo através de projetos, sonhos e utopias. (FREIRE, 2000, p.20)

A Matemática é um dos componentes curriculares mais importantes para a humanidade. De acordo com Edi (2012), "têm-se relatos que foi usada antes mesmo que o processo de leitura e escrita, foi se ampliando e se aprimorando até o que observamos nos dias atuais por conta das necessidades humanas em seu contexto". É por esse motivo que devemos sempre relacionar a teoria com a prática para gerar um conhecimento mais significativo, que contribua e acrescente aos conhecimentos prévios dos aprendizes.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's):

> A constatação da sua importância apoia-se no fato de que a Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno. (BRASIL, 1997, p.15)

Tendo esse olhar e acreditando que a escola seja um ambiente propício para fazer novas descobertas e compartilhar novos experimentos, nada melhor do que abordar um tema não tão diretamente ensinado nas escolas, que é referente à Teoria dos Grafos.

Os grafos são estruturas empregadas para relacionar elementos de um determinado conjunto não vazio, elementos esses que são denominados de vértices, conectados em pares através de ligações denominadas arestas. A Teoria dos Grafos é um ramo da Matemática que estuda essas relações. O resultado do problema das sete pontes de Königsberg (em português, Conisberga) é conhecido como pioneiro na Teoria dos Grafos, que consistia em trilhar um caminho, passando por cada uma das sete pontes, uma única vez, até passar por todas. E

Leonhard Euler, em seu artigo publicado em 1736, representando as ilhas através dos vértices e as pontes por arestas, mostrou que o problema não tinha solução.

A partir dessa introdução ao estudo e aplicação de grafos na resolução do problema, muito se desenvolveu esse ramo da Matemática, surgindo várias definições, aplicações e teoremas, servindo como modelo em diversas áreas de conhecimento e atuação devido a sua usabilidade.

Segundo Lovász, Pelikán e Vesztergombi (2005, p.124), “grafos podem ser usados em qualquer situação onde uma ‘relação’ entre certos objetos é definida”. Na fala deles, fica clara essa relação de aplicabilidade dos grafos.

As árvores são um tipo de grafo onde não existem ciclos, ou seja, só existe um único caminho entre dois vértices quaisquer. O que veremos também em nossas abordagens teóricas e sugestões metodológicas.

No estudo da Teoria dos Grafos encontramos o grafo bipartido, que ocorre quando um conjunto de vértices pode ser dividido em dois conjuntos disjuntos, de maneira que todas as arestas desse grafo tenham extremidades em cada um dos conjuntos. Com esse modelo podemos dividir as arestas em classes conhecidas como classes de emparelhamento, onde esse emparelhamento pode ser perfeito.

Na seção de sugestões de aplicação veremos algumas situações, nas quais os alunos partem da prática, conjecturando, formalizando e desenvolvendo o conhecimento sobre a Teoria dos Grafos até a parte teórica a ser abordada pelo professor. Essa abordagem se encontra detalhada, a partir dos passos ordenados, para que haja um processo contínuo e evolutivo de aprendizagem.

Nas escolas públicas de Educação básica pouco se escuta sobre o estudo dessa teoria, na maioria das vezes os alunos não têm contato algum com o tema abordado, apesar de ter relação com outras áreas da Matemática e de ter aplicação, como também representação em diversas situações do cotidiano do aluno. Então, por que não fazer uma abordagem, incentivar os estudos sobre esse ramo e estimular a inserção em projetos matemáticos?

O objetivo geral deste trabalho é mostrar maneiras de resolver problemas com uso de grafos, tão pouco difundidos ou inexistentes no currículo de Matemática em escolas da Educação Básica, principalmente em escolas públicas. Viabilizando novos conhecimentos e estratégias para resolução de problemas acessíveis aos alunos de escolas públicas do Ensino Médio, envolvendo grafos, árvores e emparelhamento, tema proposto no presente trabalho. Também, apresentar sugestões de aplicações sobre o tema abordado que podem ser desenvolvidas em sala de aula nessa etapa de ensino.

E, em específico, apresentar de forma clara, objetiva e dinâmica o tema proposto, aplicar de forma sucinta o conteúdo abordado através de situações elencadas, propiciar situações relevantes e acessíveis ao público-alvo, apresentar aos professores e as instituições de ensino da Educação Básica o conteúdo que está sendo abordado como alternativa de ampliar os conceitos e conhecimentos na disciplina de Matemática, aplicações e representações em diversas áreas, sugerindo o ensino de grafos mesmo que como tema transversal.

O trabalho se justifica pela necessidade de relacionar a parte teórica de um conteúdo Matemático a sua aplicação prática e de apresentar esse ramo da Matemática que geralmente só é visto em alguns cursos superiores.

Quanto à metodologia, de início foi feita uma pesquisa e análise de bibliografias referente aos conceitos, definições e teoremas, acerca da teoria básica sobre grafos. Foram elaboradas situações para abordagens, relacionadas ao tema da dissertação. Como, por exemplo, percorrer caminhos, árvores genealógicas e ligações de produtos e serviços em residências. Simultaneamente, foram elaboradas sugestões de aulas práticas e conceituais acompanhadas dos problemas acessíveis a alunos do Ensino Médio. Disponibilizamos um questionário para sondar e diagnosticar os conhecimentos prévios a serem abordados e, por fim, finalizamos a parte escrita.

A aplicação desse trabalho pode objetivar uma possível confecção de uma proposta de inserção do estudo e aprendizagem de grafos através de projeto.

1 Grafos

Definição 1.1. Grafo *é um conjunto finito e não vazio de pontos (nós ou vértices) e conexões entre pares desses pontos (arestas), não necessariamente todos, que podem ter formas de arcos ou segmentos de retas.*

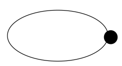
Os grafos são denominados de G, os pontos por V, que vamos trata-los como vértices nessa abordagem, e conexões, que chamamos de E e trataremos como arestas. Denotamos grafos da seguinte maneira:

G = (V(G), E(G))

Os grafos podem ser representados através de listas, matrizes ou desenhos.

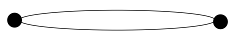
As arestas dos grafos, como já definidas, são as conexões com extremidades em vértices. As arestas assim sendo, são subconjuntos de V de 2 elementos. Podem ser representadas por $\{v_1, v_2\}$, porém é mais usual e simples escrever v_1v_2. Podem aparecer também como um laço, que é quando as duas extremidades da aresta incidem em um mesmo vértice (figura 1) ou em paralelo, quando duas arestas distintas incidem suas extremidades no mesmo par de vértices (figura 2).

Figura 1 – Laço



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 2 – Arestas em paralelo



Fonte: Produzida pelo autor

Se dois vértices estão conectados por uma aresta, dizemos que eles são adjacentes (figura 3).

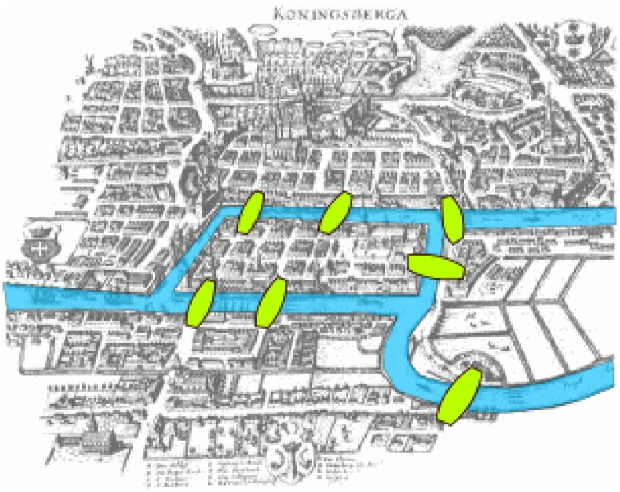
Figura 3 – Vértices adjacentes

Fonte: Produzida pelo autor

1.1 A origem dos grafos

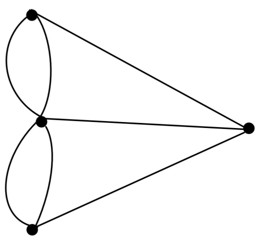
O estudo da Teoria dos Grafos surgiu a quase 300 anos atrás, mais precisamente em 1736, através de um problema com pontes e ilhas, tão conhecido como Problema das sete pontes de Konigsberg. Consistia em quatro regiões separadas pelo rio Pregal e sete pontes que conectavam essas regiões, na cidade de Konigsberg (de onde vem o título/denominação do problema), da Alemanha, proporcionando a passagem de uma região para outra, ilustradas nas figuras 4 e 5. No problema das Pontes de Konigsberg havia o seguinte questionamento: É possível fazer um percurso que passe uma única vez por todas as pontes, visitando todas as regiões?

Figura 4 – Konigsberg



Fonte: en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg, acessado em 7/7/2020 às 22h54min

Figura 5 – Grafo das pontes de Konigsberg



Fonte: Produzida pelo autor

Para mostrar a impossibilidade de resolver esse problema, Euler criou um novo ramo da Matemática, a Teoria dos Grafos. A partir desse fato histórico, o estudo sobre grafos foi se intensificando, foram observadas relações do estudo dessa teoria com diversas áreas e vista sua aplicabilidade.

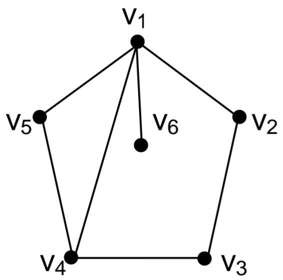
1.2 Grau de vértice em grafos

Definição 1.2.1. *O número de arestas que incidem no vértice v é chamado de* grau de v *e é denotado por d(v).*

Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 1.2.1.

Figura 6 – Graus dos vértices



Fonte: Produzida pelo autor

Notem que a figura 6 representa um grafo com 7 arestas.

A tabela 1 relaciona os vértices a seus respectivos graus:

Tabela 1 – Graus dos vértices

Vértice v	Grau d(v)
v_1	4
v_2	2
v_3	2
v_4	3
v_5	2
v_6	1
Soma	14

Fonte: Próprio autor

O exemplo 1.2.1 nos ajuda a compreender melhor o teorema a seguir:

Teorema 1.2.1. *A soma dos graus do conjunto total de vértices de um grafo corresponde ao dobro do número de arestas desse grafo, isto é,*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E|$$

Onde |E| é o número de arestas do grafo.

Prova. Cada aresta incide em dois vértices e quando somados os graus de cada vértice, contamos cada aresta duas vezes. □

Teorema 1.2.2. *Em todo grafo, o número de vértices com grau ímpar é par.*

Prova. Seja G um grafo com n vértices. Denominamos cada vértice com grau par por v_1, v_2,..., v_i, e os ímpares por v_{i+1}, v_{i+2},..., v_n.

Pelo teorema 1.2.1, temos

$$d(v_1) + d(v_2) + ... + d(v_i) + d(v_{i+1}) + d(v_{i+2}) + ... + d(v_n) = 2 \,.\, |E|$$

Observe que $d(v_1) + d(v_2) + ... + d(v_i)$ é par, pois v_1, v_2, ..., v_i estão definidos como vértices de graus pares e a soma de pares é par. Logo, temos

$$d(v_1) + d(v_2) + ... + d(v_i) = 2 \,.\, |E| - [d(v_{i+1}) + d(v_{i+2}) + ... + d(v_n)]$$

Como $2 \,.\, |E|$ é par e $2 \,.\, |E| - [d(v_{i+1}) + d(v_{i+2}) + ... + d(v_n)]$ também é, preservando a igualdade, temos que $d(v_{i+1}) + d(v_{i+2}) + ... + d(v_n)$ também é par. E como a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é ímpar, logo concluímos que a quantidade de vértices de grau ímpar de um grafo é par. □

Prova alternativa. Uma alternativa de prova desse teorema seria, a partir da construção de um grafo, fazer seu mapeamento.

De início temos todos os vértices com grau 0, nesse caso o número de vértices com grau ímpar é 0, que é par.

Em seguida fazemos uma ligação entre dois vértices desses e os dois ficarão com grau ímpar, grau 1, que permanece com uma quantidade par de vértices de grau ímpar. Com isso, ao fazermos uma nova conexão entre vértices, teremos essas situações:

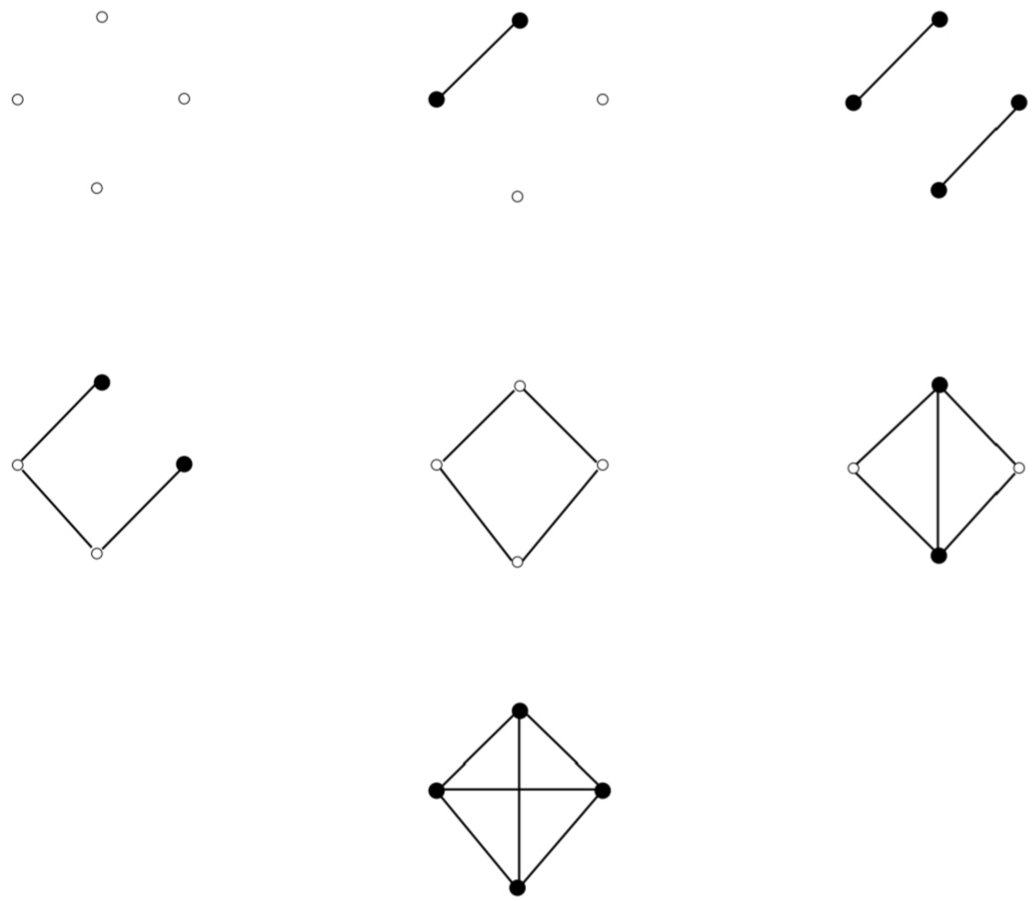
- Se ambos os vértices das extremidades das conexões tinham grau ímpar, ficarão ambos com grau par.
- Se tinham grau par, ficarão com grau ímpar.
- E se tinham graus distintos, ambos trocarão de paridade de graus.

Esse processo ocorre após a inserção de cada aresta e o número de vértices com grau ímpar de um vértice permanecerá par. □

Vejamos a ilustração da prova alternativa na figura 7.

Obs.: Nesses passos da figura 7 optamos por representar os vértices de grau par sem o preenchimento e os de grau ímpar, preenchimentos.

Figura 7 – Passos das conexões entre vértices

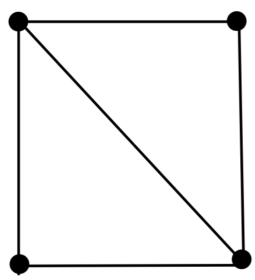


Fonte: Produzida pelo autor

1.3 Grafos simples e multigrafos

Definição 1.3.1. Grafos simples *são grafos que não possuem arestas em paralelo, nem laços, ou seja, cada par de vértices é conectado por arestas únicas e nenhum vértice se conecta a si mesmo por uma aresta* (figura 8).

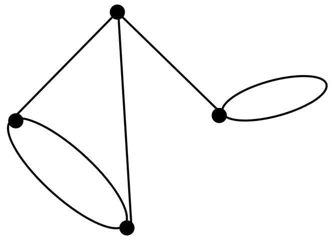
Figura 8 – Grafo simples



Fonte: Produzida pelo autor

Definição 1.3.2. Multigrafos *são todos os grafos que contêm, em sua estrutura, laço, arestas em paralelo ou ambos* (figura 9).

Figura 9 – Multigrafo



Fonte: Produzida pelo autor

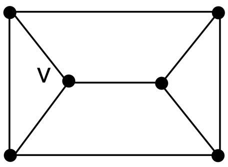
Notem que na figura 9 temos a presença de um laço e de um par arestas em paralelo em sua estrutura, o que configura um multigrafo.

1.4 Subgrafos

Definição 1.4.1. *Um grafo H é dito* subgrafo *de um grafo G quando removemos de G, arestas e/ou vértices, obtendo um novo grafo H, em que todo vértice v de H está contido em G, analogamente, toda aresta de H está contida em G.*

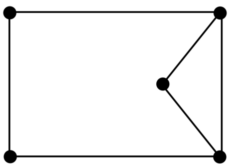
Vale ressaltar que ao removermos um vértice, consequentemente, removemos as arestas incidentes a ele. Essa evidência é notável em Ribeiro (2018). Vejamos o exemplo de um grafo G (figura 10) e a partir dele um subgrafo H (figura 11).

Figura 10 – Grafo G



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 11 – Grafo H: subgrafo de G



Fonte: Produzida pelo autor

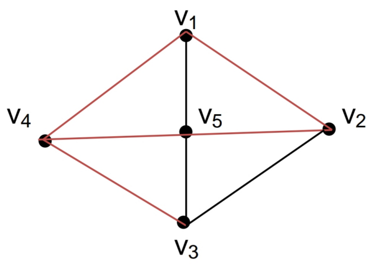
Notem que após a remoção do vértice *v* do grafo G conexo, foram removidas, consequentemente, as três arestas que incidiam nele, originando o grafo H, subgrafo de G, que também é conexo.

1.5 Passeios, caminhos e conectividades

Definição 1.5.1. Passeio *é uma sequência de vértices de um grafo G dado, de modo que quaisquer dois desses vértices consecutivos nesta sequência estão sempre conectados por uma aresta, onde pode repetir os vértices e as arestas e não precisa, necessariamente, percorrer todo o grafo.*

Vejamos um exemplo na figura 12.

Figura 12 – Passeio em G



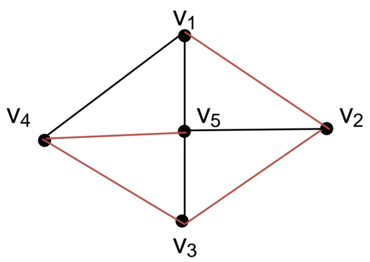
Fonte: Produzida pelo autor

Obs.: O passeio pelas arestas em vermelho no grafo G é $v_1v_4v_5v_2v_1v_4v_3$.

Definição 1.5.2. Caminho *é todo passeio em que não há repetição de vértice e, consequentemente, de aresta, exceto o vértice inicial que pode ser também o final.*

Vejamos um exemplo na figura 13.

Figura 13 – Caminho em G

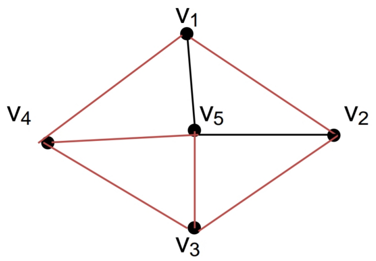


Fonte: Produzida pelo autor

Obs.: As arestas em vermelho representam o caminho $v_1v_2v_3v_4v_5$.

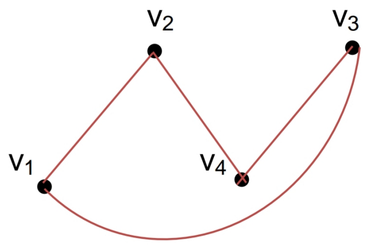
Os vértices iniciais e finais de um passeio e de um caminho são denominados, respectivamente, de *extremidades do passeio* e *extremidades do caminho*. Se essas extremidades coincidirem, denominamos, respectivamente, de *passeio fechado* (figura 14) e *caminho fechado* ou *circuito* (figura 15).

Figura 14 – Passeio fechado



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 15 – Circuito

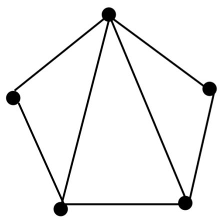


Fonte: Produzida pelo autor

Obs.: Na figura 14 temos o passeio fechado $v_1v_2v_3v_4v_5v_3v_4v_1$. E na figura 15 temos o circuito $v_1v_2v_4v_3v_1$.

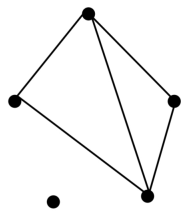
Definição 1.5.3. Grafo conexo *é um grafo que possui, ao menos, um caminho que conecte quaisquer dois vértices dados, o qual consiste em um subgrafo dele. Caso contrário, esse grafo é não conexo* (figuras 16 e 17, respectivamente).

Figura 16 – Grafo conexo



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 17 – Grafo não conexo



Fonte: Produzida pelo autor

Definição 1.5.4. Passeio Euleriano *é o passeio que contém exatamente uma única vez cada aresta do grafo. Se um Passeio Euleriano começa e termina em um mesmo vértice, chamamos ele de* Passeio Euleriano Fechado.

Teorema 1.5.1. ***(a)*** *Se um grafo conexo tem mais que dois vértices com grau ímpar, então ele não tem Passeio Euleriano.*

(b) *Se um grafo conexo tem exatamente dois vértices com grau ímpar, então ele tem um Passeio Euleriano. Todo Passeio Euleriano tem que começar em um desses e terminar no outro.*

(c) *Se um grafo conexo não tem vértices com grau ímpar, então ele tem um Passeio Euleriano. Todo Passeio Euleriano é fechado.*

Demonstração. Começaremos a demonstração pelo item **(c)** do teorema, seguiremos para **(b)** e terminaremos em **(a)**.

(c) Primeiro, consideremos um grafo G conexo com todos os vértices de grau par. Comecemos um caminho por v_1 pertencente a G, desloquemo-nos sempre por arestas não usadas para chegar aos próximos vértices até retornar ao vértice v_1, tal fato é possível pois cada vértice após v_1 tem grau par e consequentemente, ao chegar em cada um, haverá sempre uma saída dos mesmos, exceto quando retornar a v_1. Obtemos, então, um circuito. Caso todas as arestas de G sejam usadas nesse circuito, temos um Passeio Euleriano fechado. Mas, se ainda houver arestas em G não usadas no passeio, essa construção se deparou com um vértice onde outra aresta podia ser tomada. Chamemos esse vértice de v_i. Podemos assim regressar a v_i e sair dele por outra aresta que não havia sido usada previamente durante o caminho, pois v_i é de grau par. Se todas as arestas de G forem tomadas, temos um Passeio Euleriano fechado, partindo de v_1, chegando a v_i, tomando o caminho adicional que vai de v_i a v_i e retornando a v_1 como de início. Caso ainda tenham arestas a percorrer, procedemos da mesma forma como para v_i até percorrer todas as arestas.

Agora, suponhamos que o grafo G possui um Passeio Euleriano fechado. Em cada vértice, esse passeio deve chegar por uma aresta e sair por outra distinta. Assim o número de arestas incidentes em cada vértice é par, ou seja, todos os vértices têm grau par.

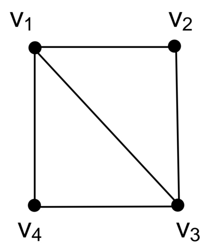
(b) Seja G um grafo conexo. Suponhamos que G contenha um Passeio Euleriano. Sejam v_0 e v_f os extremos desse passeio. Logo, todo vértice dessa passeio tem grau par, exceto v_0 e v_f.

Agora, suponhamos que G conexo tenha exatamente dois vértices de grau ímpar e esses sejam v_0 e v_f. Construíremos G' a partir de G, conectando v_0 a v_f, pela aresta v_0v_f, então todo vértice de G' tem grau par. Logo G' contém um Passeio Euleriano fechado P'. Logo, P = P'$\setminus\{v_0v_f\}$ é um Passeio Euleriano em G.

(a) Seja G um grafo conexo com mais de dois vértices de grau ímpar, por exemplo quatro, e sejam eles v_0, v_1, v_2 e v_3. O argumento de Euler se resume no seguinte: se um vértice v tem grau ímpar, então todo Passeio Euleriano tem que começar ou terminar em v, o que está explicíto em **(b)**. Suponhamos que v_0 é o vértice de início desse passeio e v_3 o vértice final do mesmo. Sendo assim, v_1 e v_2 não são extremidades do passeio e consequentemente têm grau par, que garante a chegada e saída dos mesmos. O que é uma contradição, pois v_1 e v_2 têm grau ímpar e também deveriam ser extremidades de tal passeio. E esse processo é análogo para qualquer quantidade de vértices de grau ímpar acima de quatro. Logo, concluímos que não tem Passeio Euleriano em grafos conexos com mais de dois vértices de grau ímpar. □

Vejamos um exemplo de Passeio Euleriano na figura 18.

Figura 18 – Passeio Euleriano

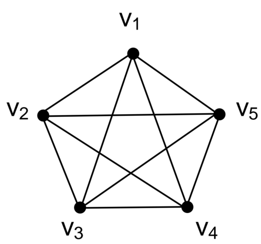


Fonte: Produzida pelo autor

Notem que os vértices v_1 e v_3 têm grau ímpar e, portanto, são extremidades do passeio e um exemplo é $v_1v_2v_3v_4v_1v_3$.

Vejamos também um exemplo de Passeio Euleriano fechado na figura 19.

Figura 19 – Passeio Euleriano fechado



Fonte: Produzida pelo autor

Notem que todos os vértices do grafo da figura 19 têm grau par e por isso podemos traçar um Passeio Euleriano fechado, como por exemplo, $v_1v_2v_3v_4v_5v_1v_3v_5v_2v_4v_1$.

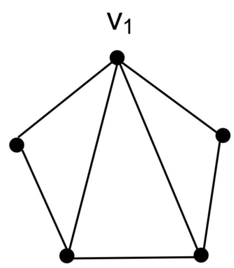
Um exemplo de grafo conexo, bastante importante e conhecido, que não tem Passeio Euleriano é o grafo do problema das Pontes de Konigsberg (figura 5), o qual tem todos os quatro vértices com grau ímpar.

Fonseca (2018, p.10) nos recorda que o teorema 1.5.1 "é utilizado em situações nas quais se faz necessário encontrar uma rota que percorra todas as arestas com o menor custo. Como exemplo, temos a rota utilizada por empresas que fazem a coleta de lixo ou a entrega de correspondências".

Definição 1.5.5. Estrela *é um grafo conexo que possui n vértices, em que um desses vértices está conectado aos demais, ou seja, esse vértice tem grau $n - 1$.*

Vejamos na figura 20 um exemplo de estrela.

Figura 20 – Estrela



Fonte: Produzida pelo autor

Notem que o vértice v_1 do grafo na figura 20 está conectado a todos os outros vértices, sendo todos eles adjacentes a v_1.

1.6 Grafos vazios e grafos completos

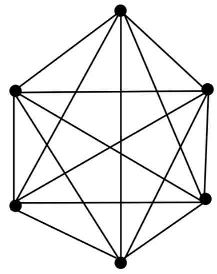
Definição 1.6.1. Grafos vazios *são os grafos mais simples que possuem quaisquer quantidades de vértices, mas não há arestas.*

Definição 1.6.2. Grafo completo *é um grafo em que cada vértice está conectado a todos os outros vértices e é denotado por K_n para n vértices. "Os grafos completos também podem ser chamados de* clique*", segundo Lovász, Pelikán e Vesztergombi (2005, p.126).*

Vejamos a figura 21 que traz o exemplo de um grafo completo, o K_6.

Se um grafo não é completo, podemos fazer a conexão de pares de arestas que ainda não são adjacentes, ou seja, de um grafo G não completo, podemos conectar todos os pares de

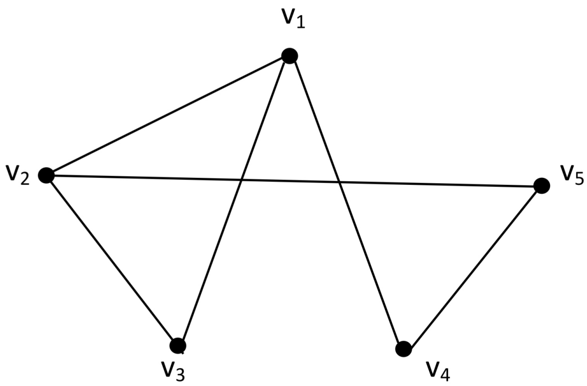
Figura 21 – Grafo completo com 6 vértices: K_6



Fonte: Produzida pelo autor

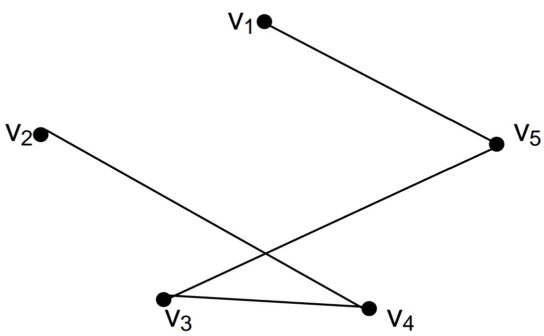
vértices que não são adjacentes em G e obter um novo grafo, o G'. Esse grafo G' é nomeado de complemento de G. Vejamos o exemplo de um grafo G não completo (figura 22) e de seu complementar, o G' (figura 23).

Figura 22 – Grafo G não completo



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 23 – G': complementar de G



Fonte: Produzida pelo autor

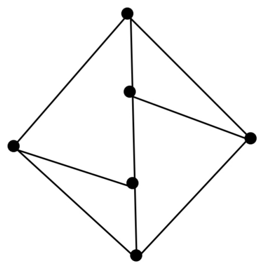
Notem que todas as arestas que compõem G' são exatamente as ausentes e necessárias para que o grafo G seja completo, passando a ser o K_5 (figura 29).

1.7 Grafo regular e ciclo

Definição 1.7.1. Grafo regular *é um grafo em que todos os seus vértices possuem o mesmo grau e denotamos na forma r-regular, onde r é o grau de qualquer vértice.*

Vejamos um exemplo na figura 24.

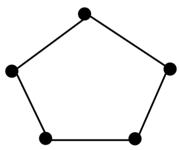
Figura 24 – Grafo *3-regular*



Fonte: Produzida pelo autor

Vale ressaltar que todo grafo completo é regular, mas nem todo grafo regular é completo e que todo grafo *2-regular* é um *ciclo*, denominamos ciclos como C_n, onde n é o número de vértices do ciclo. Vejamos um exemplo na figura 25.

Figura 25 – Ciclo de 5 vértices: C_5

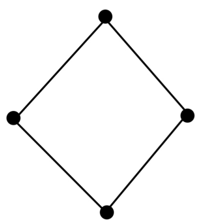


Fonte: Produzida pelo autor

Definição 1.7.2. Comprimento *é o número de arestas de um ciclo ou caminho. O comprimento de um ciclo é denominado por k ciclo, onde k é a quantidade de arestas desse ciclo.*

Vejamos um exemplo na figura 26.

Figura 26 – Comprimento: *4 ciclo*



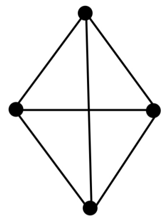
Fonte: Produzida pelo autor

1.8 Grafo Planar

Definição 1.8.1. Grafo planar *é todo grafo que pode ser desenhado no plano, mantendo a estrutura de conexões de vértices, de modo que não haja interceptações de arestas que não sejam os próprios vértices.*

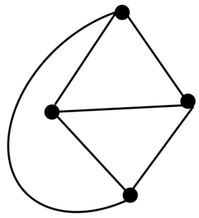
Exemplo 1.8.1. *Grafo planar*

Figura 27 – K_4



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 28 – K_4 na forma plana

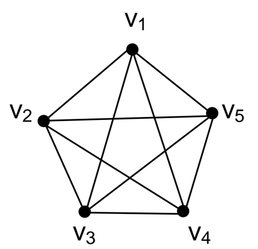


Fonte: Produzida pelo autor

Dois grafos completos, importantes para o estudo sobre grafos planares, são o K_5 e o $K_{3,3}$, esse último é bipartido. Vejamos os exemplos 1.8.2 e 1.8.3.

Exemplo 1.8.2. *Grafo K_5 é não planar.*

Figura 29 – K_5

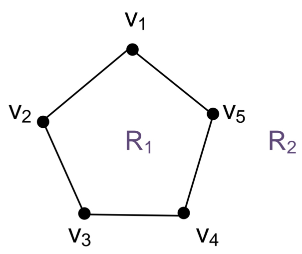


Fonte: Produzida pelo autor

Podemos mostrar que o K_5 é não planar por construção ou por indução, por desigualdades a partir da fórmula de Euler, a qual não abordamos nesse trabalho. Então, faremos a construção.

Em qualquer representação planar do K_5 (figura 29), teremos um ciclo compreendendo todos os 5 vértices do grafo e o mesmo divide o plano em duas regiões, R_1 e R_2 (figura 30).

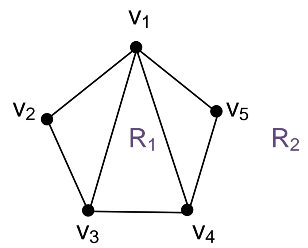
Figura 30 – C_5



Fonte: Produzida pelo autor

Em R_1, região interna ao ciclo, só podemos desenhar, no máximo, 2 arestas sem que haja interceptações e essas arestas são adjacentes. Por exemplo, v_1v_3 e v_1v_4 (figura 31).

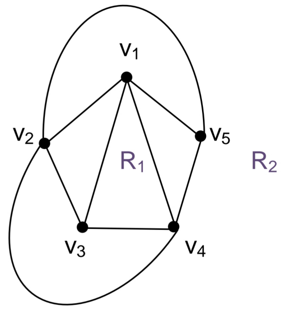
Figura 31 – C_5 com 2 arestas internas



Fonte: Produzida pelo autor

Em R_2 é análogo, por exemplo, v_2v_4 e v_2v_5 (figura 32).

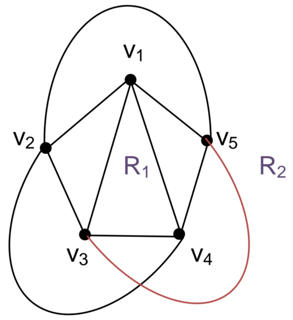
Figura 32 – C_5 com 2 arestas internas e 2 externas



Fonte: Produzida pelo autor

E, consequentemente, não conseguiremos adicionar a última aresta, nesse caso a v_3v_5, à representação planar do K_5 sem que haja interceptação entre arestas (figura 33). Logo, o K_5 é não planar.

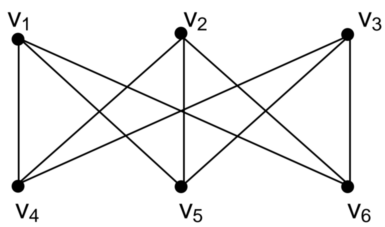
Figura 33 – Tentativa de planarização do K_5



Fonte: Produzida pelo autor

Exemplo 1.8.3. *Grafo $K_{3,3}$ é não planar.*

Figura 34 – $K_{3,3}$

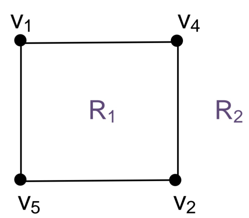


Fonte: Produzida pelo autor

Mostraremos que o $K_{3,3}$ é não planar através da construção a seguir:

Em qualquer representação planar do $K_{3,3}$ com os vértices dispostos como na figura 34, temos que os vértices v_1 e v_2 estarão sempre conectados a v_4 e v_5 e essas conexões formam um ciclo (figura 35) que divide o plano em duas regiões R_1 e R_2.

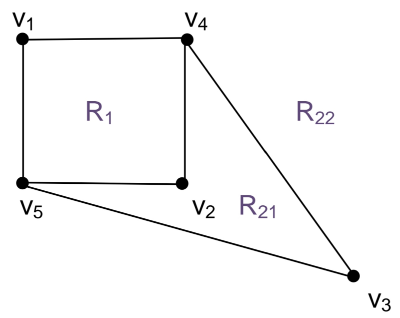
Figura 35 – Ciclo com 4 vértices do $K_{3,3}$



Fonte: Produzida pelo autor

O vértice v_3 pode ser desenhado em R_1 ou R_2. Supondo que v_3 esteja em R_2 (o caso é análogo para v_3 em R_1), região do plano externa ao ciclo, e conectado aos vértices v_4 e v_5. As arestas v_3v_4 e v_3v_5 dividem a região R_2 em R_{21} e R_{22} (figura 36).

Figura 36 – Conexão do v_3 ao v_4 e ao v_5 do ciclo



Fonte: Produzida pelo autor

Assim, podemos ter v_6 em R_1, R_{21} ou R_{22}. Então, temos 3 casos de interceptação entre arestas, quando:

- v_6 está em R_1 e for conectado a v_3;

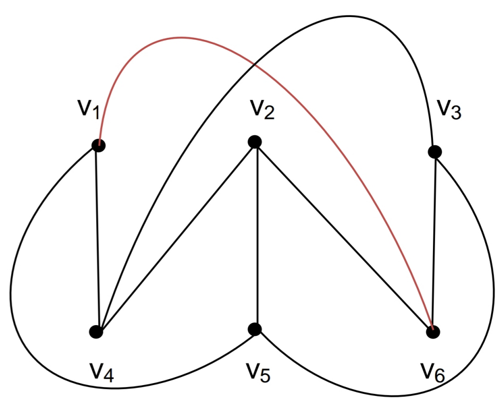
- v_6 está em R_{21} e for conectado a v_1;

- v_6 está em R_{22} e for conectado a v_2.

Com a interceptação de arestas, temos que o $K_{3,3}$ é não planar.

Na figura 37, observamos que a última aresta (em vermelho), nesse caso v_6v_1, ao tentarmos inseri-la na forma plana do $K_{3,3}$, interceptará alguma outra como descrito em uma dos três casos anteriores.

Figura 37 – Tentativa de planarização do $K_{3,3}$



Fonte: Produzida pelo autor

Essas evidências nos dois exemplos anteriores são de extrema importância e nos direciona ao teorema de Kuratowiski 1.8.1, o qual iremos apenas enunciar.

Definição 1.8.2. *Uma* subdivisão de um grafo *consiste em colocar vértices "no meio" das arestas.*

Segundo Costa (2011, p.19), "dizemos que um grafo H é uma subdivisão de G se H pode ser obtido de G por uma sequência finita de subdivisões".

Teorema de Kuratowski 1.8.1. *Um grafo é planar se, e somente se, não contém subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$.*

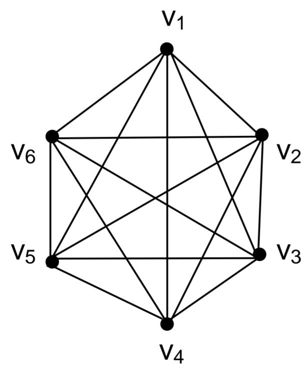
De acordo com Santos (2017, p.66), "O teorema de Kuratowski, [...], nos fornece uma caracterização para a planaridade de grafos, ou seja, nos dá uma condição necessária e suficiente para um grafo ser planar". Vejamos o exemplo 1.8.4 sobre planaridade de grafos, analisando o grafo K_6 (figura 38).

Definição 1.8.3. *A* remoção de aresta em um grafo *consiste em tornar dois vértices adjacentes em não adjacentes, desde que tenham apenas uma conexão entre eles, ou reduzir a quantidade de arestas incidentes a ambos os vértices após a remoção.*

Definição 1.8.4. *A* contração de arestas em um grafo *consiste na remoção de aresta e substituição dos dois vértices de suas extremidades por um único vértice, de tal forma que que toda aresta que incidia em um dos dois vértices substituídos passa a ser incidente ao vértice que os substituiu.*

Exemplo 1.8.4. *Grafo não planar*

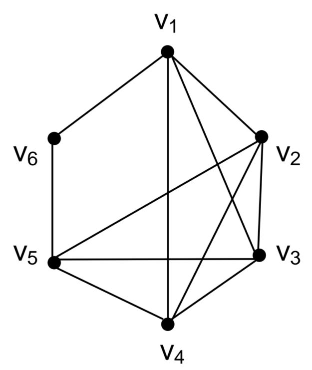
Figura 38 – K_6



Fonte: Produzida pelo autor

No grafo K_6 (figura 38), percebemos que todos os vértices dele têm grau 5, então removeremos as arestas v_6v_2, v_6v_3, v_6v_4 e v_1v_5 (figura 39).

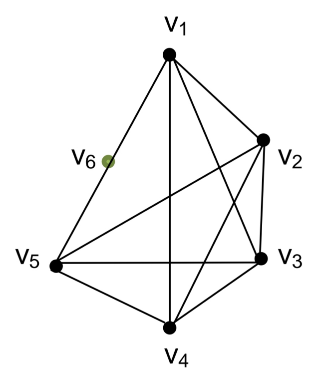
Figura 39 – K_6 após remoção de algumas arestas



Fonte: Produzida pelo autor

Observamos que v_6 passou a ter grau 2, então removeremos ele através da contração entre as arestas v_1v_6 e v_5v_6, formando a nova aresta v_1v_5 e realocando v_6 na aresta v_1v_5 (figura 40) e gerando a subdivisão de K_5.

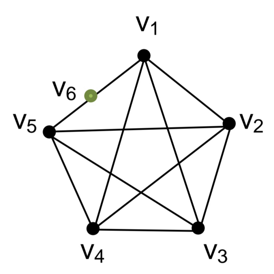
Figura 40 – Contração das arestas v_1v_6 e v_5v_6



Fonte: Produzida pelo autor

Logo, pelo teorema de Kuratowisk 1.8.1, o K_6 é não planar, pois contém uma subdivisão de K_5 (figura 41).

Figura 41 – Subdivisão de K_5

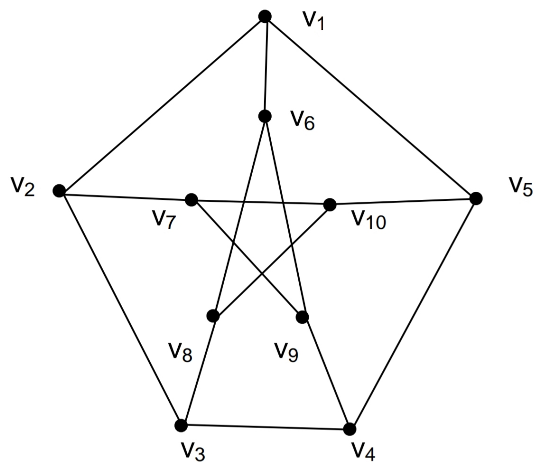


Fonte: Produzida pelo autor

Vejamos agora o exemplo 1.8.5, também sobre planaridade de grafos, analisando o $K_{3,3}$.

Exemplo 1.8.5. *Grafo não planar*

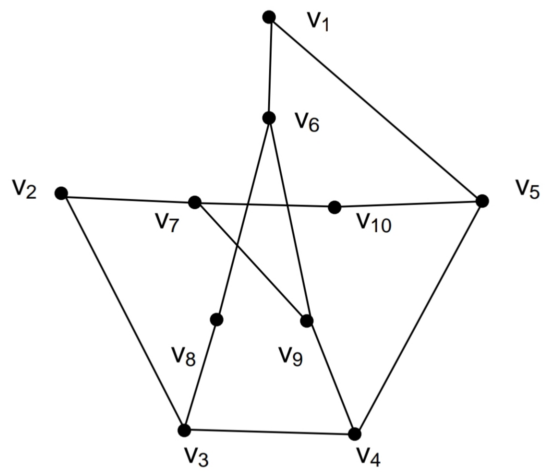
Figura 42 – Grafo de Petersen



Fonte: Produzida pelo autor

De início, notamos que todos os vértices têm grau 3. Então, removeremos as arestas v_1v_2 e v_8v_{10}, ficando o grafo da figura 43.

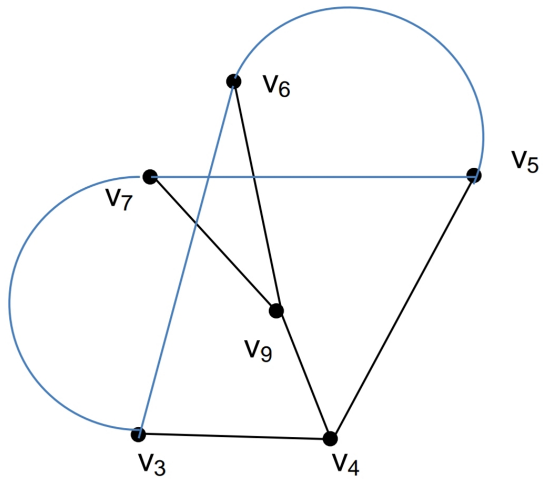
Figura 43 – Remoção de arestas do grafo de Petersen



Fonte: Produzida pelo autor

Observamos, agora, que os vértices v_1, v_2, v_8 e v_{10} passaram a ter grau 2. Então, removeremos esses vértices do grafo através da contração, respectivamente, entre as arestas v_5v_1 e v_1v_6, v_3v_2 e v_2v_7, v_3v_8 e v_8v_6, e v_5v_{10} e $v_{10}v_7$, passando a ter as arestas em azul: v_5v_6, v_3v_7, v_3v_6 e v_5v_7 (figura 44).

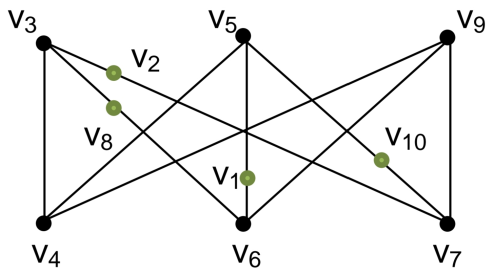
Figura 44 – Contração de arestas



Fonte: Produzida pelo autor

Reorganizando a disposição dos vértices no grafo, temos a configuração do grafo $K_{3,3}$, formado pelos vértices v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 e v_9 (figura 45).

Figura 45 – Subdivisão de $K_{3,3}$



Fonte: Produzida pelo autor

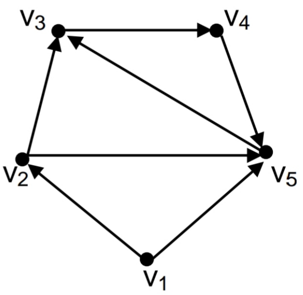
Pelo teorema de Kuratowski 1.8.1, o grafo de Petersen é não planar, pois ele contém uma subdivisão de $K_{3,3}$.

1.9 Grafo dirigido

Definição 1.9.1. Grafo dirigido *é todo grafo em que as interações entre os vértices não são recíprocas, significa que a relação de um vértice v_1 com v_2, por exemplo, segue uma orientação, uma ordem, indicada por uma seta.*

Podemos partir de v_1 em direção a v_2 ou de v_2 a v_1, as duas situações não podem ocorrer simultaneamente. Esse tipo de grafo pode ser chamado de *grafo direcionado*, *grafo orientado* ou *dígrafo*. Vejamos um exemplo na figura 46.

Figura 46 – Grafo dirigido



Fonte: Produzida pelo autor

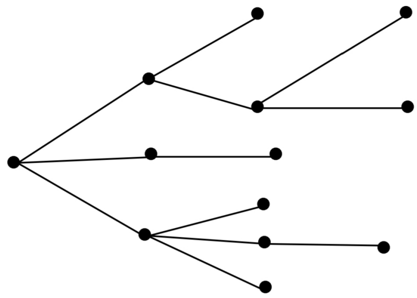
Notem que no grafo dirigido, expresso na figura 46, todas as arestas são setas direcionadas, indicando o ponto de partida e o de chegada entre cada dois vértices adjacentes.

2 Árvores

Definição 2.1. Árvore *é um grafo conexo que não possui ciclo como subgrafo em sua estrutura, existe um único caminho que conecta quaisquer dois vértices, ao remover qualquer aresta o grafo será não conexo.*

É denominada por T. Podemos interpretar, a partir de Diestel (2000), que as árvores não possuem aresta de menos, nem demais. Vejamos na figura 47 um exemplo de árvore.

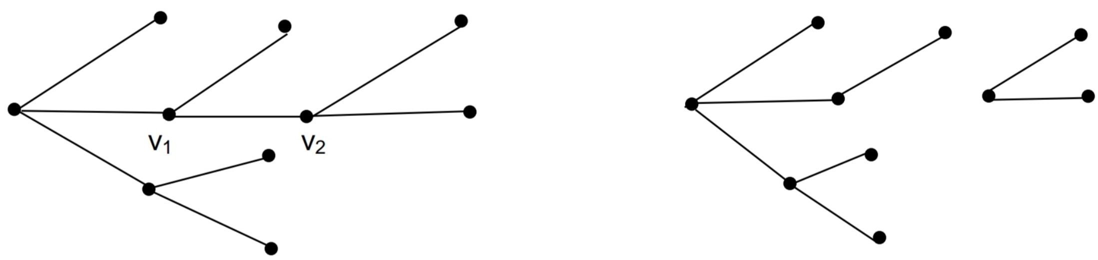
Figura 47 – Árvore T



Fonte: Produzida pelo autor

A árvore mais simples que podemos encontrar só tem um vértice e, consequentemente, nenhuma aresta, o que representa um grafo vazio. Ao remover qualquer aresta de uma árvore, essa aresta removida é chamada de *aresta-de-corte*. O mesmo tipo encontramos em qualquer grafo conexo no qual após a remoção de aresta o deixa não conexo. Em árvores, toda aresta é uma *aresta-de-corte*. Vejamos o exemplo na figura 48.

Figura 48 – Aresta-de-corte desconectando a árvore



Fonte: Produzida pelo autor

Notem que a aresta v_1v_2 que foi removida da árvore é uma aresta-de-corte, deixando o grafo desconexo.

Teorema 2.1. *(a) O grafo G é uma árvore se, e somente se, ele é conexo, mas a remoção de qualquer aresta resulta em um grafo desconexo.*

(b) Um grafo G é uma árvore se, e somente se, ele não contém ciclos, mas a adição de qualquer nova aresta cria um ciclo.

Prova. A prova da parte **(a)**, primeiro provaremos que G é uma árvore, então satisfaz a condição dada. Sabemos que G é conexo pela definição de árvore. Então devemos mostrar que ao remover qualquer aresta desse grafo, ele se tornará desconexo.

De uma forma direta, assumimos que removendo a aresta v_1v_2 desse grafo, o grafo G' será conexo. Então G' contém um caminho P que conecta v_1 e v_2. Mas então se colocarmos essa aresta v_1v_2 de volta, esse caminho P e a aresta v_1v_2 formam um ciclo nesse grafo G, contradizendo a definição de árvores.

Agora, queremos provar que se G satisfaz a condição do teorema, então ele é uma árvore.

Como G é conexo, devemos argumentar que G não contém ciclo.

De forma também direta, assumimos que G contém um ciclo. Então ao remover uma aresta desse ciclo, teremos um grafo conexo. Contradizendo a condição do teorema.

A prova de **(b)**: Suponhamos que G é uma árvore. Consideremos dois vértices v_1 e v_2. Como G é conexo, então existe um caminho P entre v_1 e v_2. Ao adicionarmos uma nova aresta ligando v_1 e v_2, o grafo G terá um ciclo formado por P e por v_1v_2. Como v_1 e v_2 foram tomados arbitrariamente, a adição de qualquer aresta forma um ciclo.

Agora suponhamos que G é um grafo sem ciclos, logo a adição de qualquer aresta forma um ciclo.

Sejam v_1 e v_2 dois vértices quaisquer. Se for adicionada uma aresta conectando v_1 e v_2, por hipótese G terá um ciclo. E sabemos que um caminho é um ciclo sem uma das arestas.

Então, ao remover a aresta v_1v_2 temos que existe um caminho entre v_1 e v_2, logo G é conexo, pois v_1 e v_2 foram tomados arbitrariamente.

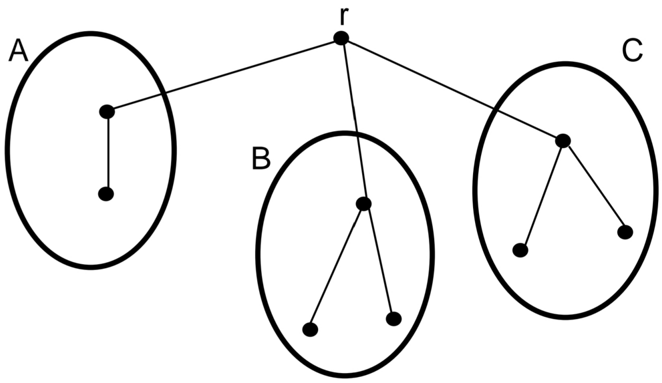
Como G não contém ciclos e conexo, G é uma árvore. □

2.1 Árvores enraizadas

Definição 2.1.1. Árvore enraizada *é uma árvore que possui um vértice distinto, denominado de raiz e representado por r, e os demais vértices que determinam um conjunto vazio ou se dividem em $k \geq 1$ conjuntos disjuntos, distintos e não vazios, os quais são subárvores de r, que, por sua vez, também são árvores.*

Vejamos um exemplo de uma árvore enraizada na figura 49.

Figura 49 – Árvore enraizada



Fonte: Produzida pelo autor

Notem que na figura 49, temos uma árvore enraizada, onde o vértice r está distinguível, a raiz da árvore, e a partir dele temos três conjuntos disjuntos e não vazios, A, B e C, os quais comportam os demais vértices da árvore. Os conjuntos A, B e C representam as subárvores de r, as quais também são árvores.

Em geral, o vértice raiz aparece naturalmente com a configuração e aplicação que o grafo representa.

Em uma árvore existe sempre um único caminho que conecta a raiz r até um certo vértice v dessa árvore, por exemplo.

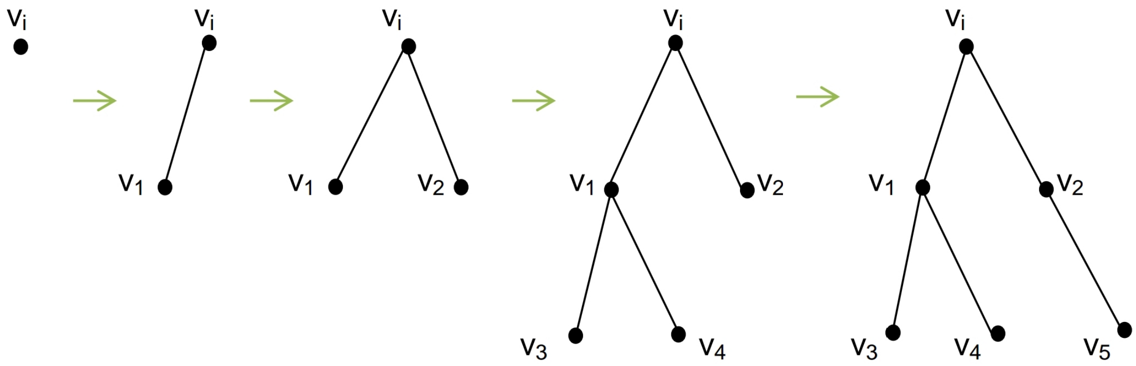
O vértice que vier nesse caminho a partir de r, antecedendo v, é chamado de pai de v e os que vierem exatamente após v, são chamados filhos de v. Se um vértice v não é pai de ninguém, será chamado de *folha*. A raiz não tem pai, mas é pai de todos os vértices adjacentes a ela.

2.2 Crescer árvores

As árvores de verdade crescem e desenvolvem novos ramos. As árvores-grafo podem se desenvolver da mesma maneira. Para que isso ocorra existe o *Procedimento de Crescimento-de-Árvore*, que consiste em, a partir de um simples vértice dado, conectá-lo a outro por uma aresta, logo após, adicionar um novo vértice e conectar esse grafo ao vértice, por outra aresta, a partir de um de seus vértices, e assim por diante. Vejamos um exemplo de crescimento de árvore na figura 50.

Na figura 50 trazemos a sequência de crescimento de árvore. A partir de v_i conectamos ao novo vértice v_1, em seguida conectamos v_i a v_2, após esse passo, pulamos, e conectamos v_1 aos v_3 e v_4, e por fim, conectamos v_2 a v_5. Esse processo poderia ser continuado até abranger a necessidade de representar uma determinada situação abordada.

Figura 50 – Procedimento de Crescimento-de-Árvore



Fonte: Produzida pelo autor

Teorema 2.2.1. *Todo grafo obtido pelo Procedimento de Crescimento-de-Árvore é uma árvore e toda árvore pode ser obtida dessa maneira.*

Prova. Provaremos por indução sobre o número de vértices. Seja G uma árvore com apenas um vértice, então ela foi construída pelo Procedimento de Crescimento-de-árvores, pois esse é o primeiro passo do procedimento. Suponhamos agora que G possui ao menos dois vértices. Se os graus dos vértices de G fossem todos maiores que ou iguais a dois, G teria um ciclo. Mas, como G é uma árvore, então ele não tem ciclo, assim ao menos um de seus vértices tem grau um e nomearemos esse vértice por v_1. Removemos v_1 de G e obtemos G'. G' é conexo, pois quaisquer dois vértices de G', que não passam por v_1, têm exatamente um caminho que os conecte. Como G' foi obtida a partir da remoção de v_1 e de sua aresta incidente a ele, pertencentes a G, que é uma árvore e por isso não continha ciclo, consequentemente, G' não contém ciclo, logo G' é uma árvore.

Assim, por hipótese de indução toda árvore G' com menos vértices que a árvore G surge por construção pelo Procedimento de Crescimento-de-árvores. Então, concluímos que G surge de G' por esse procedimento ao se executar mais um passo. Ou seja, a árvore G pode ser obtida através desse procedimento.

Seja G um grafo obitido pelo Procedimento de Crescimento-de-árvores. Como G começou a ser construído com um único vértice, nesse momento era uma árvore. Queremos mostrar, então, que durante as etapas do procedimento, G nunca deixou de ser árvore e, consequentemente, o grafo G final também é uma árvore. Ou seja, mostraremos que se G' é uma árvore e a partir de um novo vértice adicionado e conectado a um vértice pertencente a G' obtivermos G, G é uma árvore. Suponhamos que G foi obitido a partir da conexão do vértice v_i, por uma aresta, com o vértice v_f pertencente G'. Como G' é uma árvore, então é conexo, assim quaisquer dois vértices de G' podem ser conectados por um caminho, por exemplo v_0 e v_f. Podemos garantir que G também é conexo pois, como v_0 é conectado a v_f por um caminho e v_i está conectado a v_f

por uma aresta, então podemos conectar v_0 a v_i, e assim quaisquer dois vértices de G podem ser conectados por um caminho.

Então, para provar que G é uma árvore, basta mostrar que G não contém ciclo. Ao conectar v_i a G' por uma aresta e formar G, v_i tem grau um. Como G' é uma árvore e não tem ciclo e em v_i não se forma ciclo pois é de grau um, concluímos que G é uma árvore, pois não tem ciclo.

□

Definição 2.2.1. Árvore de descendência *é uma árvore originada a partir de outra já existente.*

Consiste no processo de obtenção de árvores a partir de uma árvore com estrutura já conhecida, que representa o crescimento de árvores. Ou seja, uma árvore é descendente de outra desde que já tenhamos, no mínimo, uma árvore de um vértice e nenhuma aresta, consequentemente.

Teorema 2.2.2. *Toda árvore sobre n vértices tem n – 1 arestas.*

Prova. Essa prova é bem direta, pois começamos com um vértice, ou seja, 1 vértice e 0 arestas, a cada novo vértice adicionado a essa árvore, será introduzida uma nova aresta, permanecendo sempre a diferença de 1 entre o número total de vértices e o de arestas. □

3 Emparelhamento em grafos

Definição 3.1. Emparelhamento em um grafo G não dirigido *é um conjunto M de arestas, dotado da seguinte propriedade: todo vértice de G incide em no máximo um elemento de M.*

Definição 3.2. Conjunto estável de vértices *são vértices dois a dois não adjacentes, ou seja, não existe arestas com extremidades em um mesmo vértice.*

Conforme Bondy e Murty (1976), podemos dizer que um emparelhamento é um conjunto de arestas duas a duas independentes; um emparelhamento é, portanto, análogo a um conjunto estável de vértices.

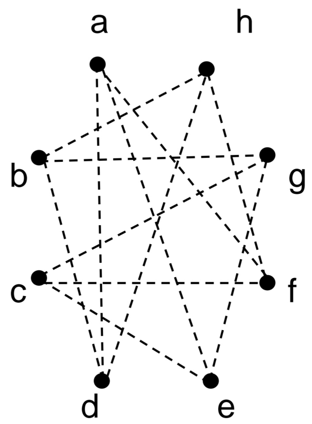
Definição 3.3. Parte própria *consiste em um conjunto de elementos que está contido em um outro conjunto, ou seja, é um subconjunto de um conjunto dado.*

Um emparelhamento M é máximo se não existe um emparelhamento M' tal que |M'|>|M|. A propósito, um emparelhamento M é maximal se não existe um emparelhamento M' do qual M faça parte própria. Vejamos um exemplo de emparelhamento em grafo:

Exemplo 3.1. *Em uma escola há 8 alunos que desejam se candidatar a representantes do grêmio estudantil, cada chapa deve ser composta por apenas dois integrantes. Cada um dos 8 alunos conhece apenas 3 desses outros que almejam o cargo. Determinaremos uma possível configuração de composição máxima de duplas para essa eleição.*

De início, representamos os alunos por a, b, c, d, e, f, g e h. Conectamos os alunos conhecidos através de arestas tracejadas (figura 51).

Figura 51 – Grafo dos alunos para composição de chapas



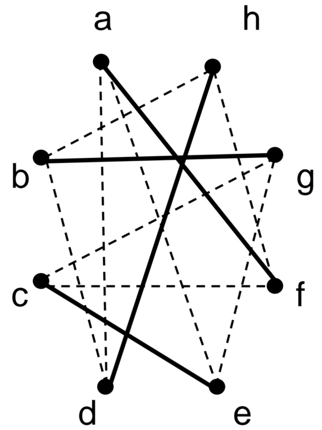
Fonte: Produzida pelo autor

A composição dessa possível configuração desejada será feita de seguinte maneira:

- O aluno *a* escolhe sua dupla, suponhamos que seja *f*.
- O próximo aluno a escolher sua dupla será um conhecido de *f*, por exemplo, *c*.
- O aluno *c* escolhe seu conhecido *e*.
- Seguindo esse processo, *g* escolhe *b*.
- Por fim, *d* escolhe *h*.

Ou seja, a partir da primeira aresta, foram selecionadas as arestas que não são adjacentes em relação as já escolhidas. O grafo da figura 52 representa essas duplas por arestas contínuas.

Figura 52 – Emparelhamento referente à composição de chapas



Fonte: Produzida pelo autor

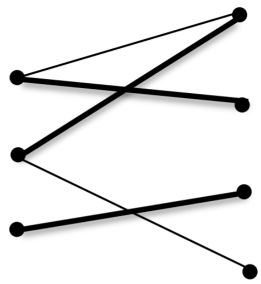
Assim, teremos as chapas compostas, representadas pelas arestas *af*, *ce*, *gb* e *dh*. A partir desse emparelhamento de vértices no grafo dos alunos.

3.1 Grafo bipartido

Definição 3.1.1. Grafo bipartido *é um grafo G que pode ter seu conjunto de V(G) dividido em dois conjuntos disjuntos, $V_1(G)$ e $V_2(G)$, de modo que vértices de um conjunto estejam conectados apenas a vértices do outro conjunto.*

Ou seja, os vértices de $V_1(G)$ estão conectados apenas a vértices de $V_2(G)$. Todas as arestas devem ter uma de suas extremidades em cada conjunto distinto. O que é perceptível ao analisarmos os estudos feitos por Rosen (2012). Vejamos um exemplo de emparelhamento em grafo bipartido na figura 53.

Figura 53 – Emparelhamento em grafo bipartido



Fonte: Produzida pelo autor

Em especial, se todos os vértices de um conjunto está conectado a todos os vértices do outro conjunto, então será denominado de *grafo bipartido completo*, denotado por $K_{m,n}$, em que m e n são as cardinalidades, respectivamente, dos conjuntos disjuntos $V_1(G)$ e $V_2(G)$.

Vejamos o exemplo 3.1.1 referente a grafo bipartido.

Exemplo 3.1.1. *Uma concessionária de automóveis seminovos fez, em um dia, uma proposta de análise comparativa entre quatro modelos de carros para seus cinco primeiros clientes, através do test drive. Sendo que cada cliente só poderia testar dois carros de sua escolha dentre os modelos: Argo, HB20, Ka e Ônix. Após concluir os testes, a concessionária expressou todas as escolhas através de grafos.*

Para preservar a identidade dos clientes, foram representados por b, c, d, f e g. E os carros por a, h, k e o, para respectivamente, Argo, HB20, Ka e Ônix. Sendo assim, temos um grafo com 9 vértices, que foram divididos em duas classes: clientes e modelos de carros. O conjunto que representava a classe dos clientes foi denominado de A e o que representava os modelos dos carros, de B.

Desse modo, temos

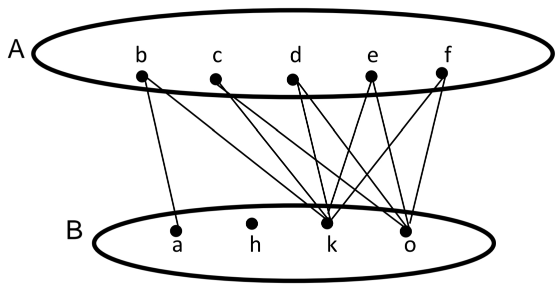
$$A = \{b, c, d, f, g\}$$
$$B = \{a, h, k, o\}$$

As duas bipartições do grafo.

As escolhas de clientes aos carros foram representadas por arestas (figura 54).

Assim, puderam ver, mais facilmente e rapidamente, quais carros foram escolhidos, a quantidade de escolhas e por quem foram escolhidos.

Figura 54 – Grafo bipartido referente aos test drives



Fonte: Produzida pelo autor

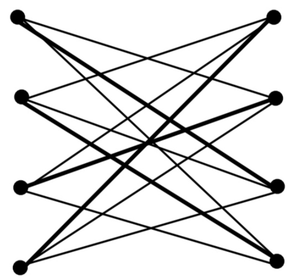
3.2 Emparelhamento perfeito

Definição 3.2.1. Emparelhamento perfeito *é um subconjunto M de arestas de um grafo G que contém todos os vértices de G. Isto é, cada vértice desse grafo é incidente a exatamente uma única aresta de M.*

O grafo $K_{3,3}$ (figura 34) é um exemplo de grafo bipartido completo, pois o mesmo se divide em dois conjuntos disjuntos com 3 vértices em cada um, e todos os vértices de um conjunto se relacionam unicamente com os os vértices do outro conjunto. Podemos obter nele o emparelhamento perfeito, que também é máximo, pois o grau de todos os vértices são iguais, no caso 3.

Vejamos um exemplo de emparelhamento perfeito em um grafo bipartido na figura 55.

Figura 55 – Emparelhamento perfeito em grafo bipartido



Fonte: Produzida pelo autor

No grafo bipartido da figura 55 temos um emparelhamento perfeito representado pelas arestas mais espessas.

Podemos perceber, então, que quaisquer k vértices de um dos conjuntos disjuntos de um grafo, tem ao menos k vértices, do outro conjunto desse grafo, conectados a eles.

Obs.: Todo emparelhamento perfeito é máximo e em um grafo G com emparelhamento perfeito o número de arestas é $\frac{|V|}{2}$.

Teorema 3.2.1. *Se todo vértice de um grafo bipartido tem o mesmo grau $d(v) \geq 1$, então ele contém um emparelhamento perfeito.*

Prova. Seja X um subconjunto de A, e Y o conjunto de vértices adjacentes de X em B. O número de arestas que partem de X é dado por d • |X|. Como cada vértice de Y possui d arestas, havendo a possibilidade de existir arestas que não estão conectadas a X, é preciso que $|Y| \geq |X|$. Logo, o grafo bipartido tem um emparelhamento perfeito. □

4 Sugestões de aplicações

Nessa seção daremos alguns direcionamentos de como inserir o estudo sobre a Teoria dos Grafos de forma prática e dinâmica com uma metodologia que contribua para um melhor entendimento da abordagem teórica sobre os grafos.

É notório que a aplicação dos grafos também está relacionada a situações do cotidiano do aluno e é a partir dessas abordagens apresentadas que ele começa a ter essa percepção.

Segundo Lovász, Pelikán e Vesztergombi,

> Grafos são usados para descrever ligações entre átomos em uma molécula; conexões entre células no cérebro; descendência entre espécies, etc. [...] É um tanto natural considerar o grafo cujos nós são cidades e cujas arestas são estradas (ou ferrovias, ou linhas telefônicas) entre essas cidades. Podemos usar um grafo para descrever uma rede elétrica, digamos o circuito impresso sobre a placa em seu computador. (LOVÁSZ; PELIKÁN; VESZTERGOMBI, 2005, p.124)

Observamos que essa metodologia contribui para oportunizar o desenvolvimento das competências elencadas na reformulação da Base Nacional Curricular Comum, voltadas para o Ensino Médio. Dentre as específicas para o ensino da Matemática, destacamos:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. [...] 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2017, p.523)

Em nossas propostas detalhamos as ações sequenciadas voltadas ao professor e ao aluno, e os conceitos de grafos contidos nos problemas propostos, prevemos possíveis respostas e resultados, justificamos a aplicação dos problemas, sugerimos um tempo para o desenvolvimento das atividades e o material que pode ser utilizado. Lembrando que o professor é autônomo para adaptar a abordagem, levando em conta o contexto da turma em que a proposta será aplicada.

4.1 Apresentação da proposta de trabalho com grafos

1º dia de aplicação: O problema das pontes de Konigsberg foi o introdutório e impulsionador ao desenvolvimento da Teoria dos Grafos, trata-se de um problema que se refere a 4 regiões separadas por um rio e 7 pontes que as conectam. O objetivo do problema consiste em ver a possibilidade de efetuar um passeio por todas as pontes, de modo que cada ponte só seja percorrida uma única vez. Com ele podemos fazer uma relação com grafos, em que as ilhas são vértices e as pontes são arestas, trabalhando seu conceito. Como não existe tal possibilidade de passeio para essa situação, resolvemos fazer uma proposta similar em que depende da configuração do grafo, para isso iniciamos com a construção de uma maquete que possibilitará esse estudo.

1. Ações a serem desenvolvidas

   O professor deve:

   a - Apresentar em linhas gerais o tema que será trabalhado e como será trabalhado, sem discorrer ainda sobre a parte teórica;

   b - Aplicar um questionário subjetivo, encontrado no apêndice desse trabalho, onde o aluno poderá expor seus conhecimentos prévios e contatos anteriores com o tema abordado;

   c - Solicitar que os alunos, em equipe, façam uma maquete que contenha 5 ilhas conectadas por 9 pontes e deixar que usem a imaginação para realizarem as confecções. Essa atividade pode ser realizada em sala de aula ou extra-sala.

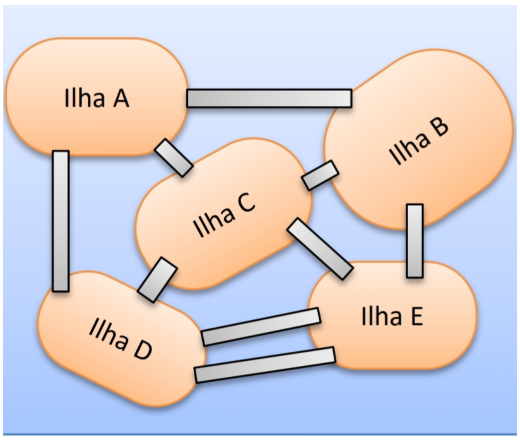
   Os alunos devem:

   a - Construir as maquetes em equipe.

   - Construções esperadas:

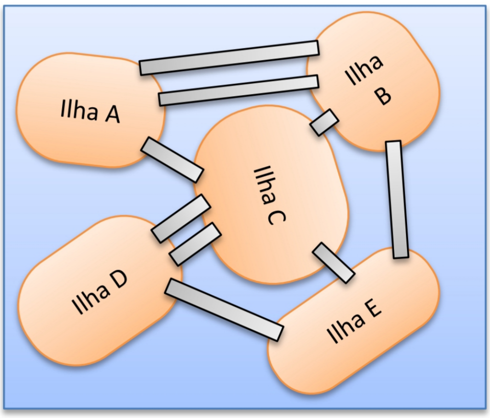
   Dividimos em dois casos as possíveis maquetes a serem construídas pelos alunos, representados nas figuras 56 e 57.

Figura 56 – Caso I: representação prevista da maquete construída



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 57 – Caso II: representação prevista da maquete construída



Fonte: Produzida pelo autor

2. Conceitos de grafos abordados

Nesse primeiro momento só serão trabalhadas as inquietações e a curiosidade sobre grafos. Não será introduzido nenhum conceito específico relacionado aos grafos.

3. Resultados esperados

Como é o início da proposta, esperamos apenas que todos os alunos participem, e que possam usar a imaginação e criação nas construções de suas obras. Também, que o professor seja um agente motivador para que esse processo de construção de conhecimento se faça da melhor forma possível.

4. Justificativa

Essa abordagem se faz necessária para que o aluno volte para sua casa cheio de dúvidas sobre o que são grafos e o que a proposta de confecção das maquetes tem a ver com esse estudo, fazendo com que ele procure informações sobre esse tema, visando um trabalho coletivo.

5. Tempo destinado para a aplicação

É sugerível que esse contato no primeiro dia ocupe um período equivalente a uma aula.

6. Materiais necessários

a - Isopor, cola para isopor, palitos de picolé, argila, tinta, cartolina e papel madeira. Sugerimos que o professor e/ou a escola forneça.

b - O professor pode incentivar o reuso de alguns materiais reaproveitáveis e que possam ser utilizados, como é o caso do papelão, plástico, entre outros, para colaborar com o meio ambiente.

4.2 Problema sobre Passeio Euleriano, similar ao das Pontes de Konigsberg

2º dia de aplicação: Trabalhando o conceito de Passeio Euleriano (def. 1.5.4). Como vimos no capítulo 1, o Passeio Euleriano ocorre quando se percorre todas as arestas de um grafo uma única vez. Esse conceito será desenvolvido através da tentativa de passar por todas as pontes das maquetes confeccionadas, relacionando com o grafo desenhado. Também abordaremos o grau dos vértices do grafo (def. 1.2.1) a partir da observação das incidências de pontes nas ilhas e construções de tabelas.

1. <u>Ações a serem desenvolvidas</u>

   O professor deve:

   a - Solicitar que as equipes transformem as maquetes construídas em desenhos, indagando que eles podem usar vértices (nomeando-os com uma letra) para representar as ilhas e arestas para as pontes;

   b - Solicitar que as equipes façam uma tabela relacionando as ilhas com a quantidade de pontes incidentes em cada uma e também fazer uma soma de todas essas incidências;

   c - Solicitar que as equipes tentem percorrer todas as pontes, passando uma única vez por cada uma delas, visitando essas ilhas, registrando esses percursos;

   d - Solicitar que apresentem suas produções para o grande grupo;

   e - Fazer alguns questionamentos sobre as percepções dos alunos para a mediação da troca de conhecimentos;

   f - Introduzir da parte teórica referente aos grafos, relacionando o que foi produzido pelos alunos com os conhecimentos básicos de grafos;

   g - Aplicar a atividade e exercícios complementares.

   Os alunos devem:

   a - Representar através de um grafo as maquetes confeccionadas;

   b - Construir uma tabela que relaciona ilhas a incidência de pontes sobre elas;

   c - Traçar o passeio solicitado, registrando esse percurso, caso tenha conseguido, ou registrar a sua falta de êxito;

d - Socializar oralmente e visualmente seus resultados;

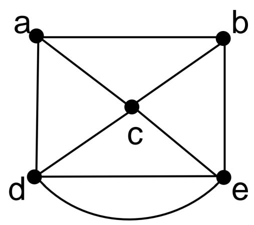
e - Interagir verbalmente de acordo com suas percepções para auxiliar na produção de conhecimentos sobre grafo;

f - Responder a atividade e exercícios complementares.

- Respostas esperadas: Antes de esboçar os grafos que representarão as maquetes desenhadas na (figuras 58 e 59) e prosseguir com a resolução da proposta, denotemos as Ilhas A, B, C, D e E, respectivamente em vértices a, b, c, d, e.

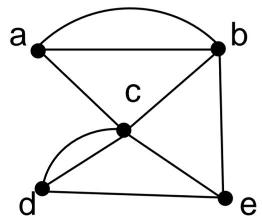
a) Vejamos as figuras 58 e 59, que são as respostas desejadas.

Figura 58 – Grafo do caso I



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 59 – Grafo do caso II



Fonte: Produzida pelo autor

b) Caso I: Vejamos a tabela 2 que relaciona as incidências das pontes com as ilhas.

Tabela 2 – Caso I - Incidência de pontes sobre as ilhas

Ilhas	Quantidade de pontes incidentes em cada ilha
A	3
B	3
C	4
D	4
E	4
Total	18

Fonte: Próprio autor

Tabela 3 – Caso I - Graus dos vértices

Vértices	d(v)
a	3
b	3
c	4
d	4
e	4
Total	18

Fonte: Próprio autor

E na tabela 3 temos os graus dos vértices no grafo.

Caso II: Vejamos a tabela 4 que relaciona as incidências das pontes com as ilhas.

Tabela 4 – Caso II - Incidência de pontes sobre as ilhas

Ilhas	Quantidade de pontes incidentes em cada ilha
A	3
B	4
C	5
D	3
E	3
Total	18

Fonte: Próprio autor

E na tabela 5 temos os graus dos vértices no grafo.

Tabela 5 – Caso II - Graus dos vértices

Vértices	d(v)
a	3
b	4
c	5
d	3
e	3
Total	18

Fonte: Próprio autor

c) No caso I, temos 2 respostas distintas:

1ª – É possível fazer o percurso se ele for iniciado a partir de uma ilha com o número ímpar de pontes incidentes a ela, terminando na outra ilha, também com o número ímpar de pontes incidentes a ela. Um possível passeio traçado seria: *adedcebcab*.

2ª – Não é possível fazer o percurso começando por uma ilha com o número par de pontes incidentes a ela. Uma tentativa frustrada de fazer esse passeio é: *dedcebcab*.

Nessa tentativa não foi possível passar pela ponte que liga as ilhas representadas por a e d.

Já no caso II é impossível fazer esse passeio. Uma tentativa frustrada é: abcabecdc. Nessa tentativa não foi possível passar pela ponte que liga as ilhas D e E.

d) e e) Há algumas configurações distintas de construção e representação através de grafo referente à proposta de trabalho, o que possibilita uma análise que nos leva a conclusões diferentes.

Os grafos simplificam as ilustrações e possibilitam uma melhor observação do que se pede, facilitando o processo de resolução das atividades.

Notamos que, apesar dessas configurações distintas, os teoremas 1.2.1 e 1.2.2 são perceptíveis nessa prática de construção de conhecimento.

E quanto ao passeio solicitado, concluímos que é possível realiza-lo quando temos apenas um par de vértices com um número ímpar de arestas incidentes a cada um dos dois vértices, e mais, que ele só é possível se o passeio começar por um desses dois vértices e terminar no outro. Visto que, voltando ao problema das ilhas, a pessoa sai de uma ilha por uma ponte que tem um número ímpar de incidências de pontes, precisa retornar por outra e sai novamente pela terceira. Desse modo, entra-se em uma outra ilha com número ímpar de incidências de pontes através de uma dessas, sai pela segunda ponte e retorna a ilha por uma terceira.

Nas ilhas com número par de incidências de pontes, entra-se por uma ponte e sai por outra, seguindo o processo até cessar as pontes.

Logo, temos que as duas ilhas com número ímpar de incidências de pontes são as extremidades do passeio. Ou seja, esse passeio conecta as duas ilhas que têm o número ímpar de pontes incidentes a elas.

E assim concluímos também que não dá para fazer o passeio nas construções das maquetes que possuem ilhas com número ímpar de incidências de pontes maior que 2, pois se começar o passeio por uma dessas, terá que concluir esse passeio em cada uma das outras de mesma paridade e isso não é possível, havendo assim algumas pontes que não serão percorridas.

2. Conceitos de grafos abordados

a - Definição de grafo (def. 1.1) e o reconhecimento de vértices e arestas, a partir do desenho que foi produzido por cada equipe;

b - Conceito de grau dos vértices de um grafo (def. 1.2.1), a partir da tabela produzida por cada equipe;

c - Teorema 1.2.1, através da tabela construída por cada equipe;

d - Teorema 1.2.2, a partir da tabela e figura;

e - Definição de arestas em paralelo;

f - Definição de multigrafos (def. 1.3.2);

g - Definição de Passeio Euleriano (def. 1.5.4) e o teorema 1.5.1;

h - Definição de grafos planares (def. 1.8.1), a partir do esboço gráfico das maquetes produzidas pelas equipes.

3. Resultados esperados

Esperamos que os alunos:

a - Compreendam que os grafos são uma forma de representar uma situação habitual e contextualizada mais simples e eficaz;

b - Compreendam que os grafos são compostos por vértices e, em sua maioria, arestas;

c - Representem a ilustração da situação apresentada, através de grafo;

d - Façam a relação entre ilhas com vértices, pontes com arestas e pontes incidentes em uma ilha com o grau de vértice;

e - Identifiquem um multigrafo a partir da situação proposta;

f - Reconheçam passeios e caminhos em um grafo;

g - Reconheçam a aplicação dos teoremas 1.2.1, 1.2.2 e 1.5.1;

h - Reconheçam grafos planares.

4. Justificativa

Essa abordagem é uma boa forma de produzir um conhecimento significativo no aluno, onde ele deverá ser capaz de assimilar o conhecimento através das aplicações práticas que foram feitas. Essa relação entre o fazer e o aprender, ou seja, o aprender fazendo, é muito importante nos dias atuais e é uma tendência que mais cedo ou mais tarde deverá ser obrigatória e seguida nas escolas.

5. Tempo destinado para a aplicação

É aconselhável que o professor destine duas aulas para esse segundo dia de aplicação, pois os alunos precisarão fazer essa relação entre o construído e a exposição através de grafos, e apresentar oralmente e visualmente. O professor ainda fará a abordagem referente ao conhecimento teórico envolvido nas situações propostas. Perceber as dificuldades dos alunos ou a inexistência delas é muito interessante nesse momento, retirando dúvidas para que o processo evolutivo de aprendizagem seja pleno. E uma aplicação de um exercício complementar mais direto, onde os alunos vão responder individualmente, em duplas ou equipes.

6. Materiais necessários

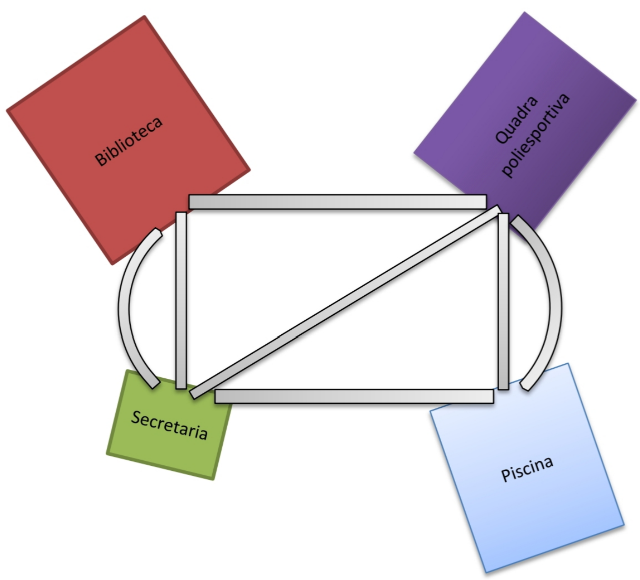
a - Cartolina, papel 40, folhas de ofício, xerox, uso do quadro branco e em escolas que tenham o recurso, pode utilizar o laboratório de informática para que os alunos possam fazer essas amostras de uma forma tecnológica, digital. O professor pode disponibilizar esses materiais junto à escola.

b - Uma alternativa, seria o professor solicitar no dia de aplicação anterior que os alunos providenciem os materiais e/ou recursos necessários a serem utilizados. Por ser em equipe não gera altos custos.

4.2.1 Atividade complementar – Problema dos corredores da escola

1 - Em um projeto da nova escola da rede estadual de Pernambuco, dentre os vários ambientes escolares, foram priorizados, como extremidades dos acessos, a secretaria, a biblioteca, a quadra poliesportiva e a piscina. Os corredores que farão essas conexões são amplos e contemplam o acesso a outros ambientes. Esse projeto foi pensado para minimizar o congestionamento entre pessoas. Para o dia da inauguração já é pensado um passeio em grupo, composto por pais e alunos, por esses quatro ambientes das extremidades dos corredores, de modo que eles não passem pelo mesmo corredor mais de uma vez e ao mesmo tempo percorram todos os corredores. Vejam a figura 60.

Figura 60 – Projeto parcial da escola



Fonte: Produzida pelo autor

Com base nas informações apresentadas, faça o que se pede nos itens a seguir:

a) Faça uma ilustração gráfica mais simples que represente a figura 60. (Utilize grafo para isso).

b) É possível realizar esse passeio? Como?

c) Existem ambientes que são extremidades de mais de um corredor? Se sim, o que representam em grafos?

d) Quantos corredores dão acesso a cada um desses ambientes? (Faça essa representação em uma tabela, relacionando ao estudo de grafos).

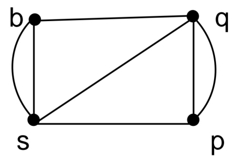
e) Qual é a relação matemática entre a quantidade de corredores do projeto e a soma dos acessos a cada ambiente? (Relacione ao estudo de grafos).

f) Nesse projeto, quantos ambientes têm quantidades distintas ímpares de acessos? (Relacione a resposta ao estudo de grafos).

- Respostas esperadas:

a) Sejam b, q, s e p as respectivas representações para biblioteca, quadra poliesportiva, secretaria e piscina. Na figura 61, temos

Figura 61 – Grafo representando o projeto escolar



Fonte: Produzida pelo autor

b) É possível fazer esse passeio, mas com uma condição, como temos dois ambientes com quantidade ímpar de acessos distintos, a biblioteca e a piscina, os grupos precisam iniciar seu passeio em um desses ambientes, pois eles vão ser direcionados ao ambiente para início do passeio, a partir dele sair, retornar e sair dele novamente durante o trajeto percorrido. Devendo assim terminar no outro ambiente de quantidade ímpar de acessos distintos, pois vai chegar e entrar nele, sair e por fim, deve voltar para concluir o passeio lá. Os ambientes com quantidades pares de acessos distintos garantem a chegada e a saída dos mesmos. Ou seja, os vértices b e p têm graus ímpares, logo o passeio deve começar em um dos dois e terminar no outro, já os vértices s e q têm graus pares e por isso garantem a entrada e saída dos grupos neles.

Esse passeio é chamado de Passeio Euleriano, o qual percorre todas as arestas sem repetição das mesmas. Esse passeio tem extremidades em s e q, ou seja, esse passeio conecta s a q. Uma opção de passeio seria: $bspqbsq$.

c) Sim, o par de vértices b e s, como também o p e q.

Em grafos, configuram arestas em paralelo, condição suficiente para classificar o grafo em Multigrafo.

d) Vejamos a tabela 6 que relaciona as incidências dos corredores com os ambientes.

Tabela 6 – Incidência dos corredores sobre os ambientes

Ambiente escolar	Quantidade de acessos distintos ao ambiente
Biblioteca	3
Piscina	3
Quadra poliesportiva	4
Secretaria	4

Fonte: Próprio autor

E na tabela 7 temos os graus dos vértices no grafo.

Tabela 7 – Graus dos vértices

Vértices	d(v)
b	3
p	3
q	4
s	4

Fonte: Próprio autor

e) O projeto tem 7 corredores e a soma dos acessos distintos a cada ambiente é 14 (3 + 3 + 4 + 4). Ou seja, no grafo há 7 arestas e a soma de todos os graus dos vértices é 14. O que é expresso no teorema 1.2.1, que a soma dos graus de todos os vértices de um grafo é igual ao dobro do número total de arestas.

f) Nesse projeto há apenas 2 ambientes com quantidades ímpares de acessos distintos a ele. Em grafo, temos um exemplo do teorema 1.2.2, a quantidade de vértices com grau ímpar é par.

1. Conceitos sobre grafos abordados no problema dos corredores da escola

a - Definição e representação de grafos (vértices e arestas) (def. 1.2.1).

b - Definição de Passeio Euleriano (def. 1.5.4).

c - Arestas em paralelo.

d - Multigrafo (def. 1.3.2).

e - Grau de um vértice (def. 1.2.1).

f - Teoremas 1.2.1 e 1.2.2.

g - Teorema 1.5.1.

2. Resultados esperados após a aplicação do problema dos corredores da escola

Esperamos que os alunos:

a - Ampliem o conhecimento sobre grafos e sua aplicação em situações habituais e contextualizadas de uma forma mais simples e eficaz;

b - Representem a ilustração do problema, apresentando através de grafo;

d - Façam a relação entre os ambientes da escola com vértices, corredores com arestas, corredores incidentes em um ambiente com o grau de vértice e ambientes com um par de arestas incidentes a eles a arestas em paralelo;

e - Ampliar o conhecimento sobre multigrafo a partir do problema proposto;

f - Sistematizar o conceito de passeios e caminhos em um grafo;

g - Relacionar a proposta com o uso dos teoremas 1.2.1, 1.2.2 e 1.5.1;

h - Fundamentar o conceito de grafos planares.

4.2.2 Exercícios complementares

1º) Existe um grafo sobre 8 vértices com graus 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 3? Justifique sua resposta.

2º) Qual é o número máximo de arestas que um grafo simples de 7 vértices pode ter?

3º) Desenhe um grafo, representando uma molécula de amônia.

4º) Existe a possibilidade de fazer um Passeio Euleriano em um grafo conexo simples de graus 2, 3, 4, 3, 2? Justifique sua resposta.

5º) Existe a possibilidade de fazer um Passeio Euleriano em um grafo conexo simples de graus 3, 3, 3, 3, 4? Justifique sua resposta.

6º) Existe a possibilidade de fazer um Passeio Euleriano fechado em um grafo conexo simples de graus 2, 4, 4, 2, 4, 4? Justifique sua resposta.

7º) Existe a possibilidade de fazer um Passeio Euleriano fechado em um grafo conexo simples de graus 2, 3, 2, 3? Justifique sua resposta.

4.3 Problema da teia alimentar

3º dia de aplicação: O problema da teia alimentar consiste em construir um grafo a partir de uma teia pesquisada previamente, observando como se dispõem as arestas nesse grafo, que são setas e configura um grafo dirigido (def. 1.9.1). Como vimos no capítulo 1, grafo dirigido é todo o grafo em que as interações entre os vértices não são recíprocas, são direcionadas. Possibilita também a construção de um subgrafo (def. 1.4.1), a partir do grafo inicial. Como vimos, ainda no capítulo 1, temos um subgrafo quando podemos remover de G, arestas e/ou vértices, obtendo um novo grafo.

1. Ações a serem desenvolvidas

   O professor deve:

   a - Propor que, em equipes, os alunos façam pesquisas referentes a teias alimentares. Cada equipe deve pesquisar uma;

   b - Propor que desenhem ou imprimam e colem;

   c - Propor que façam uma representação gráfica através de grafos, representando os seres vivos por vértices (denominando-os) e as interações alimentares por arestas;

   d - Solicitar que os alunos exponham e apresentem o que construíram;

   e - Solicitar que eles imaginem a remoção de um ser vivo dessa teia e também a remoção de uma ou mais interações alimentares entre esses seres;

   f - Questionar a relação do grafo anterior com o produto final;

   g - Questionar se continua havendo um grafo e o que os alunos puderam perceber.

   h - Abordar, através de explanações, os conceitos de grafos;

   i - Retomar as abordagens feitas nas aplicações anteriores referentes as ilhas e pontes, e corredores e ambientes escolares;

   j - Propor a atividade e exercícios complementares;

   k - Propor uma nova atividade extraclasse, solicitando que os alunos, junto a seus respectivos parentes, pesquisem e construam uma árvore genealógica de sua família a partir de um patriarca ou de uma matriarca, mas não de um casal, e, a partir daí, vão traçando todo esse mapeamento genético até atingir a todos os membros conhecidos da família que têm esse laço consanguíneo em relações entre pais e filhos.

   l - Incentivar o registro graficamente dessa árvore, a qual é um grafo específico.

   Os alunos devem:

   a - Pesquisar em equipes a teia alimentar, selecionando uma;

   b - Ficar de posse dessa teia;

   c - Construir um grafo a partir da teia alimentar escolhida pela equipe;

   d - Expor visualmente e oralmente suas produções;

e - Seguir os procedimentos solicitados;

f - Expor suas percepções relacionadas a grafos;

g - Responder a atividade e exercícos complementares;

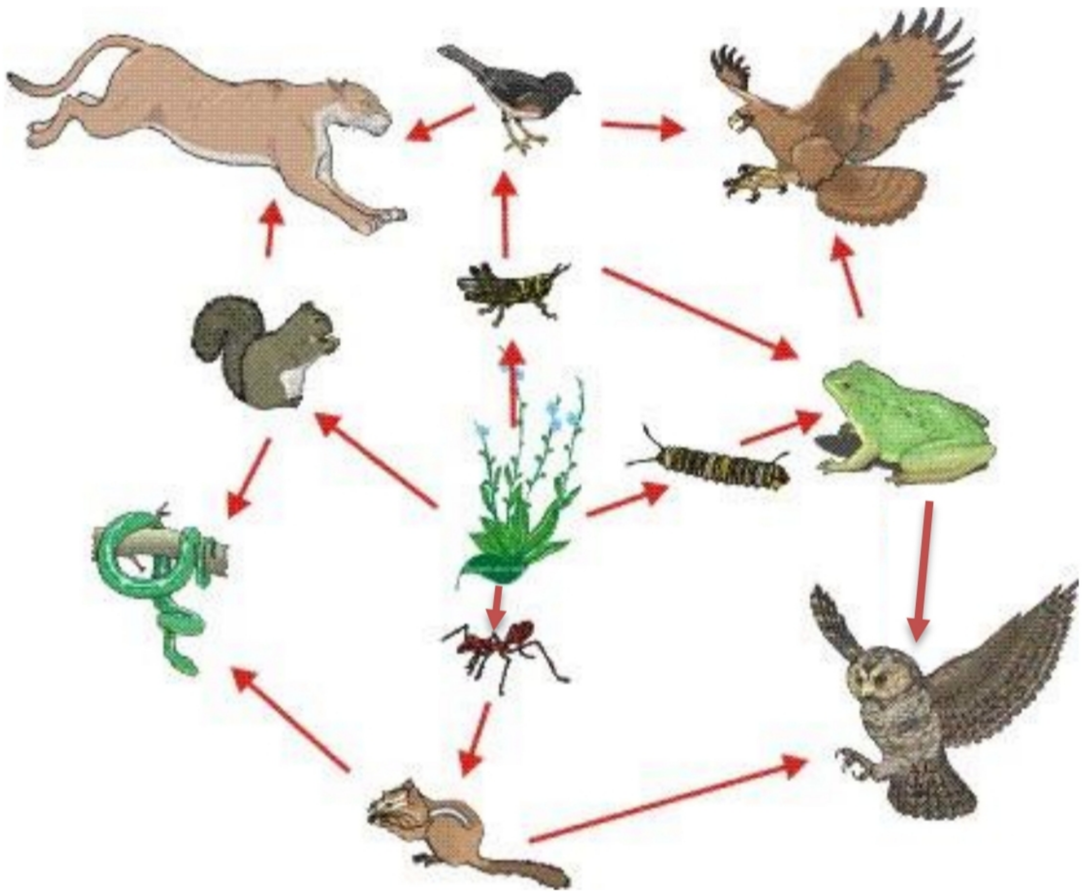
h - Fazer a pesquisa solicitada;

i - Registrar as informações obtidas.

- Respostas esperadas:

a) e b) Na figura 62, temos um exemplo de teia alimentar.

Figura 62 – Teia alimentar

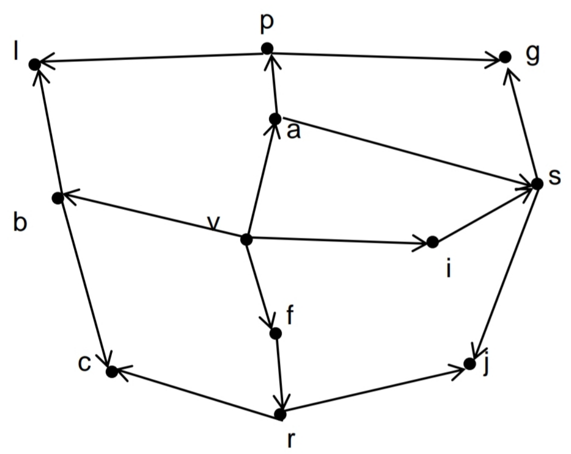


Fonte: neemiasbio.blogspot.com/2018/03/cadeia-e-teia-alimentar.html, acessado em 10/7/2020 às 15h34min

c) Denotaremos os seres vivos: leoa, pássaro, gavião, sapo, gafanhoto, esquilo, cobra, lagarta, formiga, coruja, rato e vegetal por, respectivamente, l, p, g, s, a, b, c, i, f, j, r, v.

Então, na figura 63 temos

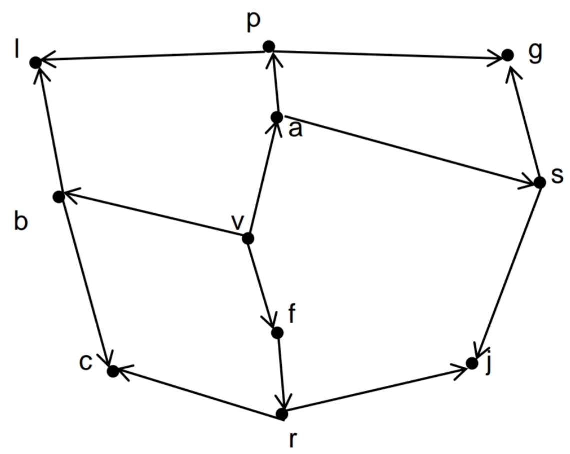
Figura 63 – Grafo dirigido da teia alimentar



Fonte: Produzida pelo autor

e) Removeremos, por exemplo e sem motivo especial, a lagarta (*i*) dessa teia alimentar (figura 64).

Figura 64 – Grafo H: subgrafo de G dirigido



Fonte: Produzida pelo autor

f) A princípio, é notável que as interações entre esse tipo de grafo (figura 63) é um pouco diferente dos vistos anteriormente. As arestas são setas indicando as presas em direção aos seus respectivos predadores. Chamamos esse tipo de grafo de grafo dirigido.

Observamos que os vértices são conectados, de modo que todos eles têm no mínimo grau 2, nesse caso específico. Mas poderia acontecer de ter até, no mínimo, grau 1.

Ao removermos um ser vivo dessa teia, percebemos que todas as interações alimentares nas quais ele estava envolvido também foram excluídas, ou seja, as arestas incidentes ao vértice são removidas junto com o vértice. Mas, observamos que o grafo permaneceu conexo, porém menor, justamente pelo fato de que os vértices do grafo apresentado terem no mínimo grau 2. Chamamos esse novo grafo de subgrafo de G (figura 64).

2. Conceitos de grafos abordados

a - Grafos dirigidos (def. 1.9.1), a partir da observação das indicações por setas;

b - Grafos conexos (def. 1.5.3);

c - Subgrafos (def. 1.4.1), a partir da remoção de aresta de grafos existentes.

3. Resultados esperados

Esperamos que os alunos:

a - Compreendam o conceito de grafos dirigidos;

b - Compreendam o conceito de grafos conexos;

c - Reconheçam a origem de um subgrafo a partir de um grafo existente.

4. Justificativa

A proposta consiste em relacionar os estudos sobre grafo com outra disciplina. Nessa aplicação referente à teia alimentar, temos como principal objetivo a integração dos grafos com outros componentes curriculares, nesse caso a Biologia. O aluno percebe a utilização e um olhar matemático relacionado a esse outro conhecimento de área distinta, proporcionando assim a interdisciplinaridade. O professor de Biologia, por sua vez, pode abordar o conteúdo de teia alimentar, relacionar com a extinção de espécies, as consequências para o ecossistema e ao equilíbrio ambiental. Com relação a atividade complementar, pode abordar a questão da Covid-19, relacionando às formas de transmissão, como também à prevenção.

5. Tempo destinado para a aplicação

É aconselhável que o professor destine duas aulas nesse terceiro dia de aplicação para que os alunos possam realizar suas pesquisas, representa-las através de grafos, fazer os procedimentos propostos, expor e apresentar as produções, responder ao exercício complementar e o professor fazer as abordagens e colocações cabíveis para o momento.

6. Materiais necessários

a - Equipamentos com acesso à internet, internet disponível, cartolina, papel 40, folha de ofício e xerox, que podem ser disponibilizados pelo professor em parceria com a escola;

b - Ou solicitar que alunos providenciem os materiais numa abordagem na aula anterior.

4.3.1 Atividade complementar – Problema das saudações entre amigos na pandemia

1 – Durante o período de isolamento devido a pandemia ocasionada pela COVID-19 e já com as flexibilizações, um grupo composto por 10 amigos decidiu marcar uma reunião para colocar os assuntos em dia em um local reservado, respeitando todos as sugestões de prevenção. Para evitar o contato direto com as mãos foi esquematizada uma nova forma de saudação, o toque com o pé ou com o cotovelo. Sabendo que todos os amigos chegam ao local ao mesmo tempo, o anfitrião começa a saudar todos os amigos, um a um, com o contato entre os pés e em seguida todos os outros amigos fazem a mesma saudação entre eles. Assim sendo, responda ao que se pede:

a) Como fica o grafo que representa as saudações iniciais do anfitrião dentre todas as outras saudações e o que representa?

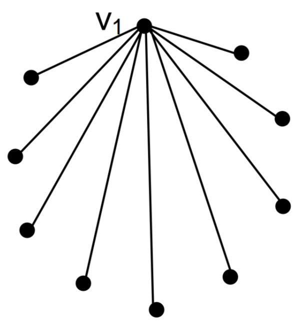
b) Como fica o grafo que representa todas as saudações? Como podemos classificar esse grafo?

c) Quantas saudações foram feitas?

- Respostas esperadas:

a) Na figura 65 temos a representeção das saudações do anfitreão.

Figura 65 – Estrela do anfitreão



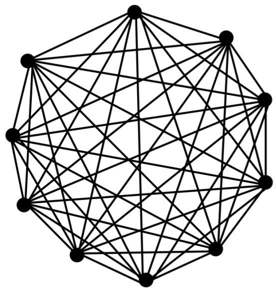
Fonte: Produzida pelo autor

Quando um vértice em um grafo está conectado a todos os outros, temos uma estrela. Ou seja, este grafo possui estrela (figura 65).

O grau desse vértice é n – 1, nesse caso é de grau 9.

b) Na figura 66 temos a representação de todas as saudações.

Figura 66 – Grafo com 10 vértices: Grafo K_{10} ou *9-regular*



Fonte: Produzida pelo autor

Como esse grafo representa a interação entre todos os amigos, ou seja, cada vértice está conectado a todos os outros. Então temos um grafo completo. Ele é denominado por K_{10}, pois tem 10 vértices. Se olharmos para o fato de que cada um dos vértices tem grau 9, então ele é classificado como um grafo regular e, nesse caso, chamado de *9-regular* (figura 66).

c) De início, sabemos que um dos amigos saudou os outros 9. Mas, observamos que essas saudações ocorreram entre todos os amigos.

Então temos,

$$10 \,.\, 9 = 90 \text{ (soma das saudações feitas a partir de cada amigo)}$$

Pelo Teorema 1.2.1, temos

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \,.\, |E|$$

Ou seja,

$$90 = 2 \,.\, |E|$$
$$|E| = \frac{90}{2}$$
$$|E| = 45$$

E assim concluímos que foram feitas 45 saudações.

É claro que poderíamos usar os estudos de Morgado et al. (2006), sobre combinatória, para calcular esse total de saudações na forma $\binom{10}{2}$, mas essa não é a intenção.

1. Conceitos abordados no problema das saudações entre amigos na pandemia

a - Definição de estrela (def. 1.5.5), a partir da saudação do anfitrião;

b - Grafo completo (def. 1.6.2), após todas as saudações;

c - Grafo regular (def. 1.7.1);

d - Grau do vértice de um grafo (def. 1.2.1);

e - Teorema 1.2.1, calculando o total de saudações.

2. Resultados esperados após a aplicação do problema das saudações entre amigos na pandemia

   Esperamos que os alunos:

   a - Identifiquem estrela em um grafo;

   b - Definam grafo completo;

   c - Reconheçam grafo completo;

   d - Determinem o grau do vértice em um grafo;

   e - Apliquem o teorema 1.2.1 para auxiliar na resolução do problema proposto.

4.3.2 Exercícios complementares

1º) Um grafo completo simples com n vértices tem quantas arestas?

2º) Um grafo conexo simples, cujos graus dos vértices são 2, 3, 2, 4, 3, tem quantas arestas?

3º) Existe um grafo com 5 vértices e 9 arestas?

4º) O grafo k_5 é planar? Justifique sua resposta e desenhe o grafo.

5º) Qual é o grau máximo que existe em uma estrela que possui 11 vértices?

6º) O grafo K_8 tem quantos vértices e quantas arestas?

7º) Desenhe um grafo *3-regular* com o menor número de vértices possível.

8º) Desenhe o grafo C_9.

9º) Determine o comprimento de um ciclo com 10 vértices.

4.4 Problema da árvore genealógica

4º dia de aplicação: O problema da árvore genealógica consiste em expressar as relações consanguíneas, entre pais e filhos, formando um grafo que componha "todos os integrantes de uma família", esse grafo é denominado de árvore (def. 2.1). Definida no capítulo 2, árvore é um grafo conexo que não possui ciclo como subgrafo em sua estrutura, ao remover qualquer vértice o grafo será não conexo. Cada integrante da família será representado por um vértice e as relações entre pais e filhos são as arestas. Nesse problema temos a oportunidade de tornar o grafo não conexo através da remoção de arestas-de-corte, que seria uma relação consanguínea desfeita entre pai e filho, como também crescer árvores a partir de novos vértices e arestas introduzidas nesse grafo, isso ocorre com a previsão de nascimento de novos integrantes da família, permanecendo as propriedades da árvore.

1. Ações a serem desenvolvidas

   O professor deve:

   a - Solicitar a alguns alunos que apresentem suas produções, já que dessa vez é uma produção individual;

   b - Questionar a partir de qual membro essa árvore foi construída, relacionando ao estudo de árvores;

   c - Questionar se há pessoas que ainda não são pais, relacionando ao estudo de árvores;

   d - Questionar sobre o número total de integrantes na árvore, como também o número total de interações entre pais e filhos, relacionando ao estudo de árvores;

   e - Pedir que eles suponham que foi feito um exame de DNA, constatando que um daqueles parentescos contidos na árvore não era biológico, ou seja, não havia laços de sangue. Isso durante as apresentações;

   f - Questionar como ficaria a nova árvore, quais as impressões e observações;

   g - Solicitar que retornem a configuração das árvores de origem e propor que eles projetem o futuro dessa árvore genealógica, supondo o nascimento de novos descendentes;

   h - Solicitar que as produções não apresentadas sejam expostos visualmente ao grande grupo para que eles saibam que essas produções são importantes e não foram desnecessárias;

   i - Aplicar a atividade e exercícios complementares;

   j - Relacionar essa árvore genealógica com um tipo de grafo, que é a árvore.

   Os alunos devem:

   a - Apresentar suas árvores genealógicas;

b - Fazer os procedimentos solicitados;

c - Responder aos questionamentos;

d - Aumentar suas árvores originais;

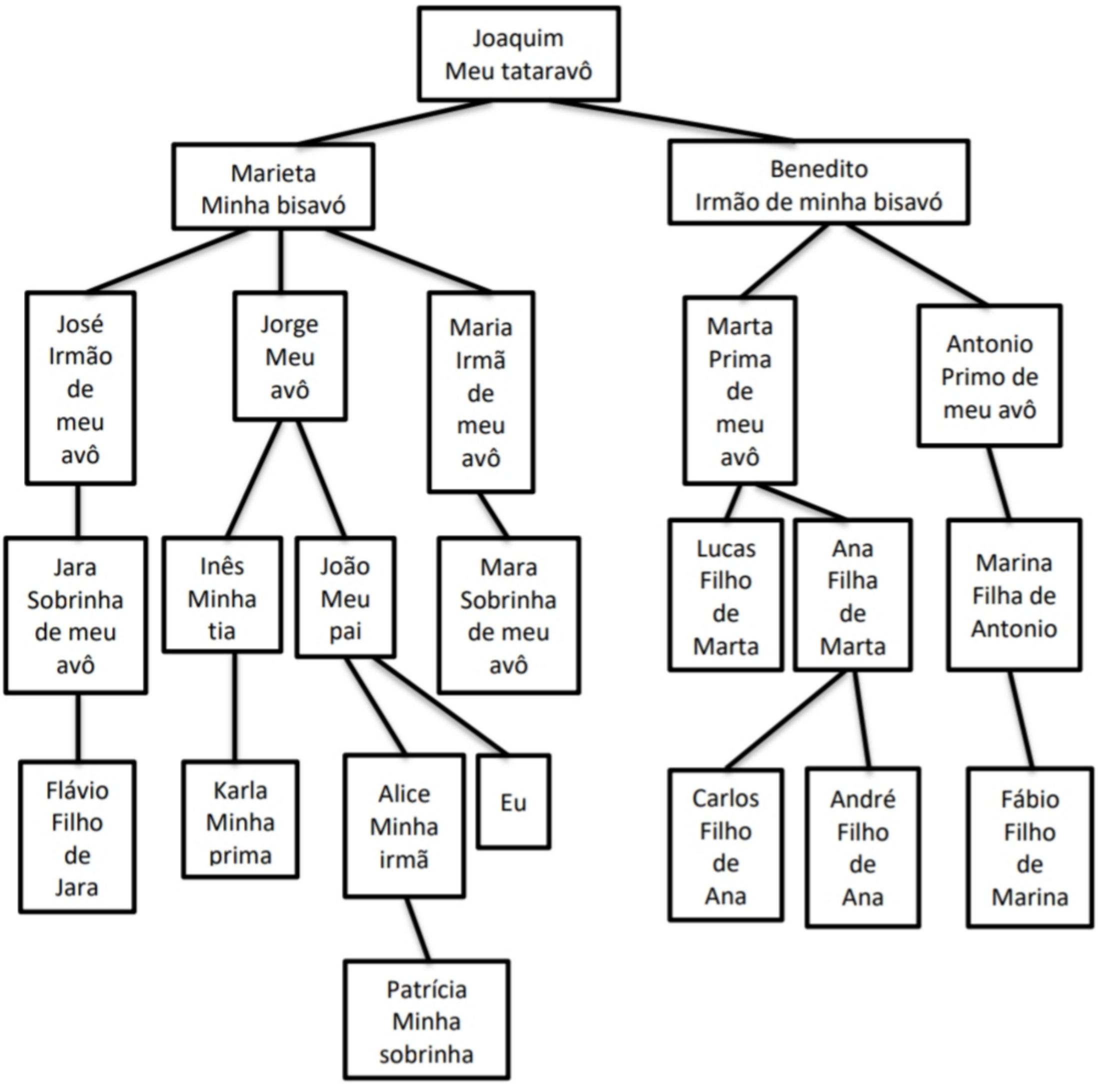
e - Responder a atividade e exercícios complementares;

f - Interagir no momento da abordagem sobre a relação da teoria com a prática, contribuindo com a construção do conhecimento.

- Respostas esperadas:

a) Na figura 67 temos um exemplo de árvore genealógica.

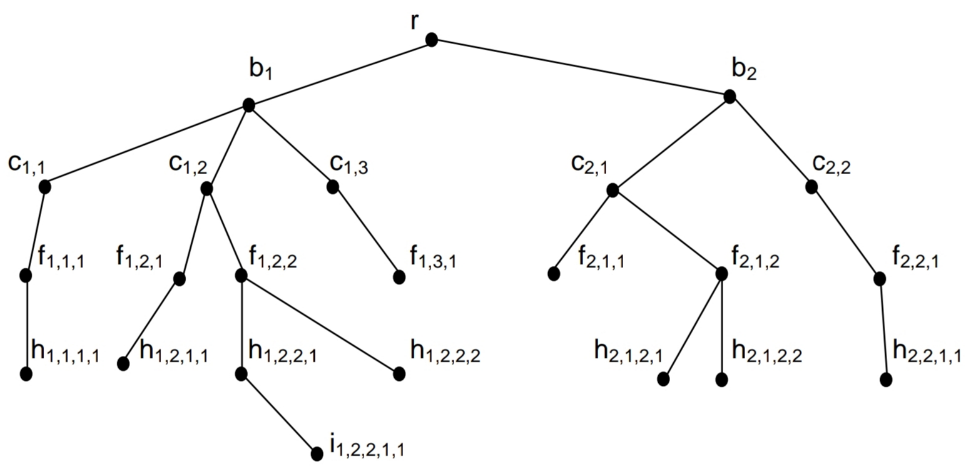
Figura 67 – Suposta árvore genealógica



Fonte: Produzida pelo autor

Que pode ser simplificada como a disposição em grafo na figura 68:

Figura 68 – Árvore-grafo da árvore genealógica



Fonte: Produzida pelo autor

Onde:

r – Joaquim

b_1 – Marieta, b_2 - Benedito

$c_{1,1}$ – José, $c_{1,2}$ – Jorge, $c_{1,3}$ – Maria, $c_{2,1}$ – Marta, $c_{2,2}$ – Antonio

$f_{1,1,1}$ – Jara, $f_{1,2,1}$ – Inês, $f_{1,2,2}$ – João, $f_{1,3,1}$ – Mara, $f_{2,1,1}$ – Lucas, $f_{2,1,2}$ – Ana, $f_{2,2,1}$ – Marina

$h_{1,1,1,1}$ – Flávio, $h_{1,2,1,1}$ – Karla, $h_{1,2,2,1}$ – Alice, $h_{1,2,2,2}$ – Eu (o(a) aluno(a)), $h_{2,1,2,1}$ – Carlos, $h_{2,1,2,2}$ – André, $h_{2,2,1,1}$ – Fábio

$i_{1,2,2,1,1}$ – Patrícia

b) A árvore foi construída e originada a partir do tataravô Joaquim, vértice r da árvore. Podemos classificar essa árvore como árvore enraizada, cuja raiz é o vértice r. Ele é pai, mas não tem pai nesta árvore.

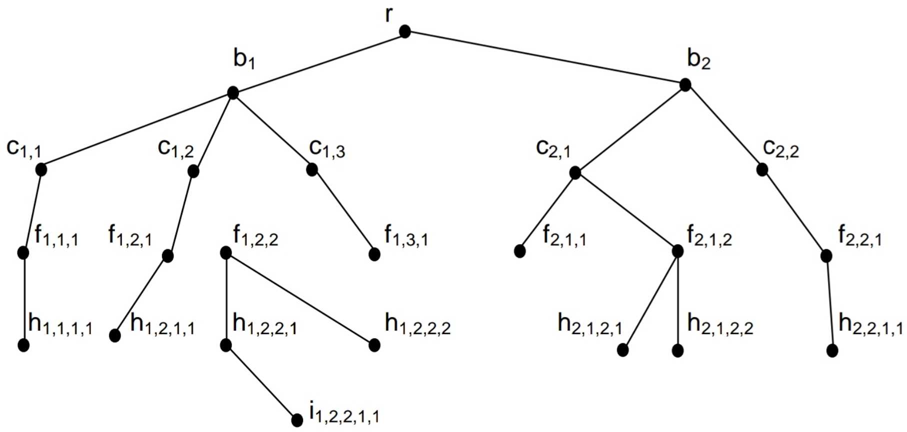
c) Mara, Lucas, Flávio, Karla, Eu, Carlos, André, Fábio e Patrícia, respectivamente, $f_{1,3,1}$, $f_{2,1,1}$, $h_{1,1,1,1}$, $h_{1,2,1,1}$, $h_{1,2,2,2}$, $h_{2,1,2,1}$, $h_{2,1,2,2}$, $h_{2,2,1,1}$, $i_{1,2,2,1,1}$. São classificados como folha da árvore, todos eles têm grau 1, ou seja, têm pai, mas não são pais de ninguém.

d) Nessa árvore há 23 parentes e 22 interações entre pais e filhos.

Em grafos, temos 23 vértices e 22 arestas. Conjecturando que toda árvore, assim como essa, tem n – 1 arestas, onde n é o número de vértices. O que nos remete ao teorema 2.2.2.

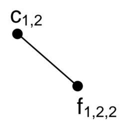
e) e f) Supondo que houve uma desconfiança em relação a João ser filho de Jorge, vértices $c_{1,2}$ e $f_{1,2,2}$ da árvore, foi feito um exame de DNA, constatando que essa relação de sangue não era compatível, ou seja, eles não são pai e filho biológicos. Como essa relação de parentesco consanguínea foi quebrada, o grafo ficará assim (figura 69):

Figura 69 – Grafo desconexo



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 70 – Aresta-de-corte

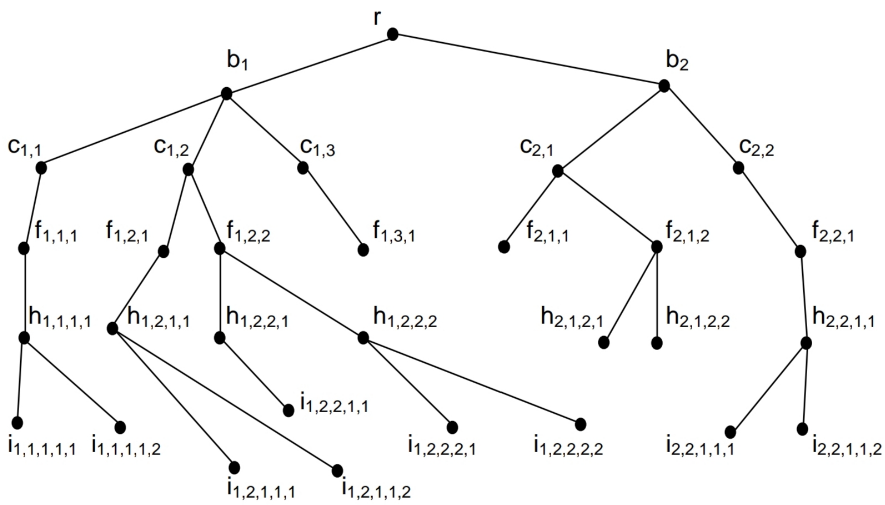


Fonte: Produzida pelo autor

Essa interação da figura 70, $c_{1,2}f_{1,2,2}$, é classificada como aresta-de-corte na árvore T, pois, ao removê-la, houve uma desconexão desse grafo. E esse procedimento nos remete ao item **(a)** do teorema 2.1, pelo fato de haver essa desconexão do grafo.

g) Após a previsão de futuros descendentes, a árvore ficará com a configuração da figura 71.

Figura 71 – Árvore crescida



Fonte: Produzida pelo autor

Podemos perceber o teorema 2.2.1 nesse passo, pois a árvore cresceu a partir da inserção de novos vértices e de suas respectivas arestas.

2. Conceitos de grafos abordados

a - Definição de árvore (def. 2.1), identificando-a como um tipo de grafo;

b - Definição de folha, a partir da observação das extremidades das árvores;

c - Definição de aresta-de-corte na árvore, como um passo para desconectar grafos;

d - Árvore enraizada (def. 2.1.1), identificando também sua raiz;

e - Crescimento de árvores (seç. 2.2), a partir de uma árvore dada;

f - Procedimento de Crescimento-de-Árvore;

g - Teorema 2.1;

h - Teorema 2.2.1;

i - Teorema 2.2.2.

3. Resultados esperados

- Esperamos que os alunos:

a - Percebam que a árvore é um tipo de grafo;

b - Compreendam o conceito de árvore;

c - Identifiquem as folhas das árvores;

d - Reconheçam que toda aresta de uma árvore é uma aresta-de-corte;

e - Compreendam o conceito de árvore enraizada e, consequentemente, identifiquem a sua raiz;

f - Percebam que uma árvore, geralmente, é descendente de uma outra, a menos que essa árvore seja composta apenas por um vértice.

g - Percebam a aplicabilidade dos teoremas 2.1, 2.2.1 e 2.2.2 nas situações propostas.

4. Justificativa

Nesse problema, podemos ver um grafo bem direto e aparentemente mais simples de se compreender, pois já é do conhecimento do aluno essa estrutura, mas talvez ainda não havia percebido a relação direta com a Matemática. Também é uma forma de trabalhar a interdisciplinaridade, novamente com a disciplina de Biologia. O professor de Biologia pode abordar o conteúdo DNA e suas bases, genes e hereditariedade, e falar sobre filhos com parentes.

A construção, mapeamento e análise de árvores genealógicas é muito importantes nos dias atuais, pois já existem estudos, projetos e programas que fazem essa construção a nível mundial. Ao relacionarem com árvores genealógicas de outras pessoas, conseguem encontrar, em alguns casos, relações de parentescos que talvez sejam desconhecidas ou que apenas não se tenham mais contato. Então é uma aplicação de grafo muito importante para essas interações.

5. Tempo destinado para a aplicação

É aconselhável reservar também duas aulas a esse 4º dia de aplicação para atingir um número considerável de exposições, propostas, direcionamentos e resolução da atividade e exercícios complementares que os alunos receberão do professor, e para a abordagem conceitual que o professor fará na conclusão do dia, relacionando a prática com a teoria. Ainda tem o espaço para as inquietações e a retirada de dúvidas.

6. Materiais necessários

a - Cartolina, papel 40, folha de ofício e xerox;

b - Recursos tecnológicos.

Obs.: Os materiais e recursos podem ser disponibilizados pela escola junto ao professor ou pode ser solicitado previamente aos alunos.

4.4.1 Atividade complementar – Problema da conexão de internet Banda Larga na Escola

1 – Em uma escola da rede Estadual de Pernambuco, deseja-se levar o acesso à internet a todos os ambientes da escola, após ser contemplada pelo Programa Banda Larga na Escola, de modo que em cada ambiente tenha um roteador, evitando o congestionamento da rede na hora dos acessos de professores, alunos e demais funcionários. O ponto principal de distribuição é a secretaria e a partir desse ponto se ramificará a rede para a direção, sala dos professores, laboratório de informática, biblioteca, sala de recursos e de aulas de acordo com a ilustração (figura 72).

Com base nas informações apresentadas e na figura 72, que ilustra a situação, faça o que se pede nos itens a seguir:

a) Construa um grafo que represente a figura 72 que se refere à situação apresentada. Que tipo de grafo é esse?

b) Existem ambientes que estão nas extremidades da rede de internet? Se sim, quais? E o que representam em grafos?

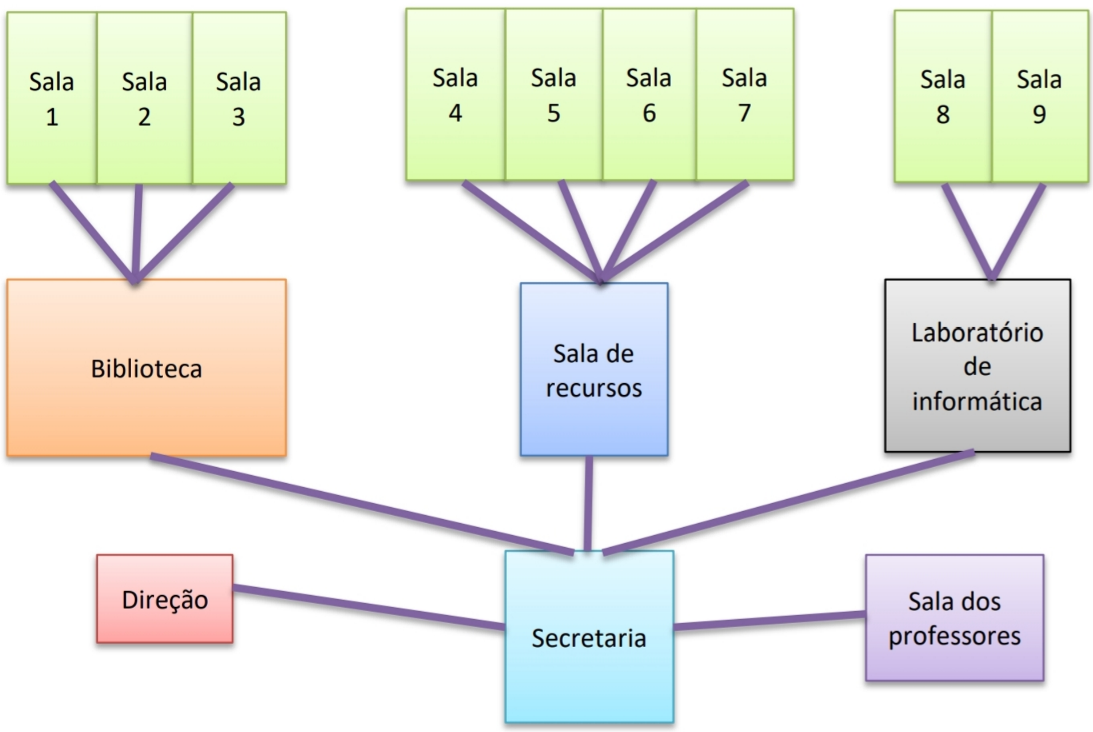
c) Nesse grafo, quem é a raiz?

d) Quantos ambientes escolares têm roteadores e quantas ligações há entre os roteadores? Em grafo, o que isso significa?

e) O plano futuro para essa distribuição é o de estender esse acesso à internet para a cozinha e para a quadra poliesportiva. Como ficará o novo grafo que representará essa ampliação de acesso à internet? E o que isso representa na linguagem de grafo?

f) Após a ampliação de acesso à internet, provavelmente a rede ficará sobrecarregada, então já se pensa em criar dois novos pontos de distribuição, desfazendo as ligações da secretaria à biblioteca e ao laboratório de informática. Estes dois ambientes serão novos pontos principais de distribuição, ampliando assim para três: secretaria, biblioteca e laboratório de informática. Expresse essa nova configuração através de um grafo. Em seguida, escreva o que isso implica na comparação com o grafo construído anteriormente.

Figura 72 – Esquema da rede de internet



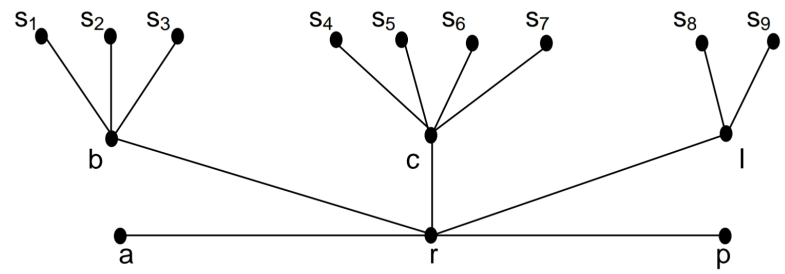
Fonte: Produzida pelo autor

- Respostas esperadas:

a) De início, renomearemos cada ambiente: secretaria, direção, sala dos professores, biblioteca, sala de recursos, laboratório de informática, salas de 1 a 9, respectivamente por r, a, p, b, c, l, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8 e s_9.

Sendo assim, temos

Figura 73 – Árvore T: rerpesentação da rede de internet



Fonte: Produzida pelo autor

Esse grafo é uma árvore.

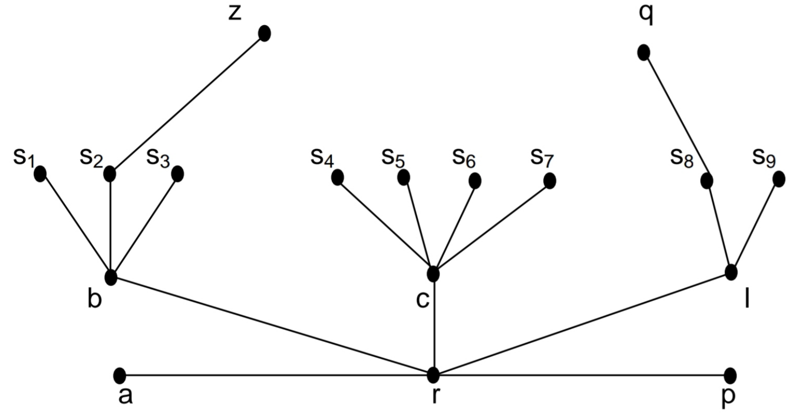
b) Há 11 ambientes, que são a direção, a sala dos professores e salas de aula de 1 a 9. No grafo, a, p, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8 e s_9. São as folhas da árvore.

c) Como o ponto principal de acesso é a secretaria e dela sai toda ramificação. Então a raiz da árvore é representada pelo vértice r. Ou seja, a árvore T é uma árvore enraizada.

d) Existem 15 ambientes e 14 conexões. Em grafo isso significa que o número total de arestas de uma árvore é n – 1, onde n é número o vértices. Que é justamente o que o teorema 2.2.2 nos trás.

e) Na figura 74 temos o crescimento da rede de internet se expandindo à cozinha e à quadra poliesportiva no grafo construído.

Figura 74 – Árvore T crescida

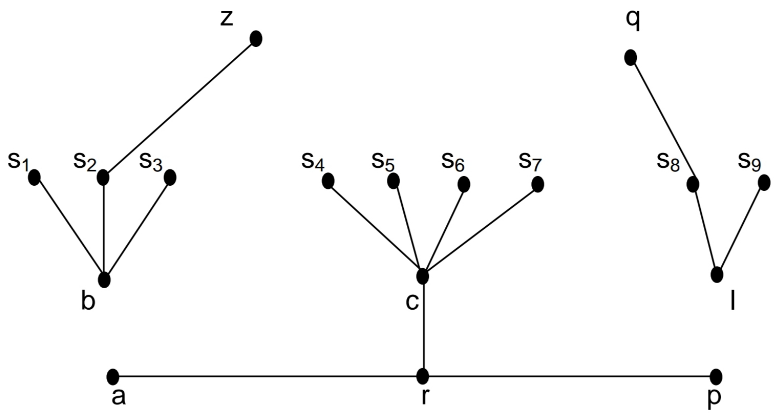


Fonte: Produzida pelo autor

Nesse grafo foram introduzidos os vértices z e q que representam, respectivamente, a cozinha e a quadra poliesportiva. Consequentemente, originaram-se as arestas zs_2 e qs_8. Isso significa que a árvore cresceu a partir de um procedimento chamado de Procedimento de Crescimento-de-árvore. O que está expresso no teorema 2.2.1, concluindo que toda a árvore é construída através desse procedimento.

f) Na figura 75 temos a desconexão da rede, no grafo, para a nova instalação a partir da situação especificada.

Figura 75 – Desconexão do grafo-árvore



Fonte: Produzida pelo autor

Ao remover as arestas *br* e *lr*, o grafo ficou desconexo. Desse modo, percebemos que as arestas removidas são arestas-de-corte, como qualquer uma outra aresta de uma árvore. Que observamos bem no item **(a)** do teorema 2.1.

1. Conceitos de grafos abordados no problema da conexão de internet Banda Larga na Escola

   a - Definição de folha, a partir das árvores construídas;

   b - Definição de aresta-de-corte na árvore, com a remoção de arestas da árvore;

   c - Árvore enraizada (def. 2.1.1), através do problema proposto;

   d - Crescimento de árvores (seç. 2.2), compreendendo seu procedimento;

   e - Grafo desconexo, ao remover uma aresta-de-corte;

   f - Teorema 2.1;

   g - Teorema 2.2.1;

   h - Teorema 2.2.2.

2. Resultados esperados após a aplicação do problema da conexão de internet Banda Larga na Escola

- Esperamos que os alunos:

a - Identifiquem as folhas das árvores;

b - Percebam que toda aresta de uma árvore é uma aresta-de-corte;

c - Compreendam o conceito de árvore enraizada e, consequentemente, identifique a sua raiz;

d - Percebam que toda árvore cresça a partir do Procedimento de Crescimento-de-árvore.

e - Visualizem os teoremas 2.1, 2.2.1 e 2.2.2 nas situações propostas.

4.4.2 Exercícios complementares

1º) Quantos vértices tem uma árvore com 97 arestas?

2º) Quantas arestas-de-corte há em uma árvore com 39 vértices?

3º) Uma árvore enraizada possui 13 vértices, dentre eles o vértice r (raiz). Nessa árvore pode haver, no máximo, quantas subárvores de r?

4º) Desenhe uma árvore com 7 vértices que contenha 1 raiz e 3 folhas.

4.5 Problemas sobre emparelhamento em grafos bipartidos

5º e último dia de aplicação: Queremos nesse momento, abordar os grafos bipartidos (def. 3.1.1), os quais são divididos em dois conjuntos disjuntos e os vértices são conectados por arestas que tenham cada extremidade em um desses conjuntos disjuntos, de acordo com a definição de grafos bipartidos no capítulo 3 desse trabalho; emparelhamento (def. 3.1), determinando um conjunto de arestas não adjacentes que relacionem pares de vértices, em que cada extremidade de toda aresta esteja em um desses conjuntos disjuntos; e emparelhamento perfeito (def. 3.2.1), que é um conjunto de arestas não adjacentes do grafo, que formam pares com todos os vértices desse grafo, de modo que não haja arestas adjacentes. A atividade propõe a construção, em equipe, de problemas simples que envolvam um ou mais desses conceitos e suas respectivas respostas.

1. <u>Ações a serem desenvolvidas</u>

   O professor deve:

   a - Solicitar que os alunos, em equipe, esquematizem problemas que proporcionem a aplicação de grafos, de modo que os elementos que eles utilizem no problema possam ser subdivididos em dois conjuntos disjuntos e que só existam interações entre elementos de conjuntos diferentes, com as respectivas resoluções;

   b - Solicitar que os alunos apresentem as produções;

c - Abordar os conceitos sobre grafos bipartidos e emparelhamento de grafos;

d - Entregar as equipes um material xerografado referente a um problema complementar que envolve emparelhamento perfeito em grafos bipartidos;

e - Solicitar que as equipes façam as interações solicitadas no problema proposto através de grafos;

f - Solicitar a exposição das respostas dadas pelas equipes;

g - Aplicar os exercícios complementares;

h - Solicitar a socialização das respostas dos exercícios complementares para o grande grupo;

i - Fazer a abordagem sobre grafos bipartidos e emparelhamento perfeito de grafos bipartidos;

j - Apresentar também o teorema 3.2.1;

k - Propor uma avaliação dinâmica de todo o processo de aplicação dessa proposta referente à Teoria de Grafos.

Os alunos devem:

a - Elaborar os problemas em equipe, resolvê-los e os apresentar;

b - Resolver em equipe o problema complementar proposto e socializar a resolução com os demais colegas e professor;

c - Resolver os exercícios complementares;

d - Participar verbalmente da construção do conhecimento sobre grafos;

e - Participar da avaliação do processo de aplicação da proposta referente à Teoria de Grafos.

- Produções esperadas:

Problema 1 – **Problema dos ternos e das palestras**

Um empresário foi a um congresso sobre Empreendedorismo, no qual houve palestras diárias pela manhã e à noite. O congresso ocorreu durante 7 dias consecutivos e para cada turno diário de palestras ele queria usar um terno diferente, ou seja, deveria usar dois ternos por dia. Sabendo que ele só dispunha de 5 ternos, este empresário conseguiu fazer esse combinação?

Se sim, como ficaria a exposição desse problema através de grafo?

Que tipo de grafo seria?

Em uma tentativa de mudar o seu querer de usar os 5 ternos de acordo com a configuração inicial para, a cada dia de palestras, usar um terno diferente sem repeti-los, será que o empresário conseguiria fazer com que essa mudança de planos desse certo?

- Resposta:

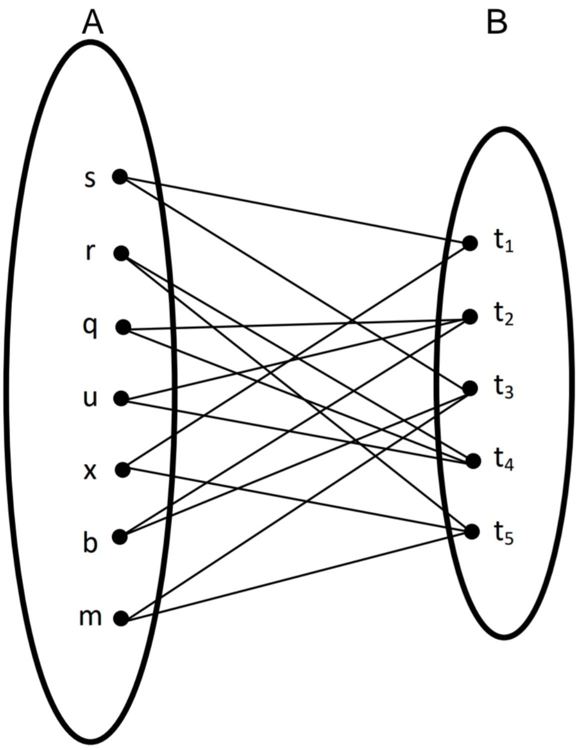
Representaremos: segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado, domingo, terno 1, terno 2, terno 3, terno 4 e terno 5, respectivamente, através de s, r, q, u, x, b, m, t_1, t_2 , t_3, t_4 e t_5, Como sendo vértices do grafo.

Separamos em conjuntos disjuntos os dias da semana dos ternos, onde representaremos o conjunto dos dias da semana por A e os ternos por B.

Na figura 76 veremos a representação dessa parte inicial do problema proposto através de grafo bipartido.

Logo temos,

Figura 76 – Grafo bipartido referente aos ternos e dias de palestras

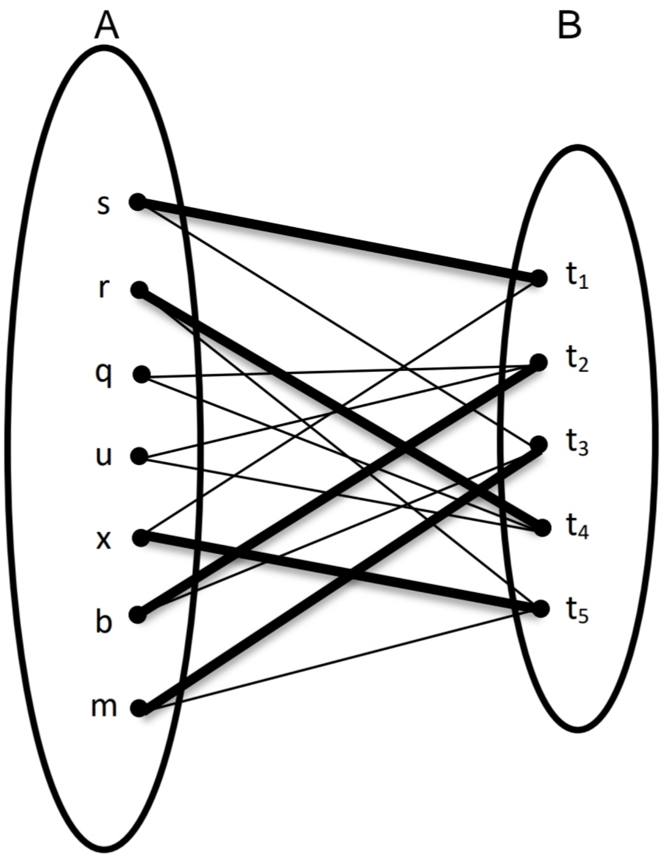


Fonte: Produzida pelo autor

Um grafo bipartido.

Representamos uma configuração de escolha dos ternos para os turnos diários de palestras através de arestas (figura 76) e a tentativa de mudança de planos para um terno diário, sem repetir nenhum, por arestas mais espessas (figura 77).

Figura 77 – Emparelhamento em grafo bipartido entre ternos e dias de palestras



Fonte: Produzida pelo autor

Pelo grafo da figura 76, podemos concluir que é possível usar um terno a cada turno diário de palestras.

Mas, ao analisarmos o grafo, notamos que os graus dos vértices diferem e sabemos que a cardinalidade dos subconjuntos são distintas, pelo enunciado do problema.

Na tentativa do empresário usar um terno a cada dia de palestra sem repeti-lo, concluímos que seria inviável, pois para dois dias quaisquer não teria ternos disponíveis, ou seja, existe o emparelhamento entre cada terno a um dia de palestras, mas não contém um emparelhamento perfeito.

Problema 2 – **Problema do horário especial de aulas**

Em uma determinada escola do Ensino Médio da rede estadual de Pernambuco que contém apenas 5 turmas, está sendo feito um horário especial em que cada professor entre no primeiro dia de aula nas turmas, de modo que lecionem em uma até o intervalo e após o intervalo desenvolva suas atividades em outra turma. Sabendo que há apenas 5 professores e que eles lecionam em todas as turmas da escola, seria possível construir esse horário especial?

Se o horário já tivesse definido dessa forma, seria possível mudar de planos para que houvesse aula até o intervalo e após esse período os professores se reunirem para definir as atividades da semana?

Obs.: Se houver possibilidade de fazer esse horário e repentinamente a adaptação, represente-os através de grafo.

- Resposta:

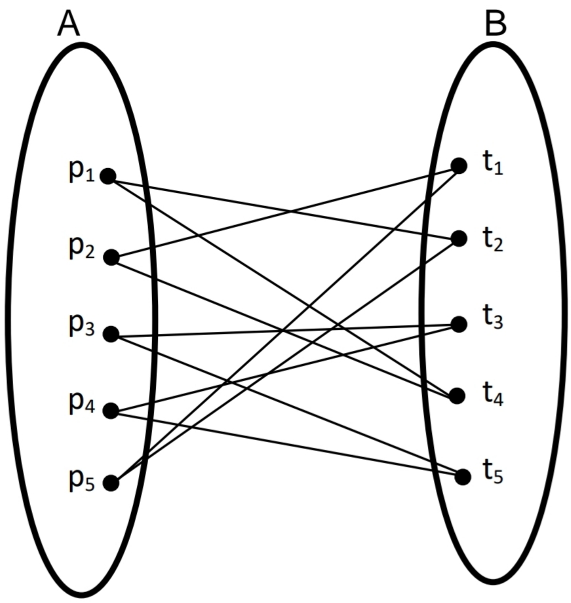
De início, representaremos os professores por p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5, e as turmas por t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5, como sendo vértices do grafo a ser construído.

Separamos esse grafo em conjuntos disjuntos, onde A representa o conjunto dos professores e B representa o das turmas.

Na figura 78 temos a representação através de grafo bipartido dessa proposta inicial de horário.

O grafo fica assim:

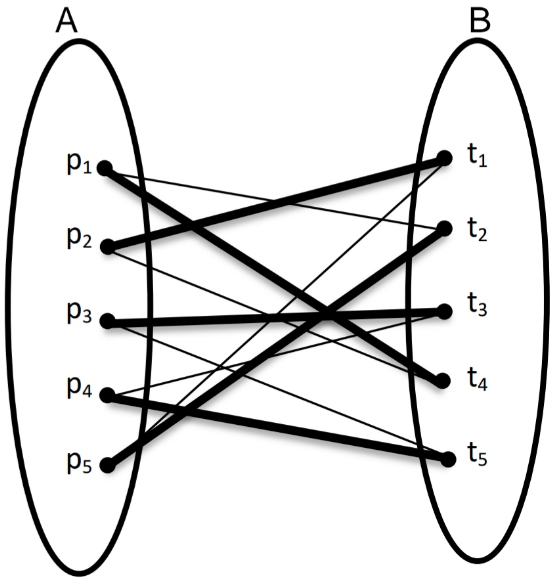
Figura 78 – Grafo bipartido referente às aulas a serem ministradas pelos professores



Fonte: Produzida pelo autor

A confecção do horário especial para o primeiro dia de aula terá as arestas conectando os professores a suas respectivas turmas desse dia (figura 78), no entanto, as arestas mais espessas configuraram a adequação do horário para que a aula só ocorra até o intervalo. Vejamos o grafo que expressa bem essa situação (figura 79).

Figura 79 – Emparelhamento perfeito em grafo bipartido entre aulas e professor



Fonte: Produzida pelo autor

O grafo apresentado na figura 78 relaciona cada dois professores a uma turma da escola e cada duas turmas a um professor, que é a indicação inicial. E o grafo na figura 79 traz a adequação de haver só meio período de aulas através das arestas espessas.

Notamos então que cada professor lecionaria em apenas duas turmas e que cada turma teria exatamente aulas de dois professores, o que significa que o grau de todos os vértices do grafo são iguais, nessa situação têm grau 2, ao mesmo tempo, sabemos que cada subconjunto comporta a mesma quantidade de vértices, o que nos possibilitou reorganizar o horário para que pudesse haver a adequação necessária e assim termos nesse grafo bipartido, um emparelhamento perfeito.

2. Conceitos de grafos abordados

a - Grafo bipartido (def. 3.1.1);

b - Emparelhamento em grafos bipartidos (def. 3.1);

c - Emparelhamento perfeito em grafos bipartidos (def. 3.2.1).

3. Resultados esperados

Esperamos que os alunos:

a - Reconheçam grafos bipartidos, como também distingam seus subconjuntos;

b - Compreendam o processo de emparelhamento em grafos bipartidos;

c - Elaborem problemas simples sobre grafos bipartidos e emparelhamento dos mesmos e, se possível, emparelhamento perfeito, respondendo-os.

4. Justificativa

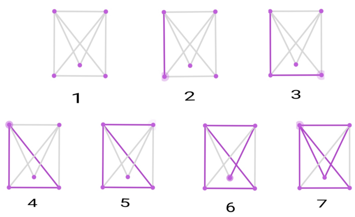
A aplicação dessa proposta de elaboração de problemas se dá para que o aluno possa ter ideia das complexidades dessa atividade e valorize ainda mais o papel do professor. A proposta do problema se dá para ampliação do conhecimento sobre grafos e percepção da aplicação prática dele. E na última atividade podemos explorar uma aplicação prática do contexto de diversos alunos, esclarecendo que existem muitas outras aplicações desse ramo da Matemática em diversas áreas do conhecimento e em diversas situações cotidianas, como também podem ser apresentados, no momento, alguns aplicativos que utilizam essa noção de grafos.

Um exemplo de aplicativo que pode ser apresentado e utilizado é o **One Line**, o objetivo principal do jogo é trilhar todas as arestas de cada grafo a partir de um vértice inicial a ser escolhido pelo usuário. Essa escolha é muito importante para determinar se o objetivo será cumprido. No primeiro contato, o aplicativo direciona o jogador para que o mesmo obtenha sucesso, dessa forma fica bem intuitivo. O professor de Matemática pode, a partir da interação com o aplicativo, fazer a relação com o conceito de grafos, grau dos vértices, teoremas 1.2.1, 1.2.2 e 1.5.1, grafo simples, multigrafo, arestas em paralelo, circuito, grafo conexo, grafo completo, grafo regular, ciclo e grafo planar. O aplicativo é grátis. Vejamos algumas imagens: o ícone do aplicativo, uma tentativa falha no processo de fazer o Passeio Euleriano fechado e uma tentativa satisfatório no mesmo grafo, respectivamente, nas figuras 80, 81 e 82.

Figura 80 – Ícone do aplicativo One Line

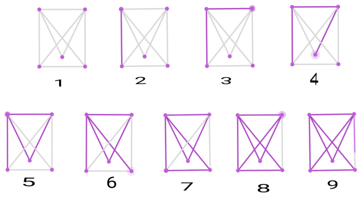
Fonte: Produzida pelo autor

Figura 81 – Tentativa falha



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 82 – Tentativa satisfatória



Fonte: Produzida pelo autor

5. Tempo destinado para a aplicação

   É aconselhável que o professor reserve duas aulas para o desenvolvimento do trabalho nesse último dia de abordagens sobre a Teoria dos Grafos, para que os alunos possam pensar, elaborar os problemas, resolvê-los e apresentarem; pensar no problema proposto, responder e apresentar suas respostas; o professor fazer as inferências necessárias e abordagens do conteúdo; e ter o momento de avaliação, extraindo opiniões, críticas, elogios e sugestões.

6. Materiais necessários

   a - Xerox, o uso do quadro branco, folhas de ofício, cartolina e papel 40.

   Obs.: Nesse último dia de aplicação, seria bom que os materiais fossem integralmente disponibilizados pelo professor em parceria com a escola.

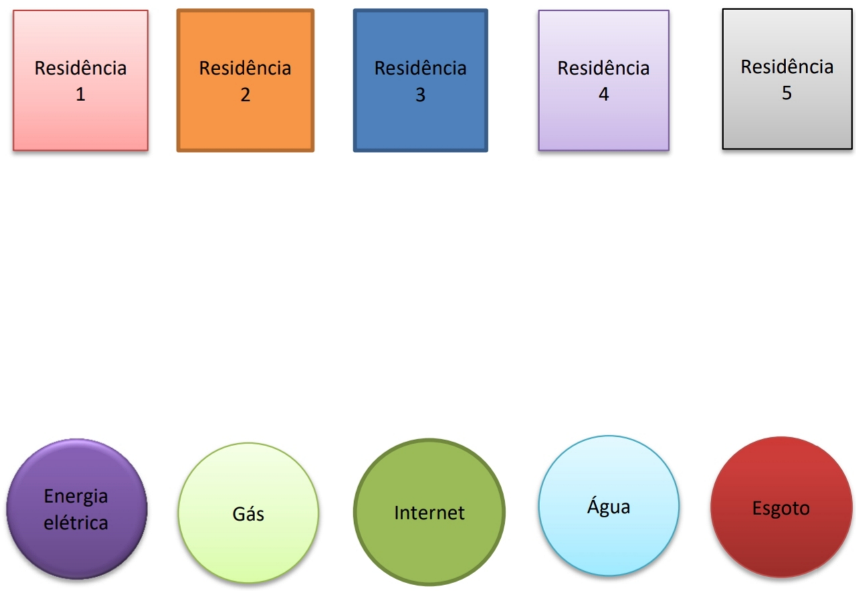
Por fim, o professor deve incentivar que os alunos pesquisem e aprofundem seus conhecimentos sobre o tema abordado e que eles exponham oralmente suas impressões, se foi significativo, se aprender a partir de aplicações foi melhor, pedir que eles avaliem com uma palavra ou frase esse processo de construção de conhecimento e deixem seus comentários, sugestões, críticas e elogios por escrito.

4.5.1 Atividade complementar – Problema das instalações de produtos e serviços em residências

1 - Um condomínio, em fase inicial, compreende um total de 5 residências e para estimular a chegada de novos moradores, resolveu dar uma cortesia na instalação de alguns produtos e serviços. Os produtos e serviços oferecidos são de energia elétrica, gás, internet, água e esgoto (figura 83). No entanto, só serão disponibilizadas para cada residência 3 instalações com gratuidade e cada serviço só atenderá de forma gratuita a 3 residências. Sabendo que cada instalação demora um dia para ser concluída, existe a possibilidade das 5 residências, a partir das condições iniciais, estarem recebendo uma dessas instalações gratuitas, simultaneamente, no primeiro dia? Se for possível, represente essa possibilidade através de grafo e descreva as suas

conclusões.

Figura 83 – Residências e distribuidoras de produtos e serviços



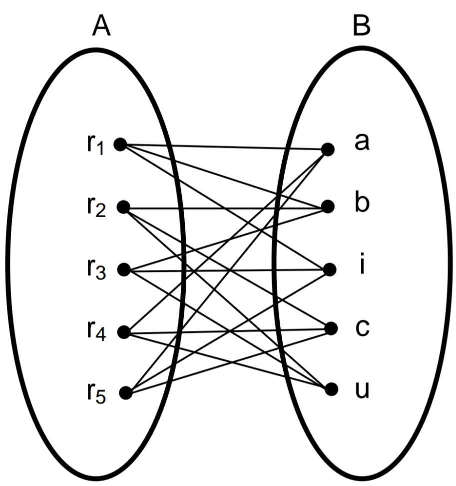
Fonte: Produzida pelo autor

- Respostas esperadas:

De início, denominaremos as residência 1, residência 2, residência 3, residência 4, residência 5, energia elétrica, gás, internet, água e esgoto, respectivamente por r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, a, b, i, c e u. Como sendo os vértices do grafo.

Separamos esses vértices em dois conjuntos disjuntos, conjunto A comportando as residências e o B compreendendo os produtos e serviços. Graficamente assim,

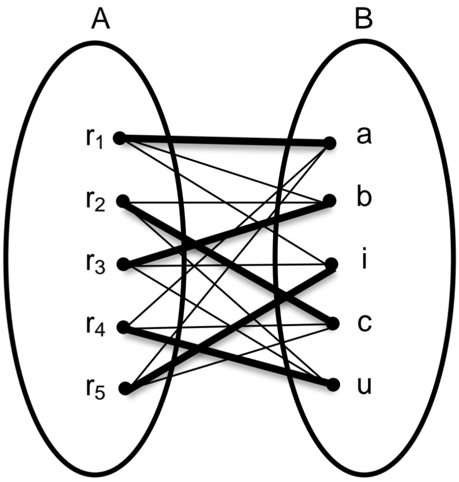
Figura 84 – Grafo bipartido referente às instalações de serviços às residências



Fonte: Produzida pelo autor

Todas as instalações gratuitas são expressas por arestas (figura 84) e as instalações simultâneas do primeiro dia estão com arestas mais espessas (figura 85).

Figura 85 – Emparelhamento perfeito referente às residências e às instalações



Fonte: Produzida pelo autor

Sendo assim, podemos perceber que é possível construir o grafo que aborda a situação proposta e com isso concluímos que existe a possibilidade das 5 residências estarem recebendo as instalações simultaneamente, o que está claro na figura 85 através das arestas espessas.

Nesse tipo de grafo podemos observar que o mesmo está subdividido em dois conjuntos disjuntos e existe a conexão entre os vértices do grafo, através de arestas, nas quais cada extremidade é incidente em vértices de conjuntos distintos, então ele é um grafo bipartido. Os dois conjuntos têm a mesma cardinalidade, todos os vértices do conjunto A estão conectados apenas a vértices do conjunto B e o mesmo acontece de B para A, todos os vértices têm o mesmo grau. E como existe uma conexão de cada residência a um serviço distinto, temos um emparelhamento perfeito.

1. Conceitos de grafo abordados no problema das instalações de produtos e serviços em residências

   a - Grafo bipartido (def. 3.1.1);

   b - Emparelhamento perfeito em grafo bipartido (def. 3.2.1);

   c - Teorema 3.2.1.

2. Resultados esperados após a aplicação do problema das instalações de produtos e serviços em residências

   Esperamos que os alunos:

a - Percebam que a resolução do problema aborda grafo bipartido;

b - Identifiquem os dois subconjuntos, separando-os;

c - Construam o grafo solicitado de acordo com o que se pede;

d - Observem que há um emparelhamento perfeito nesse grafo;

e - Relacionem o resultado encontrado com o teorema 3.2.1.

4.5.2 Exercícios complementares

1º) Num baile havia 6 garotas e 4 rapazes. Toda garota dançou com todo rapaz. Desenhe o grafo que representa essa situação. Quantas arestas o grafo tem? Quais são os graus dos vértices?

2º) Desenhe, se possível, um grafo bipartido com 8 vértices de graus 4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2.

3º) Em um grupo com 17 garotas e 13 rapazes podemos formar, no máximo, quantos casais, simultaneamente?

4º) Se em um treino há 2 equipes, cada uma com 10 integrantes, onde cada integrante de uma equipe conhece, exatamente, 4 integrantes da outra equipe, existe alguma forma de compor, simultaneamente, 10 duplas com integrantes de equipes distintas, de forma que eles sejam conhecidos? Justifique sua resposta.

Conclusão

Sabemos que o ensino da Matemática, atualmente, não está trazendo resultados tão satisfatórios quanto poderiam, boa parte dos alunos está cada dia mais desmotivada e uma outra grande parcela tem muita dificuldade em assimilar os conteúdos estudados em sala de aula. Provavelmente essa deficiência e carência estejam diretamente relacionadas à metodologia tradicional, utilizada para o repasse de conhecimentos de boa parte das instituições de ensino da Educação Básica, no entanto é perceptível a tentativa de moldar essa metodologia, por parte dos professores e dos formadores.

Os métodos tradicionais, distanciam-se das tendências de ensino e aprendizagem e não acompanham esse processo de mudanças, onde os alunos dispõem de fontes de pesquisas para busca do conhecimento e precisam apenas que o professor molde e adapte esse conteúdo, mediando um aprender diferenciado e promissor, nesse olhar da modernidade, da globalização e da tecnologia. Nesse contexto, acreditamos que esses métodos tradicionais podem e devem ser acompanhados dessas novas metodologias.

Em contraponto a essas tendências, nos deparamos com muitos alunos que resistem a buscar o conhecimento, principalmente o matemático, e muitas vezes já trazem em sua mentalidade que não aprenderão os conteúdos, que Matemática é muito difícil, que é um “bicho de 7 cabeças”. Vale salientar a importância da teoria e o ensino dos conceitos que são inerentes a Matemática, fonte de pesquisas exaustivas. Porém, enaltecemos que nenhuma das duas formas de ensino isoladas serão essenciais, não há aprendizagem completa só com a teoria sem a prática e o mesmo acontece com a prática sem teoria. As duas devem interagir para esse ideal na educação ocorrer.

É nessa perspectiva e com o olhar voltado, prioritariamente, para esse público, que observamos a importância da proposta de trabalho a partir da interação, da construção, do coletivo e do protagonismo, com isso observamos a eficiência e eficácia dessas sugestões de aulas, levando ao aluno um novo conhecimento. Acreditamos que a motivação seja a melhor forma de direcionar e despertar no aluno a busca pelo conhecimento.

O presente trabalho traz de uma maneira contundente o estudo e aplicações de grafos, pouco conhecidos, até mesmo desconhecidos, pela maioria dos estudantes da Educação Básica do Ensino Médio. Os grafos, no geral, estão relacionados à combinatória e têm representações na geometria; e com eles também podemos trabalhar matrizes entre outros conteúdos. Por isso, deveria haver uma difusão maior sobre esse ramo da matemática.

Podemos concluir que o ensino de grafos é potencialmente importante para a ampliação do ensino em Matemática. A metodologia aplicada nas sugestões propostas são facilitadores e favorecem um aprender com mais liberdade, voltado à significância do conteúdo ao cotidiano, contexto do aluno e sociedade como um todo. Dessa interação entre a teoria e a prática, podemos ampliar e propiciar mais qualidade ao processo de aquisição de conhecimento e poderemos alcançar os objetivos propostos no trabalho.

O tema abordado traz não só a aplicação de grafos, árvores e emparelhamento, mas também a teoria que esclarece e solidifica a proposta em sua integralidade e corroboram para um aprender eficiente.

O trabalho une "o útil ao agradável" em abordar um tema inovador para os alunos, que na Matemática tem sua origem de estudos relativamente recente em relação a muitos outros conteúdos e pode ser aplicado de forma dinamizada. Já vimos a vasta aplicabilidade e representatividade dos grafos e ressaltamos a fala de Lovász, Pelikán e Vesztergombi (2005, p.124) "Grafos são muito úteis na representação de uma grande variedade de situações...".

A confecção desse trabalho foi extremamente relevante para o meu crescimento pessoal e profissional, proporcionou novos aprendizados e ampliou a visão sobre o ensino de Matematica. Fez-me pensar nas dificuldades enfrentadas pelos docentes na tentativa de levar conhecimento aos discentes e também olhar às necessidades e dificuldades desses discentes em compreender os conteúdos estudados.

No mais, esperamos que os leitores e espectadores possam se interessar e aplicar o tema abordado/estudado. Difundindo assim, o estudo sobre a Teoria dos Grafos e usabilidade em diversas áreas do conhecimento.

Referências

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph theory with applications*. Ontário, Canadá: Oxford, 1976.

BRASIL, M. d. E. *Base Nacional Curricular Comum*. Brasília: MEC/SEB: Ministério da Educação, 2017.

BRASIL, S. d. E. F. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF: Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

COSTA, P. P. d. *Teoria de Grafos e suas Aplicações*. Rio Claro: [s.n.]: 2011. 77 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011.

DIESTEL, R. *Graph theory*. New York: Springer, 2000.

EDI, J. C. L. *Aritmética: um pouco da história*. Caxias do sul, RS: IX ANPED Sul, seminário de pesquisa em educação da região sul-UCS, 2012.

FONSECA, T. S. d. *Grafos e emparelhamentos em grafos*. Florestal, MG: 2018. 46 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, 2018.

FREIRE, P. *Pedagogia da Indignação: cartas pedagógicas e outros escritos*. 6ª ed. São Paulo: Editora Unesp, 2000.

LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. *Matemática Discreta: Elementar e Além*. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

MORGADO, A. C. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

RIBEIRO, M. R. d. C. *Grafos, algoritmos e programação*. Recife, BR-PE: 2018. 152 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2018.

ROSEN, K. H. *Discrete Mathematics and It's Applications*. Rio de Janeiro: Mc Graw-Hill, 2012.

SANTOS, E. L. d. S. *Planaridade em grafos : O teorema de Kuratowiski*. São Cristóvão, SE: 2017. 84 f. Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2017.

Apêndices

APÊNDICE A – Questionário diagnóstico

1 – Você já teve contato com o estudo sobre Teoria dos Grafos?

Se sua resposta à questão anterior for positiva, responda as seguintes questões:

2 – O que você sabe sobre grafos: árvore e emparelhamento?

3 – Quais as aplicações que você observou da Teoria dos Grafos em outras áreas de conhecimento e na vida em geral?

4 – Você considera interessante e importante o estudo sobre a Teoria dos Grafos?

Obrigado pela participação!